Προτασεις, Προτασιακοι τύποι

Πρόταση p → Αληθης
→ Ψευδης

Προτασιακος τύπος P

$$P = \{ p(x),\ x \in \Omega \}$$

1• Παράδειγμα

$$x^2 - 3x + 2 > 0,\ x \in \Omega = \mathbb{R}$$

Πεδιο αληθειας $\Omega_A \subset \Omega$

$$= \{ x \in \Omega : p(x) \text{ αληθής} \}$$

Παράδειγμα: Ω_A της παραπανω ανι-
σωσης $= \{ x \in \mathbb{R} : x < 1 \text{ ή } x > 2 \}$

2• Παράδειγμα

$$x^2 + 1 > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

πεδιο αληθειας το $\mathbb{R}$

3• Παραδειγμα

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},\ n \in \mathbb{N}$$

Πεδιο αληθειας το $\mathbb{N}$.

Ειδικα για προτασιακούς τύπους:

$$P = \{ p(n),\ n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \geq 1 \} \quad \star$$

αξιώνουμε:

Αξίωμα Μαθηματικής επαγωγής

Ο παραπάνω προτασιακός τύπος $\star$ είναι αληθής, δηλαδή όλες οι προτάσεις $p(n)$, $n = n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots$ είναι αληθείς, αν:

(1) $p(n_0)$ αληθής

(2) Για κάθε $n \geq n_0$ με $p(n)$ αληθής $\Rightarrow p(n+1)$ αληθής

Το παραπάνω αξίωμα είναι ισοδύναμο με τον ορισμό των φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$:

(1) $1 \in \mathbb{N}$

(2) $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα

$P: 2^{n-1} \leq n!, \; n \in \mathbb{N}$

όπου $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$

αληθής, γιατί

$p(1): 2^0 \leq 1!$

Έστω ότι $p(n)$ αληθής δηλαδή

$$2^{n-1} \leq n! \qquad (\text{ΕΥ})$$

Τότε

$$2^{(n+1)-1} = 2^{n-1}\,2$$

$$\begin{pmatrix}\text{επαγωγική} \\ \text{υπόθεση ΕΥ}\end{pmatrix} \leq \underbrace{1 \cdot 2 \cdots n}_{n!}\,(n+1) = (n+1)!$$

Άρα $p(n+1)$ αληθής $\xRightarrow{\text{ΑΞΙΩΜΑ}}$ P αληθής

Με χρήση μαθηματικής επαγωγής δειχνουμε:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots + b^n \quad (2)$$

$$(a^n - b^n) = (a-b) \underset{\text{επι}}{\times} (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-2}a + b^{n-1}) \quad (3)$$

Παραδειγμα $(n=3)$: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad x>-1, \; n=1,2,3,\dots \quad (4)$$

(Bernoulli)

Δειχνουμε την τελευταία: Για $n=1$

$(1+x)^1 \geq 1+x$, αληθής. Εστω

$(1+x)^n \geq 1+nx$ (Επαγωγική Υπόθεση (ΕΥ))

Προκύπτει για $n=n+1$: $(1+x)^{n+1} =$

$(1+x)^n(1+x) \underset{(ΕΥ)}{\geq} (1+nx)(1+x) \geq 1+(n+1)x$

αληθης, αρα απο το Αξίωμα η (4) αληθής

Ρητοί αριθμοί ($\mathbb{Q}$)

$x = p/q$, $q \neq 0$, $p, q \in \mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

χωρίς βλάβη γενικότητας (χβγ): p, q είναι πρώτοι μεταξύ τους

Μερικές ιδιότητες - παραδείγματα

- $x_1, x_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \left.\begin{cases} x_1 x_2 \\ (x_1 + x_2)/2 \end{cases}\right\} \in \mathbb{Q} \ldots$

Απόδειξη: $x_1 = p_1/q_1$, $x_2 = p_2/q_2$ με $q_1 q_2 \neq 0$

$$\Rightarrow x_1 x_2 = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2} \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = (p_1 q_2 + p_2 q_1)/(2 q_1 q_2) \in \mathbb{Q} \ldots$$

- $\forall x_2 > x_1$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists$ άπειροι ρητοί ω διάφοροι μεταξύ τους μ.ε.

$$x_1 < \omega < x_2$$

Άλλες ιδιότητες των ρητών:

- **Διάταξη**: Αν $x_1 = p_1/q_1$, $x_2 = p_2/q_2$ με $p_2, p_1, q_1, q_2 > 0$ ισχύει:

$$\left\{ x_2 \geq x_1 \iff p_2 q_1 \geq q_2 p_1 \right\}$$

- **Το σύνολο των ρητών είναι αριθμήσιμο**

Ορισμός: Το $S \subset \mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο αν υπάρχουν αριθμοί $a_1, a_2, a_3, \dots$:

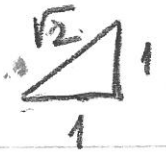
$$S \subset \{a_n\}$$

Απόδειξη:

Θεωρούμε όλους τους θετικούς ρητούς και το κάτωθι διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccc}
1/1 & \rightarrow 1/2 & 1/3 \rightarrow & 1/4 \rightarrow & \dots \\
2/1 & 2/2 & 2/3 & 2/4, & \dots \\
3/1 & 3/2 & 3/3 & 3/4, & \dots \\
4/1 & \rightarrow 4/2 & 4/3 & 4/4, & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Άσκηση. Αν $S_1 \subset S_2$ και S_2 αριθμήσιμο $\Rightarrow S_1$ αριθμήσιμο.



• Το $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός

Απόδειξη Έστω τουναντίον ότι $\sqrt{2} = p/q$ με $p, q > 0$, p, q πρώτοι μεταξύ τους με

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$$

επομένως $p = 2k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, συνεπώς $4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2k^2 = q^2 \Rightarrow q = 2k'$ για κάποιο $k' \in \mathbb{N}$, άρα p, q δεν είναι πρώτοι, άτοπο.

{Αλγεβρικοί αριθμοί: Οι αριθμοί που είναι ρίζες πολυωνύμου με ακεραίους συντελεστές}

Π.χ. το $\sqrt{2}$ είναι αλγεβρικός ως ρίζα του $x^2-2=0$, αλλά δεν είναι ρητός.

Προφανώς:

Ρητοί $\subset$ Αλγεβρικοί

Οριζουμε

Αρρητοι := Μη ρητοί

Υπερβατικοι := Μη αλγεβρικοί

$\mathbb{R}$:= Ρητοί $\cup$ Αρρητοι

Οι αριθμοι π, e ειναι υπερβατικοι

Hermite 1873

Legendre 1794

$\Rightarrow$ Υπερβατικοι μη κενο σύνολο

ΑΝΩΤΕΡΟ, ΚΑΤΩΤΕΡΟ ΠΕΡΑΣ

Ορισμος 1. Εστω $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \phi$. Το S λεγεται πανω φραγμενο, αν $\exists M \in \mathbb{R}$:

$$x \leq M, \forall x \in S$$

Αξίωμα 1: Αν S πανω φραγμενο, τοτε το συνολο D των πανω φραγμάτων του S εχει ελαχιστο, εστω το $L (\in D)$. Το L εχει τις ιδιοτητες

$$x \leq L, \forall x \in S$$

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists x \in S : L - \varepsilon \leq x \leq L$$

Η δευτερη γραφεται και (ισοδυναμα):

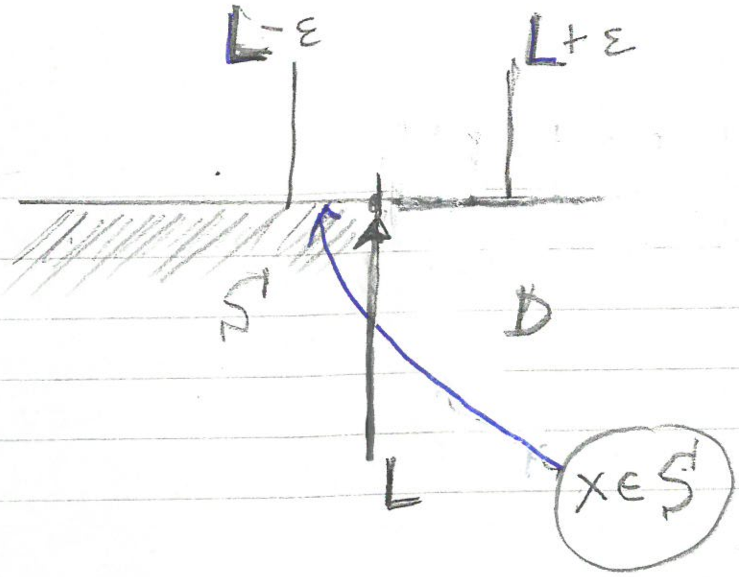
$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists x \in S : L - \varepsilon \leq x \leq L + \varepsilon .$$

Συμβολισμος $L = \sup S$ "Ανώτερο πέρας"

Σχολιο: Προφανως $\sup S = \max S$ αν $L \in S$

Αν S μη πανω φραγμενο, γραφουμε

$$\sup S = +\infty$$



$L-\varepsilon \leq x \leq L+\varepsilon$

Ορισμος 2. Εστω $S \subset \mathbb{R}$ ($S \neq \emptyset$)

Το S λεγεται κατω φραγμενο, αν

$\exists \mu \in \mathbb{R}$:

$$x \geq \mu, \forall x \in S$$

Αξίωμα 2 Αν S κατω φραγμενο, τοτε το

συνολο D των κάτω φραγματων του S εχει

μεγιστο, εστω το ℓ ($\in D$). και ικανοποιει:

$$\ell \leq x, \forall x \in S$$

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists x \in S: \ell + \varepsilon \geq x \geq \ell$$

Η δευτερη γραφεται (ισοδυναμα): $\forall \varepsilon > 0$

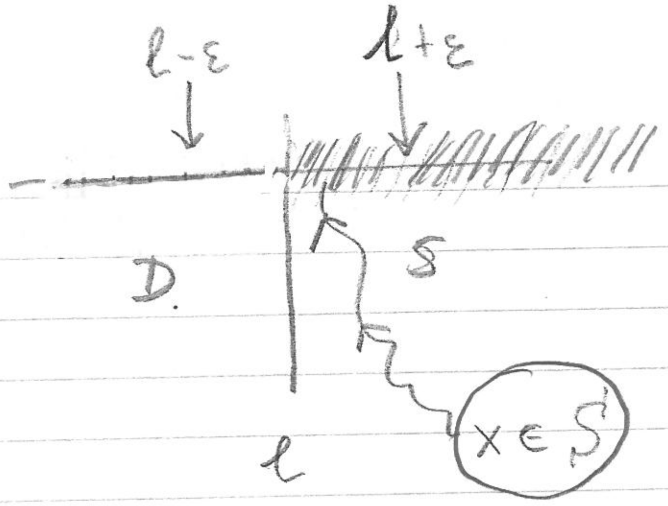
$\Rightarrow \exists x \in S: \ell + \varepsilon \geq x \geq \ell - \varepsilon$

Συμβολισμος $\ell = \inf S$ "κατωτερο περας"

Σχολιο: $\inf S = \min S$, αν $\ell \in S$

Αν S μή κατω φραγμενο, γράφουμε·

$$\inf S = -\infty$$



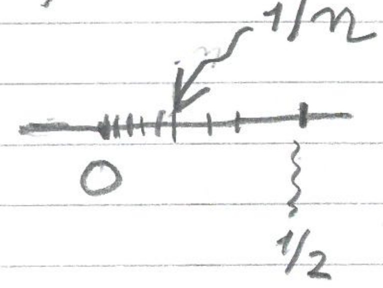
$$l - \varepsilon < x < l + \varepsilon$$

Παραδείγματα $\sup(1,2) = 2$, $\inf(1,2) = 1$

$\sup[1,2) = 2$, $\inf[1,2) = \min[1,2) = 1$

$\sup((1,2) \cup \{3\}) = \max((1,2) \cup \{3\}) = 3$

$\inf\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\} = 0$



$\sup\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$

$= \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\} = \frac{1}{2}$

Πρόταση: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $x < n$

Αποδ. Έστω τουναντίον $\exists x$ με $x \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε x πάνω φράγμα για το $S := \mathbb{N}$. Άρα $\exists \sup \mathbb{N} = L$ $(L \in \mathbb{R})$. Επομένως $L \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow L-1 \geq n-1$ $\Rightarrow L-1 \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Το τελευταίο

συνεπάγεται ότι $L-1$ είναι ένα πάνω φράγμα του $\mathbb{N}$ και επομένως:

$$\underbrace{\sup\mathbb{N}}_{L} \le L-1$$

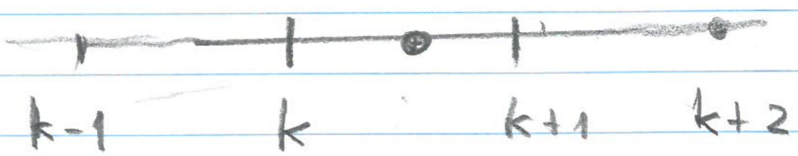
<u>Άτοπο</u>

<u>Άσκηση</u> Εφαρμόστε την προηγούμενη πρόταση για να δείξετε ότι:

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

<u>Πρόταση</u> 2 $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists$ μοναδικό $k \in \mathbb{Z}$:

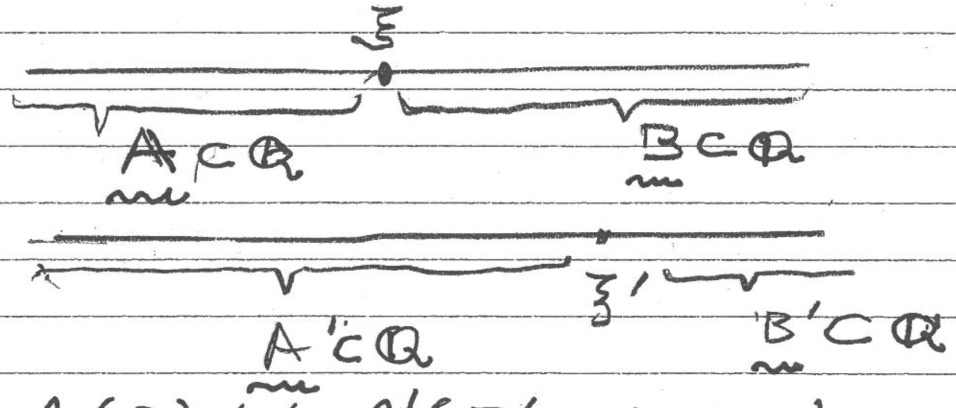
$$k \le x < k+1$$



π.χ. $\ldots \; 6 < 6{,}37 < 7 \; \ldots$

Πράξεις, ανισότητες στον $\mathbb{R}$, τομή Dedekind

Οι πράξεις, ανισότητες, κλπ στο $\mathbb{Q}$ μεταφέρονται "ως έχουν" στο $\mathbb{R}$. Αναφερόμαστε ενδεικτικά στην περίπτωση των ανισοτήτων $\xi' < \xi$, $\xi' > \xi$, $\xi = \xi'$, $\xi, \xi' \in \mathbb{R}$. Αν $\xi, \xi' \in \mathbb{Q}$ ήδη γνωρίζουμε τους αντίστοιχους ορισμούς. Στη γενική περίπτωση, θεωρούμε τις διαμερίσεις



όπου $A(B) \neq \emptyset$, A' (B' αντίστοιχα) έτσι ώστε κάθε στοιχείο του $A(A')$ είναι μικρότερο από κάθε στοιχείο του B (B', αντίστοιχα)

Γράφουμε

$\xi = \xi'$, αν $A = A'$

$\xi' > \xi$, αν $\exists x \in A'$, $x \notin A$

$\xi' < \xi$, αν $\exists x \in A$, $x \in A'$

Σημείωση: Σύμφωνα με τα προηγούμενα σχήματα (διαμερίσεις Dedekind)

$$\xi = \sup A = \inf B$$

$$\xi' = \sup A' = \inf B'$$

Αντίστοιχες συζητήσεις για τις περιπτώσεις

$$x+y,\ xy,\ \frac{x}{y \neq 0},\ x, y \in \mathbb{R}$$

..., διάταξη, ...