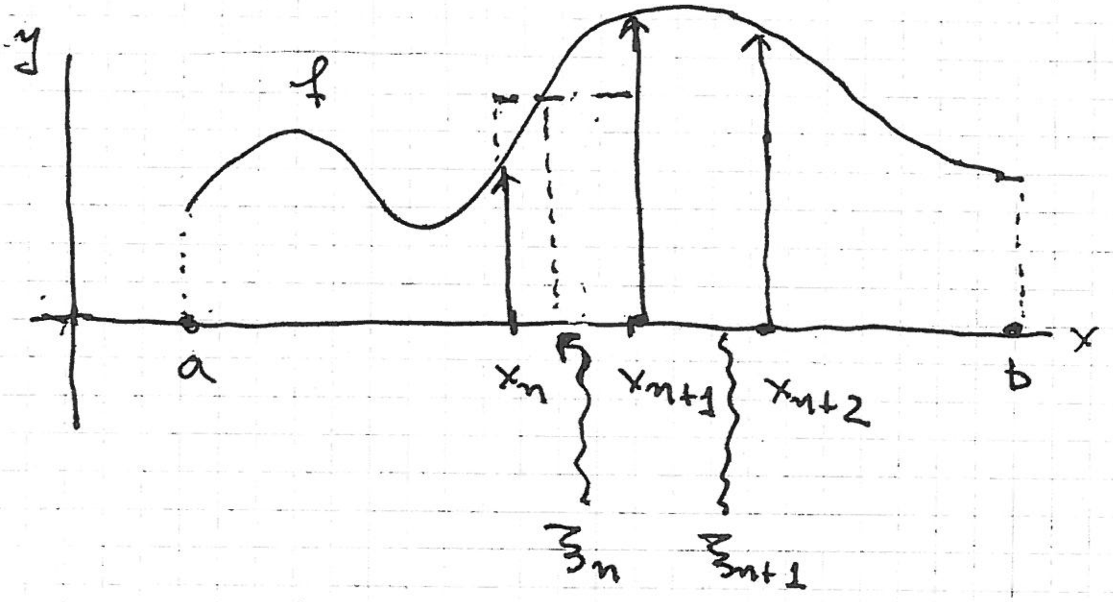
Ολοκλήρωμα ("ορισμένο")

Στοιχειώδη:



$x_{n+1} - x_n \leq \varepsilon$ (λεπτότητα)

"f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$":

$$\sum (x_{n+1}-x_n) f(\xi_n) \xrightarrow[\forall \varepsilon \to 0]{} I \in \mathbb{R}$$

και για κάθε επιλογή των ξ_n

$$I \overset{\text{σύμβολο}}{=} \int_a^b f(x)\,dx \quad \left(\text{απλούστερα } \int_a^b f\right)$$

Θεώρημα: Αν $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη κ' τμηματικώς συνεχής $\Rightarrow$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

ΜΕΡΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Αν $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρωσιμες κ' $k, \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow$

- $$\int_a^b kf + \ell g = k\int_a^b f + \ell \int_a^b g$$

(γραμμικοτητα)

Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρωσιμη κ' $x \in [a,b]$

- $$\int_a^x f + \int_x^b f = \int_a^b f$$

Αν $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρωσιμες κ' $f(x) \leq g(x)$ για καθε $x \in [a,b] \Rightarrow$

- $$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη

- $$\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$

- $$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

$M = \max f$ στο $[a,b]$

$m = \min f$ " "

- $$\exists\, \xi \in (a,b) : \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής και

$$x := x(t),\ t\in[c,d] \xrightarrow{x(\cdot)} [a,b]$$

συνεχώς παραγωγίσιμη $\Rightarrow$

- $$\int_{a=x(c)}^{b=x(d)} f(x)\,dx = \int_c^d f(x(t))\,\overset{(1)}{x}(t)\,dt$$

"Αλλαγή μεταβλητής ολοκλήρωσης"

Αν $f:[a,b]$ συνεχής $\Rightarrow$

- $$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(s)\,ds\right) = f(x)$$

Η έννοια της "παράγουσας" ή "αορίστου ολοκληρώματος (συμβολισμός: $\int f\,dx$, απλούστερα $\int f$)

Δοθείσης $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ λέμε ότι η $\Phi:[a,b]$ είναι παράγουσα της f, αν

$$\overset{(1)}{\Phi}(x) = f(x),\ x\in[a,b]$$

ή εναλλακτικά γράφουμε

$$\frac{d}{dx}\left(\int f\right) = f$$

καθε ζευγάρι Φ_1, Φ_2 παραγουσων της ίδιας f, ικανοποιει

$$\Phi_2(x) - \Phi_1(x) = const, \quad x \in [a, b]$$

ισοδυναμα

$$\Phi_2^{(1)}(x) = \Phi_1^{(1)}(x), \quad x \in [a, b]$$

Εστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής τοτε μια παρά-γουσα δίνεται:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(s)\,ds$$

$\Rightarrow$ Προφανως, αν $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη

$$\int_a^x \varphi^{(1)}(s)\,ds = \varphi(x) - \varphi(a)$$

Επομένως εχουμε τον τύπο υπολογισμου

$$\int_a^b f(s)\,ds = \Phi(b) - \Phi(a) \overset{\text{σύντομα}}{=} \left[\Phi(x)\right]_a^b$$

αν γνωρίζουμε οτι Φ είναι μια οποιαδηποτε παραγουσα της f.

$$e^x \to \int e^x = e^x + \text{const}$$

$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$$

$$\sin x \to \int \sin x = -\cos x + \text{const}$$

$$\int_a^b \sin x\, dx = -\cos b + \cos a$$

$$\cos x \to \int \cos x = \sin x + \text{const}$$

$$\int_a^b \cos x\, dx = \sin b - \sin a$$

$$t^\sigma, \sigma \neq -1 \to \int t^\sigma = \frac{t^{\sigma+1}}{\sigma+1} + \text{Const}$$

$$\int_a^b t^\sigma dt = \frac{b^{\sigma+1}}{\sigma+1} - \frac{a^{\sigma+1}}{\sigma+1}$$

$$1/t \to \int \frac{1}{t} = \ln t + \text{const}$$

$$\int_{a>0}^b \frac{1}{t} dt = \ln \frac{b}{a}$$

Παράγουσα της xe^x:

$$(xe^x)' = e^x + xe^x \Rightarrow$$

$$\int_c^x (se^s)' ds = \int_c^x e^s ds + \int_c^x se^s ds \Rightarrow$$

$$xe^x - ce^c = e^x - e^c + \int_c^x se^s ds \Rightarrow$$

$$\int_c^x se^s ds = xe^x - e^x - ce^c + e^c \Rightarrow$$

$$\int xe^x = xe^x \cancel{+ \text{const}} - e^x + \text{const.}$$

Παραγουσα της $x\sin x$:

$$(x\cos x)' = \cos x - x\sin x \Rightarrow$$

$$\int_c^x (s\cos(s))' ds = \int_c^x \cos(s) ds - \int_c^x s\sin(s) ds \Rightarrow$$

$$x\cos x - c\cos(c) = \sin x - \sin c - \int_c^x s\sin(s) ds \Rightarrow$$

$$\int_c^x s\sin(s) ds = -x\cos x + \sin x$$
$$+ c\cos(c) - \sin(c) \Rightarrow$$

$$\int x\sin x = -x\cos x + \sin x + \text{const.}$$

Γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_p^{+\infty} f(x)\,dx$, $p\in\mathbb{R}$

Ορισμός: $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_p^{M} f(x)\,dx$

Παράδειγμα 1: $\displaystyle\int_p^{+\infty} e^{lx}\,dx$, $l\neq 0$

Έχουμε $\displaystyle\int_p^{M} e^{lx}\,dx = \left[\frac{e^{lx}}{l}\right]_p^{M}$

$$= \frac{e^{lM}}{l} - \frac{e^{lp}}{l}, \text{ Άρα}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{lx}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\frac{1}{l}\left(e^{lM}-e^{lp}\right)$$

$$= \begin{cases} -l^{-1}e^{lp}, & \text{αν } l<0 \\ +\infty, & \text{αν } l>0 \end{cases}$$

Παραδειγματα: $\displaystyle\int_p^{+\infty} x e^{lx}\,dx \,, \quad l \neq 0$

$$(xe^{lx})' = e^{lx} + xle^{lx} \Rightarrow$$

$$\int_p^M (xe^{lx})'\,dx = \int_p^M e^{lx}\,dx + l\int_p^M xe^{lx}\,dx \Rightarrow$$

$$Me^{lM} - pe^{lp} = \left[\frac{e^{lx}}{l}\right]_p^M + l\int_p^M xe^{lx}\,dx \Rightarrow$$

$$\int_p^M xe^{lx}\,dx = \frac{1}{l}\left(Me^{lM} - pe^{lp}\right)$$

$$-\frac{e^{lM}}{l^2} + \frac{e^{lp}}{l^2} \Rightarrow$$

$$\int_p^{+\infty} xe^{lx}\,dx = \lim_{M \to +\infty} \int_p^M xe^{lx}\,dx$$

$$= \begin{cases} -pl^{-1}e^{lp} + l^{-2}e^{lp}, & l < 0 \\ +\infty, & l > 0 \end{cases}$$

Παράδειγμα 3: $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^a}\,dx$,

Υπολογίζουμε το $\int_1^{M} \frac{\ln x}{x^a}\,dx$

Αλλαγή μεταβλητής $\omega = \ln x$, $x \in [1, M]$,

$\omega \in [\ln 1, \ln M]$, $x = e^{\omega} \Rightarrow$

$$x^{(1)}(\omega) = e^{\omega}$$

Άρα:

$$\int_1^{M} \frac{\ln x}{x^a}\,dx = \int_0^{\ln M} \frac{\ln(x(\omega))}{e^{a\omega}}\, x^{(1)}(\omega)\,d\omega$$

$$= \int_0^{\ln M} \frac{\ln(e^{\omega})}{e^{a\omega}}\, e^{\omega}\,d\omega$$

$$= \int_0^{\ln M} \omega e^{\overbrace{(1-a)}^{\ell}\omega}\,d\omega \longrightarrow$$

$\rightarrow$ Προηγούμενη περίπτωση με $\ell = 1-a \Rightarrow$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^a}\,dx = \begin{cases} * \in \mathbb{R}, & \text{αν } a > 1 \\ +\infty, & \text{αν } a < 1 \end{cases}$$

Τέλος, περίπτωση $a=1$. Τότε

$$\int_1^M \frac{\ln x}{x}\,dx = \cdots = \int_0^{\ln M} \omega\, d\omega \underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

άρα $\int_1^{+\infty} = +\infty$.

Παράδειγμα 4: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a}$, $a>0$

Έχουμε για $a>0$, $a\neq 1$:

$$\int_1^M \frac{dx}{x^a} = \int_1^M \left(\frac{x^{-a+1}}{-a+1}\right)' dx$$

$$= \frac{M^{-a+1}}{-a+1} - \frac{1}{-a+1}$$

$$\underset{M\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{1}{a-1}, & \text{αν } a>1 \\ +\infty, & \text{αν } a<1 \end{cases}$$

Τέλος για $a=1$; $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{M\to+\infty} \ln M = +\infty$.

Ολοκληρωτικό κριτήριο Σύγκλισης σειράς

Θεώρημα. Έστω $S: a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots,\ a_n \geq 0$

και υπάρχει $f:[p,+\infty)\to \mathbb{R}^+$, $p\geq 0$ συνεχής, φθίνουσα, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ με

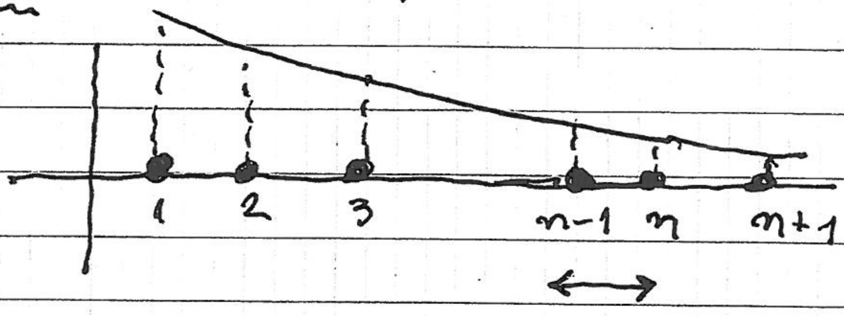
$$a_n = f(n),\ n=1,2,3.. \qquad (1)$$

Τότε ισχύουν οι συνεπαγωγές:

- $\exists \lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x f(s)\,ds = \int_1^{+\infty} f(s)\,ds \Rightarrow \sum a_n < +\infty \qquad (2)$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^{x} f(s)\,ds = \int_1^{+\infty} f(s)\,ds = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty \qquad (3)$

Απόδειξη ~~Χβγ~~ παρε $p=1$



$$I_n = \int_1^n f(s)\,ds = \int_1^2 f(s)\,ds + \int_2^3 f(s)\,ds + \cdots + \int_{n-1}^{n} f(s)\,ds$$

Επειδή $f\downarrow$

$$\begin{aligned} I_n &\geq (2-1)f(2)+(3-2)f(3)+\cdots+(n-n+1)f(n) \\ &= f(2)+f(3)+\cdots+f(n) \\ &= a_2+a_3+\cdots+a_n \end{aligned} \qquad (4)$$

$$I_\eta \leq (2-1)f(1)+(3-2)f(2)+\cdots+(\eta-\eta+1)f(\eta-1)$$

$$= f(1)+f(2)+\cdots+f(\eta-1)$$

$$= a_1+a_2+\cdots+a_{\eta-1} \qquad (5)$$

Αν $\int_0^{+\infty}$ συγκλίνει $\Rightarrow I_\eta = \int_1^{\eta(\to+\infty)} f(s)ds$ συγκλίνει

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} a_2+a_3+\cdots+a_\eta+\cdots < +\infty$$

Αν $\int_0^{\infty} = +\infty \Rightarrow \lim I_\eta = +\infty \overset{(5)}{\Rightarrow}$

$$a_1+a_2+\cdots+a_\eta+\cdots = +\infty$$

<u>Σημείωση</u>

Ισχύουν κ οι αντίστροφες συνεπαγωγές των (2), (3)

Για παράδειγμα, αν $\sum a_\eta < +\infty$, τότε λόγω (5) $\exists \lim\limits_{N\to+\infty} \int_1^N f(s)ds \in \mathbb{R}$. Επειδή f παίρνει θετικές τιμές, η τελευταία συνεπάγεται ότι για κάθε $x_\eta \to +\infty$ $\lim \int_1^{x_\eta} f(s)ds = \int_1^{\infty} f(s)ds$ που σημαίνει

$$\lim \int_1^{\infty} f(s)ds < +\infty$$

Παράδειγμα 1 (βλέπε προηγούμενο "Παράδειγμα 1")

Σύγκλιση της σειράς

$$\sum e^{-2n}$$

Αν $f = e^{-2x} \Rightarrow f \downarrow_0$ με $\int_1^{\infty} e^{-2x}dx < +\infty$

άρα η σειρά $\sum e^{-2n} = \sum f(n)$ συγκλίνει

Παράδειγμα 2 (βλέπε προηγούμενο "Παράδειγμα 2")

Σύγκλιση της σειράς

$$\sum n e^{-n}$$

Αν $f = e^{-x}x \Rightarrow f \downarrow_0$ για $x>1$ με $\int_1 e^{-x} x\,dx < +\infty$

άρα η σειρά $\sum n e^{-n} = \sum f(n)$ συγκλίνει

Παράδειγμα 3 (βλέπε προηγούμενο "Παράδειγμα 3")

Σύγκλιση της σειράς

$$\sum \frac{\ln(n)}{n^a}, \quad a>0$$

Αν $f = (\ln x)/x^a, (x>0) \Rightarrow f \downarrow_0 (x>0)$ για $x>0$ μακρυά απ' το μηδέν (Δείξτε το παίρνοντας 1η παράγωγο) κ' $\int_1^{\infty} (\ln x)/x^a\,dx \in \mathbb{R}$, αν $a>1$ $\Rightarrow$ σύγκλιση της σειράς κ' $\int_1^{\infty} (\ln x)/x^a\,dx = +\infty$, αν $a \le 1$ $\Rightarrow$ απόκλιση της σειράς.

Προηγούμενο

Παράδειγμα 4 (βλέπε "Παράδειγμα 4")

Σύγκλιση της

$$\sum \frac{1}{n^a}, \quad a>0$$

Ομοίως θέτοντας $f=1/x^a$, $x>0$ καταλήγουμε

$$\sum \frac{1}{n^a} < +\infty, \quad a>1$$

$$\sum \frac{1}{n^a} = +\infty, \quad a\in(0,1)$$