Όριο στο $\pm\infty$ - Ασκήσεις, ιδιότητες

χβγ θεωρούμε μόνο την περίπτωση $+\infty$

Ορισμός: Γράφουμε $a_n \to +\infty$ ($\lim a_n = +\infty$) αν $\forall M > 0 \Rightarrow \exists n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}$:

$$a_n \geq M, \ \forall n \geq n_0$$

Ισοδύναμος ορισμός

Θέτοντας $\varepsilon = 1/M$ η παραπάνω συνεπαγωγή γράφεται

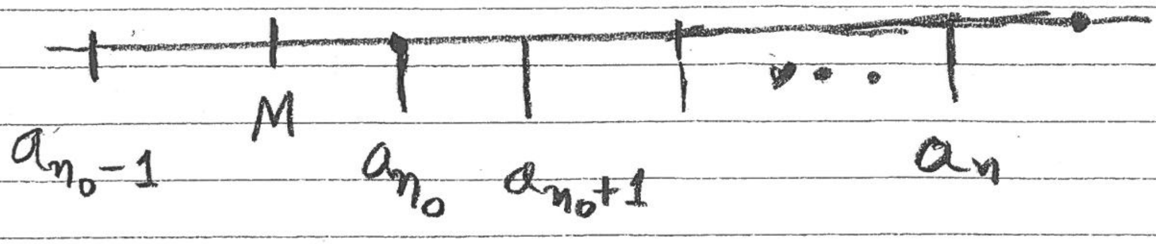
$$\forall \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}:$$

$$a_n \geq \frac{1}{\varepsilon}, \ \forall n \geq n_0 \iff$$

$$\left\{ \varepsilon \geq \frac{1}{a_n} > 0, \ \forall n \geq n_0 \right\}$$

Που σημαίνει ότι $a_n \to +\infty$, αν και μόνο αν

- υπάρχει n_0: $a_n > 0, \ \forall n \geq n_0$
- η $\{1/a_n\}$ είναι μηδενική



M
a_{n_0-1}
a_{n_0}
a_{n_0+1}
a_n

Ασκήσεις - ιδιότητες:

(1) Αν $0 < x_\eta \leq y_\eta$ και $x_\eta \to +\infty \Rightarrow y_\eta \to +\infty$

Απ. Πράγματι, έχουμε $0 < \frac{1}{y_\eta} < \frac{1}{x_\eta}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{μηδενική} \\ \text{λόγω υπόθεσης} \\ x_\eta \to +\infty \end{array} \right\}$

$\Rightarrow \lim 0 \leq \lim\left(\frac{1}{y_\eta}\right) \leq \lim\left(\frac{1}{x_\eta}\right) = 0 \Longrightarrow$

$\lim \frac{1}{y_\eta} = 0$ και $y_\eta > 0$ για $\eta > \eta_0$

η_0 επαρκώς μεγάλο

(2) Αν $x_\eta \to +\infty$ και y_η κάτω φραγμένη

$\Rightarrow x_\eta + y_\eta \to +\infty$

Απ. Πράγματι, αφού y_η κάτω φραγμένη, υπάρχει $\rho > 0$ με

$y_\eta \geq \rho, \ \forall \eta \geq \eta_0$

$x_n \to +\infty \Rightarrow \forall \mu > 0 \Rightarrow \exists n_0$ με

$$x_n > \mu, \ \forall n \geq n_0$$

Έπεται ότι για κάθε $\overbrace{\mu + \rho}^{M}$, $\exists n_0$:

$$x_n + y_n > \underbrace{\mu + \rho}_{M}, \ \forall n \geq n_0$$

άρα $x_n + y_n \to +\infty$.

(3) Αν $a_n \to 0$, $a_n > 0$ και $b_n \in [1, +\infty) \Rightarrow$

$$\frac{b_n}{a_n} \to +\infty$$

Απ. Οι όροι $x_n = b_n / a_n$ είναι θετικοί και αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{1}{x_n} \to 0 \Leftrightarrow$ $\frac{a_n}{b_n} \to 0$. Πράγματι:

$$0 \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_n}{1} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 0$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \text{(υπόθεση)} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(4) Εύρεση $\lim a^n \begin{cases} = +\infty, & a>1 \\ = 0, & a \in (0,1) \end{cases}$

- (i) $a = 1$, $\Rightarrow$ προφανώς $\lim a^n = 1$
- (ii) $a > 1$

Τότε έχουμε $a = 1+p$ με $p>0 \Rightarrow$

$$a^n = (1+p)^n = 1 + np + \frac{n(n-1)}{2}p^2 + \dots + p^n$$

$$\geq 1 + np$$

$$\Rightarrow \lim a^n \geq \lim (1+pn) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim a^n = +\infty$$

- (iii) $0 < a < 1$

Θέτουμε $b = 1/a$. Τότε $b > 0$

και από (ii) έχουμε

$$b^n \to +\infty$$

Άρα $a^n = \dfrac{1}{b^n} \to 0$

$\rightsquigarrow \left\{ a^n \to +\infty, \; a>1 \right\} \leftarrow$ Συμπέρασμα.

Άσκηση 5. Όριο της

$$a_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n, \quad a \geq 0$$

περίπτωση (i) $a = 0 \Rightarrow a_n = 1 \to 1$

περίπτωση (ii) $a = 1 \Rightarrow a_n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1} \to +\infty$

Περίπτωση (iii) $a < 1$

$$1 + a + \cdots + a^{n-1} + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \to \frac{1}{1-a}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση $a < 1$ η οποία εξασφαλίζει $\lim a^n = 0$

Περίπτωση (iv) $a > 1$

Ομοίως έχουμε $a^n \to +\infty$, επειδή $a > 1$, συνεπώς

$$1 + a + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \to +\infty$$

Άσκηση 6. Δείχνουμε ότι

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \lim \sqrt[n]{n} = 1 \\ \bullet \lim \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0 \end{array} \right\}$$

• Πραγματι εχαμε

$$\sqrt[\eta]{\eta} \geq 1, \ \forall \eta \in \mathbb{N}$$

Οριζουμε $\theta_\eta := \sqrt[\eta]{\eta} - 1$, οπου προφανως $\theta_\eta \geq 0$. Ισοδυναμα $\sqrt[\eta]{\eta} = 1 + \theta_\eta$, αρα

$$\eta = (\theta_\eta + 1)^\eta \Rightarrow$$

$$\eta = 1 + \eta\theta_\eta + \frac{\eta(\eta-1)}{2!}\theta_\eta^2 +$$

$$\ldots \frac{\eta(\eta-1)(\eta-2)}{3!}\theta_\eta^3 + \cdots + \theta_\eta^\eta \Rightarrow$$

$$0 \leq \theta_\eta \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\eta-1}} \Rightarrow \lim \theta_\eta = 0$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

Ισοδυναμα

$$\lim(\sqrt[\eta]{\eta} - 1) = 0$$

Ισοδυναμα

$$\boxed{\lim \sqrt[\eta]{\eta} = 1}$$

• Εστω $a > 0$. Διακρινουμε 2 περιπτωσεις

(1): $a > 1$.

Εστω $\eta \in \mathbb{N}$ με

$$n \geq a > 1, \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\sqrt[n]{n}} \geq \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\sqrt[n]{a}} > \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{1} \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a} = 1$$

(2) $a \in (0,1)$

Θέτοντας $b = 1/a \overset{b>1}{\Longrightarrow} \sqrt[n]{b} \to 1 \Leftrightarrow$ {προηγούμενη περίπτωση}

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{1/b} = 1/\sqrt[n]{b} \to 1/1 = 1$$

άρα και πάλι $\lim \sqrt[n]{a} = 1$.

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

(7) $a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0$

Αποδειξη

$(\Leftarrow)$ $a_n = \underbrace{(\operatorname{sgn} a_n)}_{\text{φραγμενη}}\underbrace{|a_n|}_{\text{μηδενικη}} \to 0$

$(\Rightarrow)$ $|a_n| = \underbrace{(\operatorname{sgn} a_n)}_{\text{φραγμενη}}\underbrace{a_n}_{\text{μηδενικη}} \to 0$

(8) Αν $\{\xi_n \geq 0\}$ και εστω $\xi_n \to \xi \in \mathbb{R}$

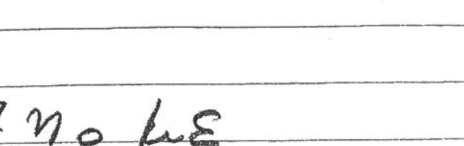
Δειχνουμε οτι $\xi \geq 0$.

Απαντηση

$$\left.\begin{array}{cc} \underbrace{0}_{a_n} \leq & \underbrace{\xi_n}_{b_n} \\ \downarrow & \downarrow \\ 0 & \xi \end{array}\right\} \overset{\text{Ιδιοτητα 4}}{\Longrightarrow} 0 \leq \xi$$

(9) Αν $\xi_n \to \xi > 0$, τοτε $\exists\, n_0$ με

$\xi_n > 0, \ \forall n \geq n_0$



Μονοι σας.

25

(10) Αν $a_n \to a \geq 0$ δειχνουμε ότι

$\left\{ \sqrt[3]{a_n} \to \sqrt[3]{a} \right\}$

<u>Περίπτωση</u> 1 : $a > 0$

$a_n - a = (\sqrt[3]{a_n} - \sqrt[3]{a})$

$\times \left((\sqrt[3]{a_n})^2 + \sqrt[3]{a_n}\sqrt[3]{a} + (\sqrt[3]{a})^2 \right)$

επι

$\Rightarrow \sqrt[3]{a_n} - \sqrt[3]{a} = (a_n - a)$

$\times \underbrace{\left((\sqrt[3]{a_n})^2 + \sqrt[3]{a_n}\sqrt[3]{a} + (\sqrt[3]{a})^2 \right)^{-1}}$

μηδενική

$\Rightarrow |\sqrt[3]{a_n} - \sqrt[3]{a}| \leq |a_n - a|$

$\times (\sqrt[3]{a})^{-2} \quad \to 0 \Rightarrow$ το ζητούμενο

<u>Περίπτωση</u> 2 : $a = 0$

Αφήνεται στον αναγνώστη

(11) Αν $|a_n - b_n| \le \xi_n b_n$ με $\xi_n \to 0$ δειχνουμε οτι

$$b_n \to b \Rightarrow a_n \to b$$

$$a_n \to a \Rightarrow b_n \to a$$

(i) Απο υπόθεση εχουμε:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ b}}{\underbrace{b_n(1-\xi_n)}} \le \underset{\substack{\downarrow \\ b}}{a_n} \le \underset{\substack{\downarrow \\ b}}{\underbrace{b_n(1+\xi_n)}} \Rightarrow a_n \to b$$

(ii) Ομοίως για n επαρκως μεγαλα:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ a}}{\frac{a_n}{1+\xi_n}} \le \underset{\substack{\downarrow \\ a}}{b_n} \le \underset{\substack{\downarrow \\ a}}{\frac{a_n}{1-\xi_n}} \Rightarrow b_n \to a$$

27

(12) Αν $\{a_n \geq 0\}$ και

$$\left.\begin{array}{l} \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in [0,1) \\ \Rightarrow \lim a_n = 0 \end{array}\right\}$$

Πραγματι, εστω $b_n = a_{n+1}/a_n$. $\times$ βγ

εστω $a \in (0,1)$. Λογω υποθεσης $b_n \to a (\neq 0)$

δηλαδή, $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με

$a - \varepsilon \leq b_n \leq a + \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$, οπου εχουμε

επιλέξει ε: $a+\varepsilon < 1$, $0 < \varepsilon < a$, $\varepsilon > 0$

Εχουμε:

$$a-\varepsilon \leq b_{n_0} \leq a+\varepsilon$$

$$a-\varepsilon \leq b_{n_0+1} \leq a+\varepsilon \quad \Rightarrow$$

$$\vdots$$

$$a-\varepsilon \leq b_{n_0+k} \leq a+\varepsilon$$

$$(a-\varepsilon)^{k+1} \leq b_{n_0} b_{n_0+1} \cdots b_{n_0+k} \leq (a+\varepsilon)^{k+1}$$

η το ίδιο

$$(a-\varepsilon)^{k+1} \le \frac{a_{n_0+k+1}}{a_{n_0}} \le (a+\varepsilon)^{k+1} \Longrightarrow$$

$0<a-\varepsilon<1$ $\qquad$ $0<a+\varepsilon<1$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

$$a_{n_0+k+1} \to 0 \Rightarrow (a_n \to 0)$$

$$(k\to\infty) \qquad (n\to\infty)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα $\lim \xi^n = 0$ αν $\xi \in [0,1)$

(13) Δείχνουμε ότι $\lim \frac{n^3}{3^n} = 0$

Απάντηση: καλούμε $a_n = \frac{n^3}{3^n} \Rightarrow$
$a_{n+1}/a_n = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{3} \in (0,1)$, άρα από άσκηση 12 $\lim a_n = 0$