ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
Λύσεις του 3ου φυλλαδίου ασκήσεων

Ασκηση 1 (Η αρχή της μεταφοράς). *Να δείξετε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) στο πεδίο ορισμού της f με $\lim x_n = x_0$, ισχύει $\lim f(x_n) = f(x_0)$.*

Λύση. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x_0 και (x_n) στο πεδίο ορισμού της f με $\lim x_n = x_0$. Αν $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε x στο πεδίο ορισμού της f με $|x - x_0| < \delta$ ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Αφού $\lim x_n = x_0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $|x_n - x_0| < \delta$, για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$, για κάθε $n \geq n_0$ και συνεπώς $\lim f(x_n) = f(x_0)$.

Αντίστροφα έστω ότι για κάθε ακολουθία (x_n) στο πεδίο ορισμού της f με $\lim x_n = x_0$, ισχύει $\lim f(x_n) = f(x_0)$ και η f δεν είναι συνεχής στο x_0. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να υπάρχει x_n στο πεδίο ορισμού της f με $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ και $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, δηλαδή $\lim x_n = x_0$ και $\lim f(x_n) \neq f(x_0)$ το οποίο είναι άτοπο. Αρα η f είναι συνεχής στο x_0. □

Ασκηση 2. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $f(q) = 0$, για κάθε ρητό αριθμό $q \in (\alpha, \beta)$. Δείξτε ότι η $f(x) = 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.*
(Υπόδ: χρησιμοποιήστε την πυκνότητα των ρητών και την αρχή της μεταφοράς)

Λύση. Έστω $x \in (\alpha, \beta)$. Τότε λόγω της πυκνότητας των ρητών θα υπάρχει ακολουθία (q_n) με $q_\nu \in \mathbb{Q}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$\lim q_n = x\,.$$

Όμως

$$\lim f(q_n) = 0$$

και συνεπώς σύμφωνα με την Αρχή της μεταφοράς και τη συνέχεια της f θα έχουμε ότι $f(x) = 0$. □

Ασκηση 3. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και φραγμένη. Να δείξετε ότι η εξίσωση*

$$f(x) = x$$

έχει λύση στο $\mathbb{R}$.

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$. Αφού η f είναι φραγμένη θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $x_1 < f(x)$ και $x_2 > f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε $g(x_1) > 0$, $g(x_2) < 0$ και το συμπέρασμα προκύπτει από το Θεώρημα Bolzano. □

Ασκηση 4. *Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ καλείται Lipschitz, εαν υπάρχει σταθερά $L > 0$, τέτοια ώστε*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|\,, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Δείξτε ότι αν η συνάρτηση f είναι Lipschitz, τότε η f είναι συνεχής.

Λύση. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{L}$ έχουμε ότι

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < \varepsilon$$

και συνεπώς η f είναι συνεχής στο x_0. □

Ασκηση 5. *Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε*

$$|f(x) - f(y)| \leq c(x - y)^2, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Λύση. Από την υπόθεση έχουμε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x \neq y$ έχουμε ότι

$$|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}| \leq c|x - y|$$

και συνεπώς από το κριτήριο παρεμβολής η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f'(x) = 0$. Αρα η f είναι σταθερή. □

Ασκηση 6. *Δείξτε ότι*

(ι) $\sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$, *για κάθε* $x \in [-1, 1]$.

(ιι) $\arccos \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2} = 2\arctan x$, *για κάθε* $x \geq 0$.

Λύση.

(ι) Έχουμε ότι

$$\sin(2\arcsin x) = 2\sin\arcsin x \cos\arcsin x = 2x\sqrt{1 - (\sin\arcsin x)^2} = 2x\sqrt{1 - x^2}\,,$$

για κάθε $x \in [-1, 1]$.

(ιι) Η συνάρτηση arccos είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και συνεπώς η συνάρτηση

$$f(x) = \arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \neq 0$. Έχουμε λοιπόν για κάθε $x > 0$

$$\begin{aligned} (\arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2})' &= \frac{-1}{\sqrt{1 - (\frac{1 - x^2}{1 + x^2})^2}}(\frac{1 - x^2}{1 + x^2})' \\ &= \frac{2}{1 + x^2} \\ &= (2\arctan x)'\,. \end{aligned}$$

Συνεπώς υπάρχει σταθερά c, τέτοια ώστε για κάθε $x > 0$ να έχουμε ότι

$$\arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = 2\arctan x + c\,.$$

Θέτοντας $x = 1$ στην παραπάνω σχέση βρίσκουμε ότι $c = 0$. Τέλος η ισότητα προφανώς ισχύει και για $x = 0$ και συνεπώς

$$\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \arctan x, \text{ για κάθε } x \geq 0 \,.$$

$\square$

Ασκηση 7. *Χρησιμοποιώντας γραμμικοποίηση να υπολογίσετε μία προσεγγιστική τιμή για τους αριθμούς* $(1,0002)^{50}$ *και* $\sqrt[3]{1,009}$.

Λύση. (ι) Η γραμμικοποίηση της $f(x) = (1+x)^{50}$, γύρω από το $x_0 = 0$ είναι

$$L(x) = 1 + 50x \,.$$

Επομένως

$$(1,0002)^{50} = f(0,0002) \approx L(0,0002) = 1,01 \,.$$

(ιι) Αντίστοιχα η γραμμικοποίηση της $f(x) = (1+x)^{1/3}$, γύρω από το $x_0 = 0$ είναι

$$L(x) = 1 + 1/3x \,.$$

Επομένως

$$\sqrt[3]{1,009} = f(0,009) \approx L(0,009) = 1,003 \,.$$

$\square$

Ασκηση 8. *Χρησιμοποιώντας γραμμικοποίηση να υπολογίσετε μία προσεγγιστική τιμή για τον αριθμό* $\tan 42°$.

Λύση. Γραμμικοποιούμε την $f(x) = \tan x$ στο $x_0 = \frac{\pi}{4}$ και έχουμε

$$L(x) = f(\frac{\pi}{4}) + f'(\frac{\pi}{4})(x - \frac{\pi}{4}) \,.$$

Η γωνία $42°$ σε rad είναι $\frac{7\pi}{30}$. Οπότε

$$\tan 42° \approx L(\frac{7\pi}{30}) = 1 + 2(-\frac{\pi}{60}) = \frac{30-\pi}{30} \,.$$