Μονοτονία - Συνέπειες

Θεώρημα. Έστω $\{x_n\}$ αύξουσα.
Τότε υπάρχουν αποκλειστικα δυο περιπτωσεις

Περιπτωση 1: $\{x_n\}$ πανω φραγμενη

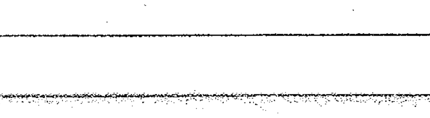
$$\iff \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$$

Περίπτωση 2: $\{x_n\}$ μη πάνω φραγμένη.

$$\iff \exists \lim x_n = +\infty$$

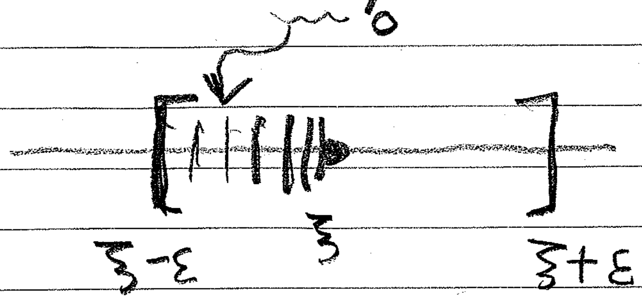
Αποδειξη - 1η περίπτωση: Αφου $\{x_n\}$ πανω φραγμενη, $\exists M \in \mathbb{R} : x_n \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Αρα το συνολο των πανω φραγματων της $\{x_n\}$ εχει ελαχιστο:

$$\xi = \sup\{x_n\}$$



δηλαδη, $\xi \geq x_n$, $\forall n$ και $\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \exists\, \eta_0 : x_{\eta_0} \in [\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon]$



Αλλα $x_{\eta_0} \le x_{\eta_0+1} \le x_{\eta_0+2} \le \cdots$, συνεπώς

$$x_\eta \in [\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon], \forall \eta \ge \eta_0 \, (\varepsilon>0)$$

ισοδυναμα:

$$\lim x_\eta = \xi$$

2η περίπτωση: Επειδη $\{x_\eta\}$ αυξουσα, αν η $\{x_\eta\}$ Δεν ειναι πανω φραγμενη θα υπαρχει μια "υπακολουθία" $\{x'_\eta\} \subset \{x_\eta\}$ με $\lim x'_\eta = +\infty \Leftrightarrow \forall M>0$ $\Rightarrow \exists\, \eta_0 \in \mathbb{N}$ με $M \le x'_\eta, \forall \eta \ge \eta_0$

Εστω $\bar{\eta}_0 \ge \eta_0$ με $x'_{\eta_0} < x_{\bar{\eta}_0}$. Λογω μονοτονίας της $\{x_\eta\}$ προκύπτει:

$\forall M>0 \Rightarrow \exists \overline{n_0}$:

$M \leq x_n, \forall n \geq \overline{n_0}$

το οποιο σημαινει οτι $\lim x_n = +\infty$

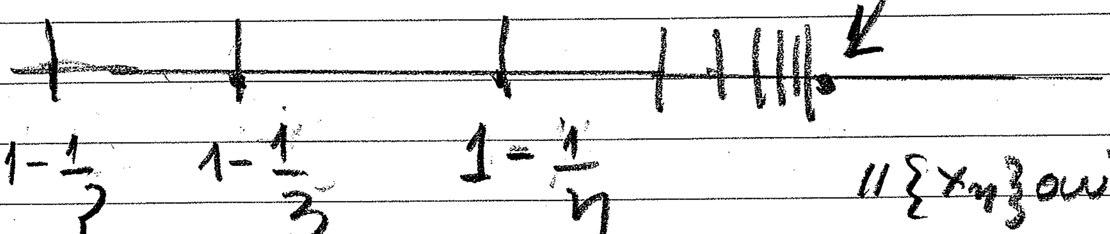
Ομοίως:

$\{x_n\}$ φθινουσα $\Rightarrow$

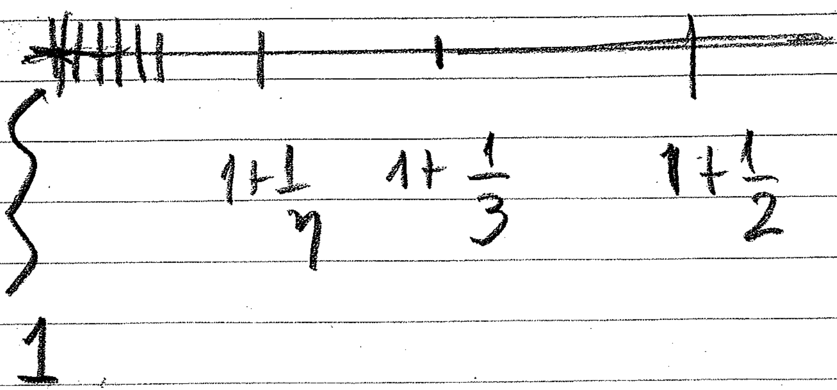
(1) $\{x_n\}$ κατω φραγμενη $\Leftrightarrow \exists \lim x_n \in \mathbb{R}$

(2) $\{x_n\}$ Μη κατω φραγμένη $\Leftrightarrow \lim x_n = -\infty$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

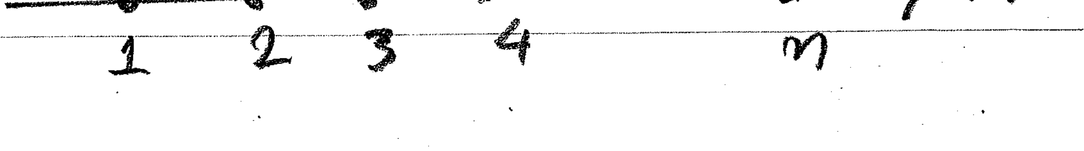


"$\{x_n\}$ αυξουσα + πανω φραγμενη"



"$\{x_n\}$ φθινουσα + κατω φραγμενη"

"$\{x_n\}$ αυξουσα + μη πανω φραγμ."



Ασκηση 1 (Ιδιότητα)

Αν $\{x_n\} \nearrow$ και εστω $\{x_\eta'\}$ μια ύπακολουθία της, δηλαδη υπάρχουν φυσικοί αριθμοί

$$0 < \rho_1 < \rho_2 \leq \cdots < \rho_\eta < \cdots, \ \rho_\eta \to +\infty :$$

$$x_\eta' = x_{\rho_\eta}, \ \eta = 1, 2, \ldots$$

τοτε, αν υπαρχει το $\omega = \lim x_\eta' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, επίσης υπαρχει το οριο τη's $\{x_n\}$ και ισούται με ω: $\lim x_\eta = \omega$

Απόδειξη:

Επειδη x_η αύξουσα, για καθε η υπαρχει ακεραιος $k_\eta > \eta$ με

$$x_\eta < x'_{k_\eta}$$

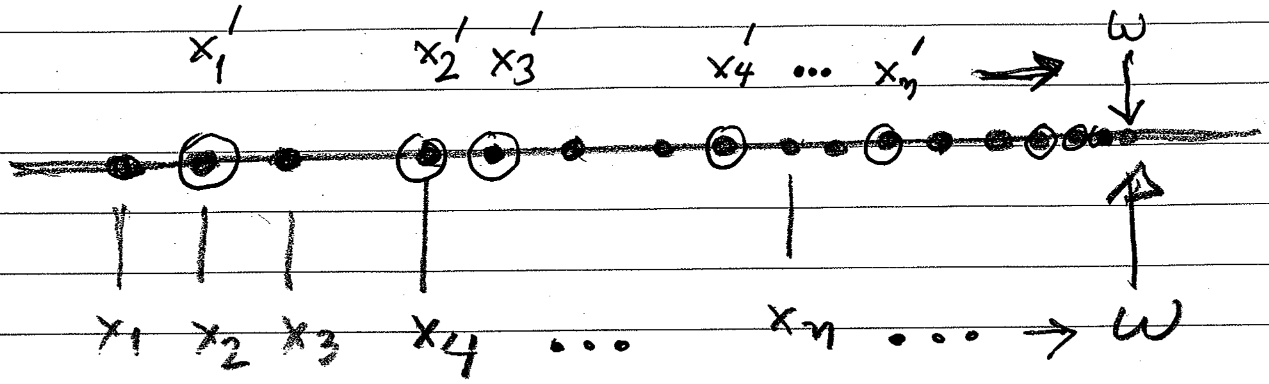
το οποίο συνεπάγεται $\exists \lim x_\eta \leq \lim x'_{k_\eta} = \omega$

Επίσης για καθε η υπαρχει ακεραιος $l_\eta \geq \eta$ με

$$x_\eta' < x_{l_\eta} \in \{x_n\}$$

αρα $\omega = \lim x_\eta' \leq \lim x_{l_\eta} \leq \lim x_\eta$, συνεπως $\omega \leq \lim x_\eta$ και επειδη $\lim x_\eta \leq \omega$ καταλήγουμε:

$$\omega = \lim x_\eta$$



Παραδειγμα

$\{a_1, b_1, b_2, a_3, b_3, b_4, b_5, a_4, b_6, b_7, b_8, b_9, a_5, \ldots\}$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8, \ldots$

Υποθεση: $x_n \nearrow$ και $\exists \lim a_n = \omega$

$\Rightarrow \lim x_n = \omega$

Ασκηση 7: Διερεύνηση σύγκλισης της

$\{a_n\}: a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n+a_n^2}$, $a_1 > 0$ δοθεν

Απαντηση: Επειδη $a_1 > 0 \Rightarrow a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Αρα η $\{a_n\}$ κατω φραγμενη (π.χ το μηδέν ειναι ενα κάτω φράγμα)

Επιπλέον ειναι φθίνουσα:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n+a_n^2} \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

συνεπως εχει οριο $a = \lim a_n \geq 0 \Rightarrow$

$$a = \lim a_{n+1} = \frac{\lim a_n}{1+\lim a_n+(\lim a_n)^2}$$

$$= a(1+a+a^2)^{-1}$$

$\Leftrightarrow a \in \{-1, 0\}$. Όμως $a=-1$ αποκλείεται (γιατι $a \geq 0$); απομενει οτι $a=0$.

Ασκηση-ιδιοτητα: Αν $a_n, b_n \nearrow$, $a_n \leq b_n$ και $\{b_n\}$ πανω φραγμενη $\Rightarrow$

$\exists \lim a_\eta$, $\lim b_\eta$ με $\lim a_\eta \leq \lim b_\eta$

Απαντηση: $\exists b = \lim b_\eta \in \mathbb{R}$ επειδή $b_\eta \nearrow$ και πανω φραγμενη. Το τελευταιο επίσης σημαινει ότι $\exists M \in \mathbb{R}$:

$$M \geq b_\eta, \forall \eta \text{ επαρκως μεγαλο}$$

$$\Rightarrow \quad M \geq b_\eta \geq a_\eta \quad ''$$

που σημαινει ότι επίσης $\{a_\eta\}$ πανω φραγμενη κ επειδη $a_\eta \nearrow$ προκυπτει

$$\exists \lim a_\eta \; (\leq \lim b_n)$$

Ασκηση 3: Δείξτε ότι $\frac{1}{\eta!} \leq \frac{1}{2^{\eta-1}}$ (επαγωγή)

και η ακολουθια

$$a_\eta = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{\eta!}$$

Εχει οριο $\in \mathbb{R}$.

Απαντηση: Παρατηρουμε ότι $a_\eta > 0$, $\nearrow$ και

$$\underbrace{\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{\eta!}}_{a_\eta} \le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \underbrace{1+a+a^2+\dots+a^{n-1}}_{b_\eta} \to \boxed{a=\frac{1}{2}} \leftarrow$$

$$= \frac{1-a^n}{1-a} \to \frac{1}{1-a} = 2$$

Αρα $a_\eta \le b_\eta$, a_η αυξουσα και επειδη $\{b_\eta\}$ συγκλινει $\Rightarrow$ $\{a_\eta\}$ επισης συγκλινει

Ασκηση 4: Αν $|a_\eta - b_\eta| \le \frac{1}{\eta}$, $a_\eta \nearrow$, $a_1 > 0$, τότε $\lim a_\eta = \lim b_\eta \in \{+\infty\} \cup \mathbb{R}^+$.

Απάντηση: Οριζουμε $\omega_\eta = a_\eta - b_\eta$. τοτε εχουμε $\omega_\eta \to 0$ και $b_\eta = a_\eta - \omega_\eta \to$

$\lim a_\eta - \lim \omega_\eta = \lim a_\eta \Rightarrow$

$$\lim b_\eta = \lim a_\eta \begin{cases} \in \mathbb{R}^+ \ (a_\eta \text{ πανω φ}) \\ +\infty \ (a_\eta \text{ μη πανω φ}) \end{cases}$$

Ασκηση 5: Διερευνηση συγκλισης

(a) $$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{1+x_n^3}, \quad x_1 \in (0,1)$$

(b) $$x_{n+1} = \frac{x_n^3}{-1+x_n^2}, \quad x_1 > 1.$$

(a) Με. επαγωγη διαπιστωνουμε οτι $x_n \downarrow$ και οτι $x_n \in (0,1)$ για καθε $n \in \mathbb{N}$

Πραγματι $x_1 \in (0,1)$ και αν $x_n \in (0,1)$ τοτε

$$0 < x_{n+1} = \underbrace{\frac{x_n^2}{1+x_n^3}}_{x_{n+1}} < x_n < 1$$

Αρα $\exists \lim x_n = \rho \in [0,1] \Rightarrow$

$$\lim x_{n+1} = \frac{(\lim x_n)^2}{1+(\lim x_n)^3} \Leftrightarrow$$

$$\rho(1+\rho^3) = \rho^2 \Rightarrow \rho = 0$$

(b) Με επαγωγη, διαπιστώνουμε οτι $x_n \nearrow$ και οτι $x_n > 1$, $n \in \mathbb{N}$. Πραγματι $x_1 > 1$ και εστω $x_n > 1$. Τοτε

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3}{x_n^2 - 1} > x_n > 1$$

Συνεπως $\exists \lim x_n = \rho \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$

Η περιπτωση $\rho \in \mathbb{R}^+$ αποκλειεται γιατι τοτε $\rho^3 = \rho\,(\rho^2 - 1) \Rightarrow \rho = 0$

Ομως, $x_1 > 1$ και επειδη $x_n \nearrow \Rightarrow$ $\rho = \lim x_n > 1$, άτοπο.

Αρα $\lim x_n = +\infty$

Ασκηση 6: Συγκλιση

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2+x_n}{x_n^2+1}, \quad x_1 \in (0,1).$$

Απαντηση: Εύκολα δείχνεται

$$0 < x_n < 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

αρα $\{x_n\}$ πανω φραγμενη. Επίσης

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2+x_n}{x_n^2+1} > x_n$$

αρα είναι αύξουσα $\Rightarrow \exists \rho = \lim x_n$

και $\rho \in [0,1] \Rightarrow$

$$\rho = \frac{\rho^2+\rho}{\rho^2+1} \Leftrightarrow \rho^2(\rho-1)=0 \Rightarrow \rho = 1 \text{ ή } 0$$

Η τιμή $\rho = 0$ αποκλείεται γιατί $x_n \nearrow$ επομενως $\rho = \lim x_n > x_1 > 0$. Καταληγουμε: $\lim x_n = 1$

Ασκηση 7: Εστω $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ συνεχής
με $f(0)=0$, $f(x)<x$ $\forall x>0$ και εστω

$$x_{n+1} = f(x_n),\ x_1>0$$

Διερευνηση σύγκλισης

Απ. $x_1>0$, $x_2=f(x_1)<x_1$, $x_3=f(x_2)<x_2$
..., $x_{n+1}=f(x_n)<x_n$, αρα $\{x_n\}$
φθίνουσα και φραγμένη $\Rightarrow \exists\, \rho$
$=\lim x_n$, $\rho\in[0,x_1)$ $\Rightarrow$

$$\rho = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) \overset{\text{συνέχεια της } f}{=} \boxed{f(\rho)}$$

δηλαδή $\rho = f(\rho) \le \rho$. Η περίπτωση $\rho>0$
αποκλείεται, γιατί τότε $\rho=f(\rho)<\rho$, άτοπο
Αρα $\rho=0$.

<u>Ασκηση</u> 8. Συγκλιση της $\{a_n\}$ με

$a_1 > 0$, $0 < a_{n+1} < 2 - \frac{1}{a_n}$

Απ. Λογω υποθεσης ειναι κατω φραγμενη

Επισης

$$a_{n+1} - a_n \le -\frac{(a_n-1)^2}{a_n},$$

αρα $\{a_n\}$ φθινουσα και επομενως

$\exists\ \rho = \lim a_n$, $\rho \geq 0$. Επικαλουμενοι

παλι την υποθεση εχουμε

$$\underbrace{\lim a_{n+1}}_{\rho} \le 2 - \frac{1}{\underbrace{\lim a_n}_{\rho}}$$

αρα $\rho \le 2 - \frac{1}{\rho} \iff \underbrace{\boxed{\rho = 1}}_{= \lim}$

Ο αριθμος e

$$e \overset{\text{ορ}}{=} \lim \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{a_n}^{n}$$

Η a_n ↗ + πανω φραγμένη (δείτε τις αποδείξεις απο βιβλίο) συνεπως υπαρχει το $\lim a_n$. Στη συνέχεια δείχνουμε την γνωστη ιδιότητα:

$$e^{a} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}, \quad a\in\mathbb{R}$$

Επικαλούμαστε τον ορισμό του ορίου μιας συναρτησης $f: A\to\mathbb{R}$ στο σημειο $\xi\in A\cup\{\pm\infty\}$:

Ορισμός $\lim_{x\to\xi} f(x) = m \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, άν

$$\forall x_n \to \xi \Rightarrow y_n = f(x_n) = m$$

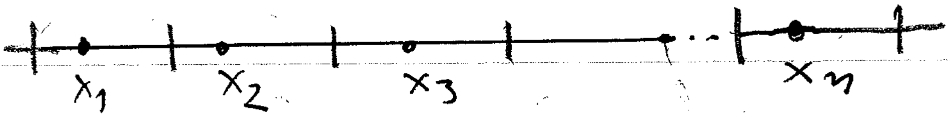
Στη συνεχεια δείχνουμε την ιδιοτητα

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}=e^{a},\ \forall a\in\mathbb{R}$$

Ισοδύναμα: $\forall x_\eta \to +\infty \Rightarrow y_\eta=\left(1+\frac{a}{x_\eta}\right)^{x_\eta}\to e^{a}$

Διακρινουμε 2 περιπτωσεις

{**1η** $a>0$} Παίρνουμε $x_\eta\to+\infty$



Χρησιμοποιουμε την γνωση ιδιοτητα: $\forall x\geq 0$

$\Rightarrow \eta=\eta(x)\in\mathbb{N}$ με $\eta\leq x<\eta+1$ και xβγ

$$\eta\leq x_\eta<\eta+1$$

Εχουμε:

$$\left(1+\frac{a}{x_\eta}\right)^{x_\eta}<\left(1+\frac{a}{x_\eta}\right)^{\eta+1}\leq\left(1+\frac{a}{\eta}\right)^{\eta+1}$$

$$\left(1+\frac{a}{\eta+1}\right)^{\eta}\leq\left(1+\frac{a}{\eta+1}\right)^{x_\eta}<\left(1+\frac{a}{x_\eta}\right)^{x_\eta}$$

$$\Rightarrow\ \left(1+\frac{a}{\eta+1}\right)^{\eta}\leq\left(1+\frac{a}{x_\eta}\right)^{x_\eta}\leq\left(1+\frac{a}{\eta}\right)^{\eta+1}\qquad(*)$$

Διακρινουμε **2** υποπεριπτώσεις

{1η υποπερίπτωση με $a=1$} τοτε η $*$ γραφεται

$$\left(1+\frac{1}{\eta+1}\right)^{\eta}\leq\left(1+\frac{1}{x_\eta}\right)^{x_\eta}\leq\left(1+\frac{1}{\eta}\right)^{\eta+1}\Leftrightarrow$$

$$\overset{\uparrow e}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}\overset{\uparrow 1}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}}$$

$$\leq \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \underset{\downarrow e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}\underset{\downarrow 1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} \Longrightarrow$$

Κριτηριο παρεμβολης

$$\lim\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to e \underset{\forall x_n\to\infty}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

{1η υποπεριπτωση $a>0, a\neq 1$} Τοτε

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} = \left(\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}}\right)^{a} \xrightarrow{\frac{x}{a}\to+\infty} e^{a}$$

προηγουμενη περίπτωση

{2η : $a<0$}

Γραφουμε: $1+\frac{a}{x} = \dfrac{1}{1+\frac{-a}{x+a}} \Rightarrow$

$(-a>0)$

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} = \dots$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{-a}{x+a}\right)^{x+a}}}_{\substack{\downarrow\, x+a\to+\infty \\ e^{-a}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{-a}{x+a}\right)^{-a}}}_{\substack{\downarrow\, x\to+\infty \\ 1}} \xrightarrow[x\to\infty]{} e^{+a}$$

{προηγούμενη ιδιότητα

Ασκηση 1 Οριο της ακολουθιας $(3+\frac{2}{n})^n$

$$\left(3+\frac{2}{n}\right)^n = \underbrace{3^n}_{\downarrow \, +\infty} \cdot \left(1+\frac{2/3}{n}\right)^n \to (+\infty)\, e^{2/3} = +\infty$$

Ασκηση 2 Οριο της ακολουθιας $\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$

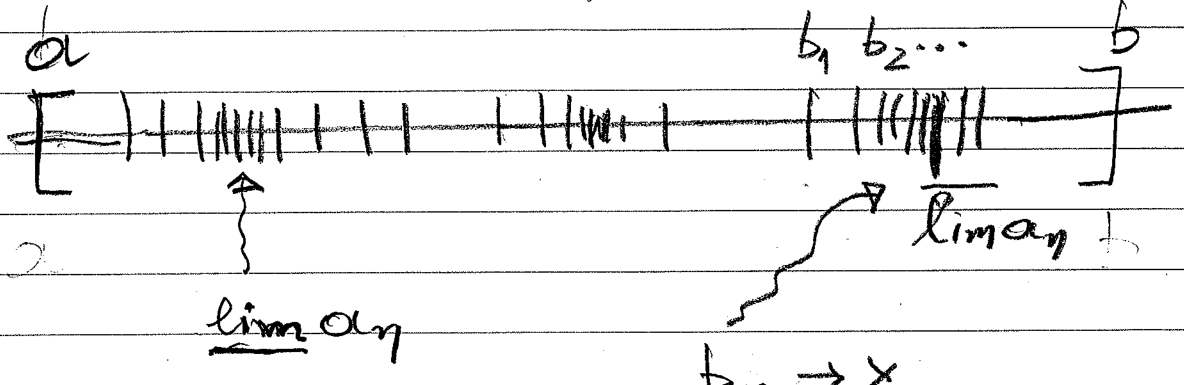
$$= \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\downarrow \, 0} \underbrace{\frac{(1+1/2n)^n}{(1+1/3n)}}_{\downarrow \, e^{1/2}/e^{1/3}} \to 0$$

Οριακα σημεία, Πανω κατω οριο

Θεώρημα Bolzano-Weiestrass (BW)

Εστω $\{a_n\}$ φραγμενη, δηλαδη $a_n \in [a,b]$ για καποια $a, b \in \mathbb{R}$. Τοτε η ακολουθια $\{a_n\}$ έχει οριακό σημειο $x \in [a,b]$, δηλαδή $\exists$ υπακολουθια $\{b_n\} \subset \{a_n\}$ τετοι ώστε:

$$x = \lim b_n$$



Αν Θ = συνολο ολων των οριακων σημείων της $\{a_n\}$ τοτε το Θ εχει μεγιστο στοιχειο το $\overline{\lim}\, a_n$ (ΠΑΝΩ ΟΡΙΟ) κ ελάχιστο στοιχειο το $\underline{\lim}\, a_n$ (ΚΑΤΩ ΟΡΙΟ)

Προφανώς

- $\underline{\lim}\{a_n\} \leq \overline{\lim}\{a_n\}$
- a_n συγκλινει στον αριθμο ω $\Longleftrightarrow$

$\omega = \overline{\lim}\{a_n\} = \underline{\lim}\{a_n\}$

- Εστω $\{a_n\}, \{b_n\}, \{x_n\}$ και εστω

$a_n \to a, \quad b_n \to b$ και

$a_n \leq x_n \leq b_n$

Τοτε

$$a \leq \underline{\lim} x_n \leq \overline{\lim} x_n \leq b$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (BW): Εστω $\underline{\Theta}_1$ το συνολο των σημειων $\omega \in \mathbb{R}$ με άπειρους όρους της ακολουθιας εκ δεξιων του. Το $\underline{\Theta}_1$ ειναι πανω φραγμενο. Το συνολο των πανω φραγματων εχει ελαχιστο συμφωνα με το γνωστο αξιωμα το αριθμο $M = \sup \underline{\Theta}$. Το M έχει επομενως "απειρίαν σημειων της ακολουθιας "κοντά" του, συνεπως M ειναι οριακο σημειο της $\{a_n\}$

Ισχυρισμος: M ειναι το μεγαλύτερο οριακο σημειο. Πραγματι, στην αντιθετη περίπτωση θα υπήρχε L οριακο $> M$. Εστω $\Delta = \frac{1}{2}(L+M)$ τοτε $\Delta > M$ και προφανως $\Delta \in \underline{\Theta}$, που σημαινει $\Delta \leq M (= \sup \underline{\Theta}) =$ ελαχιστο των πανω φραγμάτων του Ω. (λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη)

Πορισμα: Εστω $\{a_n\}$, $a_n>0$ και εστω $a_{n+1}/a_n \to \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ Τοτε

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \ell \quad \text{(KPITHRIO RIZAΣ)}$$

Αποδειξη: ΧΒΓ εστω $\ell > 0$. Λογω υποθεσης

$$\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists\, n_0=n_0(\varepsilon): \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-\ell\right| \le \varepsilon, \ \forall n \ge n_0$$

άρα:

$\forall \varepsilon>0 \Rightarrow n_0=n_0(\varepsilon):$

$$\left.\begin{aligned}
n=n_0 &: \ \ell-\varepsilon \le \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \le \ell+\varepsilon \\
n=n_0+1 &: \ \ell-\varepsilon \le \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \le \ell+\varepsilon \\
&\ \ \vdots \\
n=n_0+k &: \ \ell-\varepsilon \le \frac{a_{n_0+1+k}}{a_{n_0+k}} \le \ell+\varepsilon, \ k\in\mathbb{N}
\end{aligned}\right\} \rightarrow$$

Αφου $\ell>0$, επιλεγουμε $\varepsilon>0$: $\ell-\varepsilon>0$

$$(l-\varepsilon)^{k+1} \leq \frac{a_{n_0+1+k}}{a_{n_0}} \leq (l+\varepsilon)^{k+1} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} &(l-\varepsilon)^{(k+1/n_0+k+1)} a_{n_0}^{1/n_0+k+1} \\ &\leq (a_{n_0+k+1})^{\frac{1}{n_0+k+1}} \\ &\leq (l+\varepsilon)^{(k+1/n_0+k+1)} a_{n_0}^{1/n_0+k+1} \end{aligned} \right\} (\bigstar), \ \underset{\sim}{\forall k} \in \mathbb{N}$$

Λαμβανοντας υπ' οψη

$$\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{n} \to 1$$

και προηγουμενη ιδιότητα και λαμβανοντα το οριο για $k \to +\infty$ στην διπ/η ανισότητα $(\bigstar)$ έπεται:

$$(l-\varepsilon) \cdot 1 \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}$$

$$\leq (l+\varepsilon) \cdot 1, \ \underset{\sim}{\forall \varepsilon > 0} \ \underset{\sim}{\text{επαρκως}}$$

$\underset{\sim}{\text{μικρό}}$. Ισοδύναμα:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = l$$

Ασκηση 1 Ευρεση $\lim \eta\sqrt[\eta]{\frac{1}{\eta!}}$

$$\lim \eta\left(\frac{1}{\eta!}\right)^{1/\eta} = \lim\left(\underbrace{\frac{\eta^\eta}{\eta!}}_{b_\eta}\right)^{1/\eta}$$

$$= \lim \frac{(\eta+1)^{\eta+1}}{(\eta+1)!}\,\frac{\eta!}{\eta^\eta} = \left(1+\frac{1}{\eta}\right)^\eta \to e$$

Ασκηση 2 Ευρεση $\lim \eta\sqrt[\eta]{2/(\eta+3)!}$

$$\lim \eta\sqrt[\eta]{2/(\eta+3)!} = \lim\sqrt[\eta]{\underbrace{2\eta^\eta/(\eta+3)!}_{b_\eta}}$$

$$= \lim(b_{\eta+1}/b_\eta) = \lim \frac{2(\eta+1)^{\eta+1}}{(\eta+4)!}\,\frac{(\eta+3)!}{2\eta^\eta}$$

$$= \lim \underset{\downarrow \atop 1}{\left(\frac{\eta+1}{\eta+4}\right)}\;\underset{\downarrow \atop e}{\left(\frac{\eta+1}{\eta}\right)^\eta} = e$$

Ασκηση 3 Εστω α $\{a_\eta\}$ με $\lim a_\eta = \rho \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$

Ευρεση $\lim \sqrt[\eta]{\underbrace{a_1 a_2 \cdots a_\eta}_{b_\eta}}$.

$$\lim \sqrt[\eta]{b_\eta} = \lim(b_{\eta+1}/b_\eta) = \lim a_\eta = \rho$$

Ασκηση 4 Εύρεση ορίου

$$\lim\left(\underbrace{\frac{\eta^2+1}{\eta^2-1}}_{b_\eta}\right)^{1/\eta}$$

$$\lim b_\eta^{1/\eta} = \lim \frac{(\eta+1)^2+1}{(\eta+1)^2-1}\cdot\frac{\eta^2-1}{\eta^2+1} = 1$$

Ασκηση 5 Εύρεση ορίου

$$\lim\left(\underbrace{\frac{(\eta+2)^\eta}{\eta!}}_{b_\eta}\right)^{1/\eta}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_\eta} = \frac{(n+3)^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{(\eta+2)^n} = \left(1+\frac{1}{\eta+2}\right)^\eta \frac{(n+3)}{(n+1)}$$

$$= \underbrace{\left(1+\frac{1}{\eta+2}\right)^{n+2}}_{\downarrow\ e} \underbrace{\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{-2}}_{\downarrow} \underbrace{\frac{n+3}{n+1}}_{\downarrow\ 1} \to e \Rightarrow \lim b_n^{1/n} = e$$