$\left\{ \begin{array}{l} \text{Αναγκαίες κ ικανές συνθήκες για} \\ \text{ύπαρξη ορίου} \in \mathbb{R}\text{, κριτήριο Cauchy} \end{array} \right\}$

Εστω $\{a_n\}$, $a_n \in \mathbb{R}$

Συνθηκη Cauchy

$$\star \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \\ |a_n - a_m| \leq \varepsilon,\ \forall n, m \geq n_0 \ (\text{χβγ } n \geq m) \end{array} \right\}$$

<u>Θεωρημα</u>: Τα καλωθι ειναι ισοδύναμα:

(i) Η a_n εχει οριο $a \in \mathbb{R}$

(ii) καθε υπακολουθια $\{a'_n\} \subset \{a_n\}$ έχει το ίδιο οριο $a \in \mathbb{R}$.

(iii) $\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n$

(iv) Ισχυει η συνθήκη Cauchy.

Αποδειξη (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii), αφήνονται στον αναγνώστη.

(i) $\Rightarrow$ (iv) Απο υπόθεση:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \\ |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n \geq n_0 \end{array} \right\} \xRightarrow{\forall n \geq m \geq n_0}$$

$|a_n - a_m|$

$= |a_n - a + a - a_m|$

$\leq |a_n - a| + |a - a_m|$

$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall n \geq m \geq n_0$ (Cauchy)

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Απο υπόθεση (Cauchy)

$\exists n_0 : |a_n - a_m| \leq \varepsilon, \forall n \geq m \geq n_0 \overset{m=n_0}{\Rightarrow}$

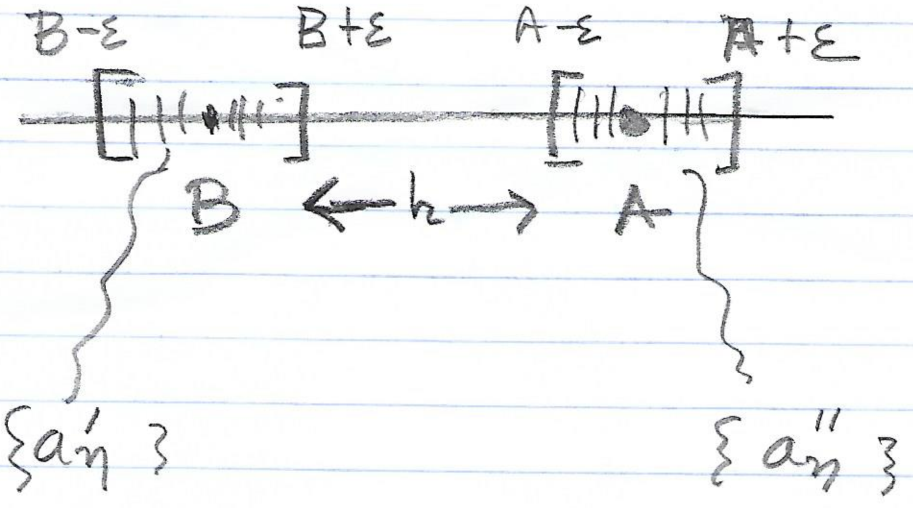
$|a_n - a_{n_0}| \leq \varepsilon, \forall n \geq n_0 \Rightarrow$

$a_{n_0} - \varepsilon \leq a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon, \forall n \geq n_0$

Αρα η $\{a_n\}$ ειναι φραγμενη (κατω + πάνω) συνεπως λογω BW

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists A = \overline{\lim}\, \{a_n\} \\ \exists B = \underline{\lim}\, \{b_n\} \end{array} \quad \text{με } A \geq B \right\}$$

Δειχνουμε $A = B$. Στην αντίθετη περίπτωση $B < A$ και επομενως για ε επαρκως μικρο (παρε $\varepsilon < (A-B)/2$)



δηλαδη για n επαρκως μεγαλα

(★) $|a''_n - a'_n| \geq h = (A-\varepsilon)-(B+\varepsilon) > 0$

ενω απο υποθεση (Cauchy):

$$\exists\, n_0 = n_0(h) \in \mathbb{N}$$

(★★) $|a''_n - a'_n| < h$

για καθε $n \geq n_0$ επαρκως μεγαλα

η οποια αντιβαινει την ★.

Συμπερασμα $A=B$

Ασκηση 1

Δειχνουμε οτι η $\{a_n\}$, $a_n \geq 0$ συγκλινει δεδομενου οτι

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2^n}$$

Απαντηση $\forall n, k \in \mathbb{N}$, (χβγ $n \geq k$) εχουμε

$$|a_n - a_k| = |a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-2} + \cdots + a_{k+1} - a_k|$$

$$\leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \cdots + |a_{k+1} - a_k|$$

$$\leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \cdots + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^k}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1\right)$$

$$= \frac{1}{2^k}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}}{1-\frac{1}{2}}\right] \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

Παρε $\varepsilon > 0$ αυθαιρετο και παρε $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}$: $\frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon$, $\forall k = n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0$ με $\underbrace{|a_n - a_k| \leq \varepsilon, \forall n \geq k \geq n_0}_{\text{Cauchy}}$

Ασκηση II Αποκλιση της

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Πραγματι, παρε $n > k$. Εχουμε

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$a_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}$$

$$|a_n - a_k| = a_n - a_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$\geq \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n-k} = \frac{(n-k)}{n} \overset{n=2k}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow |a_{2k} - a_k| \geq \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}, \ \forall k \text{ επαρκως μεγαλο}$$

Αρα <u>δεν</u> ισχυει το κρ. Cauchy και επομενως η a_n <u>δεν</u> συγκλινει.

Παρατηρηση. Επειδη $a_n \nearrow$, η μη συγκλιση ισοδυναμει οτι

- a_n <u>δεν</u> ειναι πάνω φραγμενη
- $\lim a_n = +\infty$.