ΣΗΜΜΥ
Ασκήσεις στη Μαθηματική Ανάλυση
Λύσεις του 1ου φυλλαδίου ασκήσεων

Ασκηση 1. *Δείξτε ότι*

(ι) δεν υπάρχει ρητός αριθμός q, τέτοιος ώστε $q^2 = 3$

(ιι) οι αριθμοί $\sqrt{6}$ και $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ είναι άρρητοι.

Λύση. (ι) Έστω ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $\mu\,,\nu$ (μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν έχουν κοινό παράγοντα) τέτοιοι ώστε

$$(\frac{\mu}{\nu})^2 = 3, .$$

Τότε $\mu^2 = 3\nu^2$, δηλαδή ο μ^2 είναι πολλαπλάσιο του 3. Ισχυριζόμαστε ότι τότε και ο μ είναι πολλαπλάσιο του 3. Πράγματι αν κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει ο μ θα είναι της μορφής $3k + 1$ ή $3k + 2$. Τότε όμως $(3k + 1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ και $(3k+2)^2 = 3(3k^2+4k+1)+1$. Δηλαδή ο μ^2 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3. 'τοπο!

Επομένως $\mu = 3k$, για κάποιον φυσικό $k \Rightarrow \mu^2 = 9k^2$. Τότε $\nu^2 = 3k^2 \Rightarrow$ ο ν^2 άρα και ο ν θα είναι πολλαπλάσια του 3. 'τοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι οι $\mu\,,\nu$ δεν έχουν κοινό παράγοντα.

(ιι) Έστω ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $\mu\,,\nu$ (μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν έχουν κοινό παράγοντα) τέτοιοι ώστε

$$\frac{\mu}{\nu} = \sqrt{6}\,.$$

Τότε $\mu^2 = 6\nu^2$, δηλαδή ο μ^2 είναι πολλαπλάσιο του 2 και του 3. Τότε, από το (ι) και την απόδειξη για το $\sqrt{2}$, ο μ είναι πολλαπλάσιο του 2 και του 3. 'ρα $\mu = 6k$, για κάποιον φυσικό $k \Rightarrow \mu^2 = 36k^2$. Συνεπώς $\nu^2 = 6k^2 \Rightarrow$ ο ν^2 άρα και ο ν θα είναι πολλαπλάσια του 6. 'τοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι οι $\mu\,,\nu$ δεν έχουν κοινό παράγοντα.
(ιι) Αν υποθέσουμε ότι ο $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ είναι ρητός, τότε και το τετράγωνο του θα είναι ρητός. Δηλαδή $2 + 3 + 2\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί τότε $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. □

Ασκηση 2. *Να βρείτε τα σημεία συσσώρευσης του συνόλου $\mathbb{Q}$.*

Λύση. Αν $x \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$, τότε από την πυκνότητα του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ έχουμε ότι υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $x < q < x + \varepsilon$. Επομένως

$$\mathbb{Q} \cap [(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \setminus \{x\}] \neq \emptyset\,,$$

για κάθε $\varepsilon > 0$ και άρα τα σημεία συσσώρευσης του $\mathbb{Q}$ είναι όλο το $\mathbb{R}$. □

Ασκηση 3. *Να δείξετε, κάνοντας χρήση του $\epsilon-\delta$ ορισμού του ορίου συνάρτησης, οτι*

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4\,.$$

Λύση. Έστω $\varepsilon > 0$. Αν θέσουμε

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{5}\right\} ,$$

τότε για $|x-2| < \delta$ έχουμε

$$|x^2 - 4| = |x-2||x+2| < \frac{\varepsilon}{5}5 = \varepsilon \, .$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχαίο το παραπάνω ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ και συνεπώς έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Ασκηση 4. *Δίνεται η συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} x\, , & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0\, , & \text{αν } x \text{ άρρητος.} \end{cases}$$

Να δείξετε, κάνοντας χρήση του $\epsilon - \delta$ ορισμού του ορίου συνάρτησης, οτι

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \, .$$

Λύση. Έστω $\varepsilon > 0$. Παρατηρούμε κατάρχήν ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$|f(x)| \leq |x| \, .$$

Αν επιλέξουμε $\delta = \varepsilon$, τότε για κάθε $0 < |x| < \delta$ θα έχουμε ότι

$$|f(x)| \leq |x| < \varepsilon \, .$$

Οπότε

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \, .$$

$\square$

Ασκηση 5. *Να διατυπώσετε την άρνηση του $\epsilon-\delta$ ορισμού του ορίου συνάρτησης.*

Λύση. Η άρνηση του $\epsilon-\delta$ ορισμού του ορίου συνάρτησης είναι η εξής: υπάρχει $\varepsilon > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ να υπάρχει $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ και $|f(x) - \alpha| \geq \varepsilon$. $\square$