Ακολουθίες, όρια

$\{a_n\}: \mathbb{N} \ni n \to a_n \in \mathbb{R}$

- $a_n \nearrow$ (αύξουσα), αν $a_{n+1} \geq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- $a_n \downarrow$ (φθίνουσα), αν $a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- a_n σταθερή, αν $a_{n+1} = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- a_n μονότονη, αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα

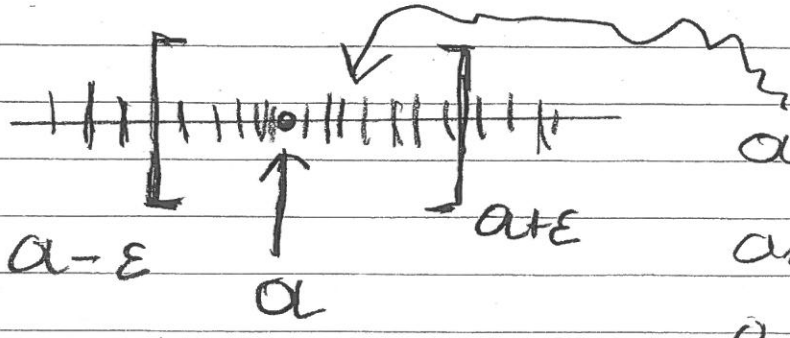
Ορισμός 1: Όριο ακολουθίας, ($a_n \to a \in \mathbb{R}$ (εναλλακτικά $\lim a_n = a$), αν

- $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : |a_n - a| \leq \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$

Ισοδύναμα:

- $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 = n_0(\varepsilon) :$

$$a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

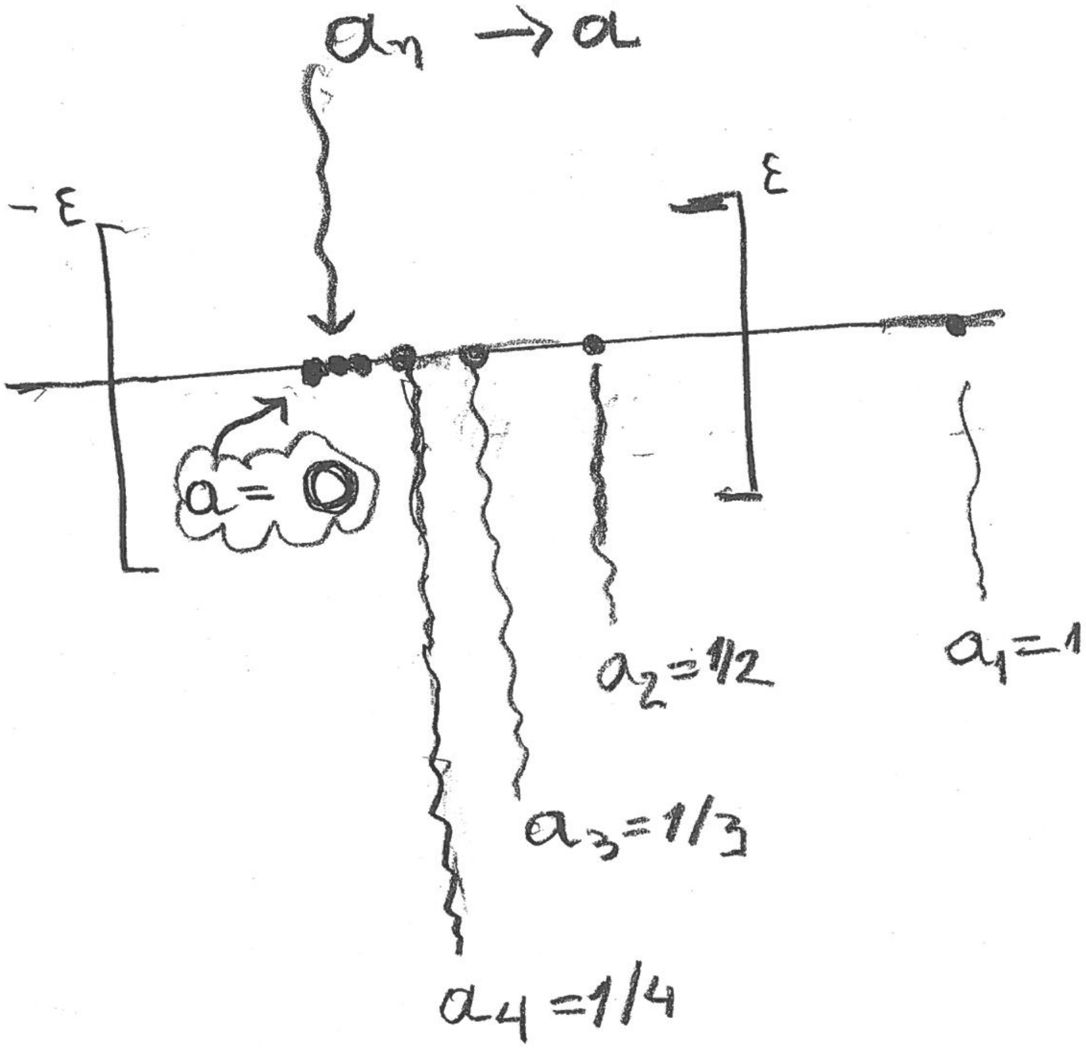


$a_{n_0} \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$

$a_{n_0+1} \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$

$a_{n_0+2} \in [\quad\quad]$

$\vdots \quad\quad \vdots$



a_n → a
-ε
ε
a = 0
a_2 = 1/2
a_1 = 1
a_3 = 1/3
a_4 = 1/4

Ασκηση: Δειχνουμε οτι η $\{a_n = \frac{1}{n}\}$ ειναι "μηδενική", δηλαδη:

$$\lim a_n = 0$$

Αποδ: Δειχνουμε οτι $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$:

$$|a_n - \cancel{a}^{\,0}| \leq \varepsilon, \ \forall n \geq n_0$$

Πραγματι, παρε $\varepsilon > 0$. Επιλεγουμε εναν ακέραιο $n_0 = n_0(\varepsilon) \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Τοτε:

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon, \ \forall n \geq n_0$$

και αρα $|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0$.

Μερικες βασικές ιδιότητες

- (1) $a_n \to a, \ b_n \to b, \ a, b \in \mathbb{R} \Longrightarrow \forall k, l \in \mathbb{R}$

$$k a_n + l b_n \to k a + l b$$

- (2) $a_n \to a \Leftrightarrow a_n - a \to 0$ (μηδενική)
- (3) $a_n \to a \Rightarrow \{a_n\}$ φραγμενη (πανω κ' κάτω)

- (4) $a_n \le b_n$ με $a_n \to a$, $b_n \to b$, τότε $a \underline{\le} b$ (το ίδιο συμπέρασμα με $a_n < b_n$)

- (5) $a_n \le b_n \le \gamma_n$ με $a_n \to \ell$, $\gamma_n \to \ell \, (\in \mathbb{R})$ τότε $b_n \to \ell$ (παρεμβολή)

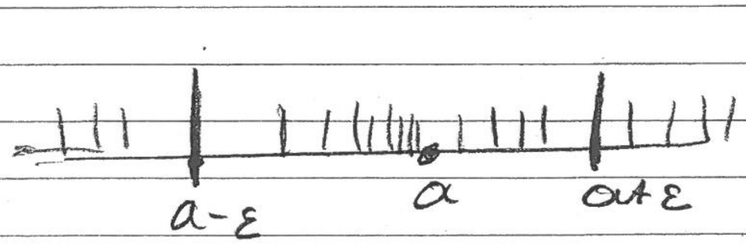
- (6) $a_n \to 0$ και $\{b_n\}$ φραγμένη $\Rightarrow \{a_n b_n\}$ μηδενική

- (7) $a_n \to 0$, $b_n \to b \Rightarrow \{a_n b_n\}$ μηδενική

- (8) $a_n \to a$, $b_n \to b \Rightarrow a_n b_n \to a \cdot b$

Αποδείξεις των ιδιοτήτων 3-8

(3)



Επειδή $a_n \to 0$, $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ με

$$a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$$

Η τελευταία και το γεγονός ότι οι όροι της ακολουθίας που βρίσκονται έξω από το $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ είναι πεπερασμένοι, συνεπάγονται το ζητούμενο.

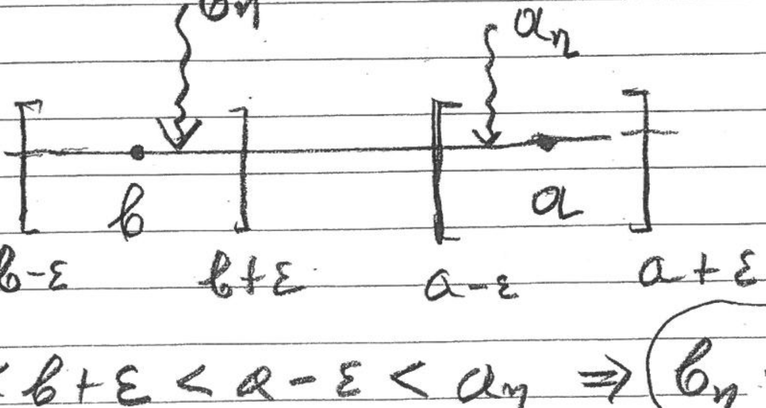
(4) Έστω τουναντίον

$$a > b$$

Λόγω των υποθέσεων, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ με

$$\left.\begin{aligned} a-\varepsilon \le a_n \le a+\varepsilon \\ b-\varepsilon \le b_n \le b+\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad \forall n \ge n_0$$

Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$: $\varepsilon < \dfrac{a-b}{2}$ κ έχουμε



$$b_n < b+\varepsilon < a-\varepsilon < a_n \Rightarrow b_n < a_n \quad \forall n \ge n_0$$

άτοπο λόγω της υπόθεσης $a_n \le b_n$.

(5) Απο τις υποθέσεις έχουμε ότι $\forall \varepsilon > 0$
$\Rightarrow \exists\, n_0$ με

$$\left\{\begin{array}{l} l-\varepsilon \le a_n \le l+\varepsilon \\ l-\varepsilon \le \gamma_n \le l+\varepsilon \end{array}\right\}, \forall n \ge n_0$$

Η παραπάνω σε συνδυασμό με την υπόθεση $a_n \le b_n \le \gamma_n$ δίνει:

$$l-\varepsilon \le a_n \le b_n \le \gamma_n < l+\varepsilon, \forall n \ge n_0 \Rightarrow$$

$$l-\varepsilon \le b_n \le l+\varepsilon \quad , \forall n \ge n_0, \varepsilon > 0$$

που σημαίνει ότι $b_n \to l$.

(6) Αφού b_n φραγμένη $\Rightarrow \exists M > 0$ με $|b_n| \le M, \forall n \in \mathbb{N}$. Επομένως, αφού $a_n \to 0$, $\forall \frac{\varepsilon}{M} > 0 \Rightarrow \exists\, n_0(\varepsilon) : |a_n - 0| \le \frac{\varepsilon}{M}, \forall n \ge n_0$

Άρα $\forall \varepsilon > 0$ έχουμε

$$|a_n b_n| \le |a_n||b_n| \le \frac{\varepsilon}{\cancel{M}} \cancel{M} = \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$|a_n b_n - 0| \le \varepsilon, \forall n \ge n_0$$

(γ) Ισοδύναμα, δείχνουμε ότι

$$\gamma_n := a_n b_n - ab \to 0$$

Πράγματι, $\gamma_n = a_n b_n - ab$

$$= \underbrace{a_n}_{\text{φραγμένη}}(b_n - b) + b(a_n - a)$$

μηδενικές

Παραδείγματα:

- $a_n = (-1)^n$ φραγμένη, δεν συγκλίνει
- $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ μηδενική, φθίνουσα, φραγμένη

?

$$\underset{\downarrow \atop 0}{0} \le \frac{1}{n^2} \le \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{n}} \Rightarrow \frac{1}{n^2} \to 0$$

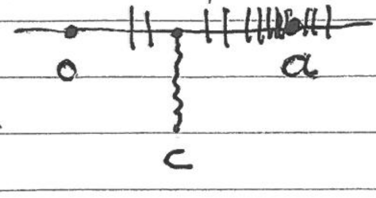
- $a_n = \dfrac{n^2+1}{n^3+1} = \dfrac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^3}}$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right)}_{\to 0} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{-1}}_{\to 1} \longrightarrow 0$$

Επιπλέον ασκήσεις και ιδιότητες ορίου ακολουθιών

(1) Δειχνουμε ότι αν $a_n \to a > 0$ τοτε

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } \exists c>0 \text{ και } n_0 \in \mathbb{N}: \\ \qquad a_n \geq c, \ \forall n \geq n_0 \\ \text{(ii) } 1/a_n \to 1/a \end{array} \right\}$$



Απόδειξη (i) Παρε $c = \frac{a}{2} > 0$. Τοτε για καθε $\varepsilon > 0$ με $\varepsilon < c$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με $a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon, \ \forall n \geq n_0$, άρα

$$\frac{a}{2} \leq a_n, \ \forall n \geq n_0$$

(ii) Ορίζουμε $\gamma_n = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} = \frac{a - a_n}{a_n a}$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\gamma_n \to 0$.

Πράγματι έχουμε $|\gamma_n| \leq |a - a_n| \frac{1}{|a_n|} \frac{1}{|a|}$

$$\leq \underbrace{|a - a_n|}_{\text{μηδενική}} \frac{1}{ac} \to 0$$

(2) Δείξτε ότι η $\left\{\frac{1}{n^a}\right\}$, $a>0$ είναι μηδενική (Μόνοι σας)

(3) Δείξτε ότι η $(1+(-1)^n)\frac{1}{n^2}$ είναι μηδενική.

Απ. Πράγματι, η $\{1+(-1)^n\}$ φραγμένη και η $1/n^2$ μηδενική $\Rightarrow$ ζητούμενο

(4) Εύρεση $\lim \frac{n^2+\sin(10n)}{n^a+1}$, με $a=2$, $a>2$

$$\lim \frac{n^2+\sin(10n)}{n^a+1} = \lim \frac{n^{2-a} + \overbrace{n^{-a}}^{\text{μηδενική}}\sin(10n)}{1+\underbrace{\frac{1}{n^a}}_{\text{μηδενική}}}$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{αν } a=2 \\ 0, & \text{αν } a>2 \end{cases}$$

(5) Ευρεση

$$\lim\Big(\underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots+\frac{1}{(2n)^2}}_{a_n}\Big)$$

Εχουμε

$$\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{n}{(2n)^2}} \le \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{a_n} \le \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\frac{n}{(n+1)^2}} \Rightarrow a_n \to 0$$

(6) Λεμε οτι $\{x_n'\}$ ειναι υπακολουθία της $\{x_n\}$, αν υπαρχουν p_n, $n=1,2,3,\dots$, φυσικοι αριθμοί με $p_1<p_2<p_3<\cdots$ με $p_n\to\infty$ και $x_n' = x_{p_n}$, $n\in\mathbb{N}$. Δειξτε οτι $x_n \to a\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ αν και μονο καθε υπακολουθία $\{x_n'\}$ της $\{x_n\}$ κατεχει την ιδια ιδιότητα

(7) Αν $\{a_n\}$ συγκλινει και $\{b_n\}$ με $b_n \le a_n$ τοτε η $\{b_n\}$ ειναι πανω φραγμενη.