(I) ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ - ΣΕΙΡΕΣ ...

... ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ...

(1) Αν $a_\eta \to 0$ δείχνουμε ότι $a_\eta^{1/3} \to 0$

Πράγματι, αφού $a_\eta \to 0$, $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$ με

$|a_\eta| \leq \varepsilon^3, \forall \eta \geq n_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon)$ με

$|a_\eta^{1/3} - 0| = |a_\eta|^{1/3} \leq (\varepsilon^3)^{1/3} = \varepsilon \Rightarrow a_\eta^{1/3} \to 0$

(2) Σύγκλιση της $a_\eta = (\sqrt{n+1} - \sqrt{\eta}) / \sqrt{n+1} + \sqrt{\eta}$

Γράφουμε $a_\eta = (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{\eta}) / (\sqrt{\eta+1} + \sqrt{\eta})^2$

$= \eta+1-\eta / 2n+1 + 2\sqrt{n+1}\sqrt{\eta}$

$= 1 / 2n+1 + 2\sqrt{n+1}\sqrt{\eta} \to 0$

(3) Εύρεση ορίου της

$$a_\eta = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{\eta}}$$

Προφανώς $a_\eta > \eta \frac{1}{\sqrt{\eta}} = \sqrt{\eta} \Rightarrow a_\eta \to +\infty$.

(4) Αν $\{a_\eta\} \nearrow$ με

$$a_{2\eta} - a_\eta \leq \frac{1}{\eta}, \eta \in \mathbb{N} \qquad *$$

δείχνουμε ότι $\{a_\eta\}$ συγκλίνει.

2

Απο την υποθεση, θετοντας

$n = 2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{k-1}$

προκυπτει:

$\cancel{a_2} - a_1 \leq 1$

$\cancel{a_4} - \cancel{a_2} \leq \frac{1}{2}$

$\cancel{a_8} - \cancel{a_4} \leq \frac{1}{4}$

$-\cancel{a_8}$ ⋮

$a_{2^k} - a_{2^{k-1}} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$

$$\Downarrow$$

$$a_{2^k} - a_1 \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$= 1 + p + p^2 + \cdots + p^{k-1} \Big|_{p=1/2} = \frac{1-p^k}{1-p}\Big|_{p=1/2} = 2 - \frac{1}{2^{k-1}} < 2$$

αρα $a_{2^k} \leq a_1 + 2$, $\forall k \in \mathbb{N}$, δηλαδη $\{a_{2^k}\}$ (πανω) φραγμένη υπακολουθία της $\{a_n\}$ η οποία επίσης είναι αύξουσα $\overset{\bigstar}{\Rightarrow}$ $\{a_n\}$ συγκλίνει.

★ Αποδείξτε την παραπάνω } συνεπαγωγή

(5) Αν $a_{n+1} - a_n \leq \frac{1}{n^2}, a_n \nearrow \Rightarrow$ Η $\{a_n\}$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$:

Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} a_2 - a_1 &\leq \frac{1}{1^2} \\ a_3 - a_2 &\leq \frac{1}{2^2} \\ &\vdots \\ a_{n+1} - a_n &\leq \frac{1}{n^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_{n+1} < a_1 + \underbrace{\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}}_{\sum \frac{1}{n^2} < +\infty}$$

Άρα $\{a_n\}$ πάνω φραγμένη + αύξουσα $\Rightarrow \exists \lim a_n \in \mathbb{R}$

(6). Αν $a_{n+1} - a_n > \frac{1}{n} \Rightarrow \{a_n\}$ αποκλίνει:

$$\left.\begin{aligned} a_2 - a_1 &> \frac{1}{1} \\ a_3 - a_2 &> \frac{1}{2} \\ &\vdots \\ a_{n+1} - a_n &> \frac{1}{n} \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_{n+1} > a_1 + \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}_{\sum \frac{1}{n} = +\infty}$$

Άρα $a_n \to +\infty$.

(7). Σύγκλιση $\sum n^2 e^{-n}$. Εναλλακτικοί τρόποι επίλυσης:

→ (1) κριτήριο λόγου: $a_n = n^2 e^{-n} \Rightarrow$

$$a_{n+1} / a_n = (n+1)^2 e^{-n-1} / n^2 e^{-n} \to e^{-1} < 1 \quad \checkmark \text{ συγκλίνει}$$

→ (2) κριτήριο ρίζας $\sqrt[n]{a_n} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 e^{-1} \to e^{-1} < 1 \quad \checkmark$ ''

$\rightarrow$ 3 Σύγκριση με $b_n = e^{-n/2}$:

$$\frac{a_n}{b_n} = n^2 e^{-n/2} \to 0 \text{ και επειδή } \sum e^{-n/2} < +\infty$$

$$\Rightarrow \sum n^2 e^{-n} < +\infty \Rightarrow \text{σύγκλιση}$$

$\rightarrow$ 4 Ολοκληρωτικό κριτήριο: $f(x) = x^2 e^{-x}$, φθίνουσα $x \geq \mu$ (προσδιορίστε το μ). Υπολογίστε

$$\int_{\mu}^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty \Rightarrow \text{σύγκλιση } \sum n^2 e^{-n}$$

Υπόδειξη $(x^2 e^{-x})' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x}$

$$\Rightarrow \int x^2 e^{-x}\,dx = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x} + \text{const.} \qquad (a)$$

και $(xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x} \Rightarrow$

$$\int xe^{-x} = -xe^{-x} + e^{-x} + \text{const} \qquad (b)$$

$$(a),(b) \Rightarrow \int x^2 e^{-x}\,dx = \cdots$$

$$\cdots \Rightarrow \int_{\mu}^{+\infty} x^2 e^{-x}\,dx = \cdots$$

(8) Δείχνουμε πως, αν $\{a_n\}, \{b_n\} \subset [0,1]$ και ικανοποιείται

$$\lim a_n b_n = 1$$

τότε $\lim a_n = \lim b_n = 1$

Πράγματι, από τις υποθέσεις:

$$\underbrace{0 \leq a_n b_n}_{\downarrow 1} \leq a_n \leq \underbrace{1}_{\downarrow 1} \Rightarrow \lim a_n = 1$$

$$\underbrace{0 \leq a_n b_n}_{\downarrow 1} \leq b_n \leq \underbrace{1}_{\downarrow 1} \Rightarrow \lim b_n = 1$$

Αν $k \in (0,1)$ και $\{a_n\}$ με $0 \leq a_{n+1} \leq k a_n$, $a_1 > 0$ τότε δείχνουμε $\lim a_n = 0$.

Έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} a_2 \leq k a_1 \\ a_3 \leq k a_2 \\ \vdots \\ a_{n+1} \leq k a_n \end{array}\right\} \Rightarrow a_{n+1} \leq \underbrace{k^n}_{\substack{\downarrow (k<1) \\ 0}} a_1 \to 0$$

Άρα $\lim a_n = 0$

(9) Όριο της $\underbrace{\sqrt[n]{a^n+1}}_{b_n}$ με $a>1$

$$b_{n+1}/b_n = a^{n+1}+1/a^n+1 = a+\left(\frac{1}{a}\right)^n / 1+\left(\frac{1}{a}\right)^n \to a$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n \to 0, \quad \left(\frac{1}{a}\right)^n \to 0$$

Άρα $\lim \sqrt[n]{a^n+1} = a$.

(10) Αν $f[0,\infty) \to \mathbb{R}$, συνεχής με $f(x)>x$, $\forall x \neq 0$ και $f(0)=0$, εύρεση ορίου $x_{n+1}=f(x_n)$, τη δοθεν

Λόγω υπόθεσης $x_{n+1}=f(x_n)>x_n$ η $\{x_n\} \nearrow$, επομένως $\exists \lim f(x_n) = a \in \mathbb{R}$ αν $\{x_n\}$ ~~πανω~~ φραγμένη ή $\lim f(x_n) = +\infty$, αν $\{x_n\}$ μη πάνω φραγμένη.

Πρώτη περίπτωση αποκλείεται γιατί τότε

$$a = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(a)$$

άτοπο, λόγω υπόθεσης $\Rightarrow \lim x_n = +\infty$

(1). Αν $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ συνεχής και πάνω φραγμένη δείχνουμε ότι $\frac{1}{n}\int_n^{n+1} f\,ds \to 0$

Έχουμε $\left|\frac{1}{n}\int_n^{n+1} f(s)\,ds\right| \le \frac{1}{n}\int_n^{n+1} |f(s)|\,ds \le \frac{1}{n}(n+1-n)M = \frac{M}{n} \to 0$

όπου M πάνω φράγμα της $|f|$ στον $\mathbb{R}^+$.

(2). Αν $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ συνεχής με $f(x) > 1, \forall x \ge 0$ εξετάστε την σύγκλιση της $\sum a_n$ με

$$a_n = \frac{1}{n}\int_n^{n+1} f\,ds$$

Έχουμε $a_n \ge 0$ και $a_n \ge \frac{1}{n} \Rightarrow \sum a_n$ αποκλίνει

(3). Αν $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ συνεχής, φθίνουσα με $\lim f(n) = 0$ εύρεση ορίου της $\int_n^{n+1} f(s)\,ds$.

Έχουμε $\int_n^{n+1} f(s)\,ds \le f(n) \to 0$

(4). Αν $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, φθίνουσα εξετάστε την σύγκλιση της $\sum a_n$, $a_n = \frac{1}{n^4}\int_n^{n^2} f(s)\,ds$

Έχουμε $a_n \le \frac{1}{n^4}\int_n^{n^2} f(n)\,ds = \underbrace{\frac{1}{n^4}(n^2-n)M}_{x_n}$

όπου M πάνω φράγμα για την $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$.

Κριτήριο σύγκρισης με x_n ως άνω και $y_n = \frac{1}{n^2}$

$x_n / y_n = \frac{1}{n^2}(n^2 - n) \to 1$ και επειδή $\sum \frac{1}{n^2} < +\infty \Rightarrow$

$\sum x_n < +\infty$

5 • Αν $|a_n - b_n| \leq 1/n^2$ και $\sum |b_n| < +\infty$

δείχνουμε ότι $\lim a_n = 0$

Αν επιπλέον $a_n \geq 0$ δείχνουμε ότι $\sum a_n < +\infty$

Απ: Έχουμε

$$b_n - \frac{1}{n^2} \leq a_n \leq b_n + \frac{1}{n^2} \quad \star$$

Επειδή $\sum |b_n| < \infty \Rightarrow \lim |b_n| = 0 \Rightarrow \lim b_n = 0$

$\overset{\star}{\Longrightarrow}$ (κριτήριο παρεμβολής) $\lim a_n = 0$

Αν επιπλέον $a_n \geq 0$, έχουμε

$$0 \leq a_n \leq b_n + \frac{1}{n^2} \leq |b_n| + \frac{1}{n^2}$$

κ επειδή η σειρά $\sum |b_n| + \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, (ως αθροισμα απολύτως συγκλινουσών σειρών), η σειρά $\sum a_n$ με θετικούς προσθετέους, επίσης συγκλίνει.

(III) ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

-ΟΡΙΑ-...

1. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ σύγκλιση

$\overset{\text{τυπικα}}{\leqslant} \int_1^{\infty} \frac{|\cos t|}{t^2}\, dt \overset{\text{τυπικα}}{\leq} \int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}\, dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{\infty}$

$$\lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{t} + 1 = 1$$

σύγκλιση του $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} \Rightarrow$ σύγκλιση του $\int_1^{\infty} \frac{|\cos t|}{t^2}$

$\Rightarrow$ σύγκλιση (απόλυτη)

του $\int_1^{\infty} \frac{\cos t}{t^2}$

2. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}+1}\, dt$ Ομοίως:

$\leq \int_1^{+\infty} \leq \cdots \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} < +\infty$

$\cdots \Rightarrow$ σύγκλιση.

3. Δειχνουμε οτι $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^a}\, dx$, $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^a}\, dx$ συγκλινουν για $a>0$ και συγκλινουν απολυτα για $a>1$.

Απόδειξη: Για $x \geq 1$ έχουμε

$$\left|\frac{\sin x}{x^a}\right| \leq \frac{1}{x^a} \quad \text{και} \quad \left|\frac{\cos x}{x^a}\right| \leq \frac{1}{x^a}$$

Αφού $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a} < +\infty$ με $a>1$, τα ολοκληρώματα συγκλίνουν απολύτως, αν $a>1$. Για τη περίπτωση $a>0$ έχουμε

$$\int_1^M \frac{\sin x}{x^a}\,dx = \left[\frac{-\cos x}{x^a}\right]_{M=1}^{M} - a\int_1^M \frac{\cos x}{x^{1+a}}\,dx$$

Έχουμε $\left|\frac{\cos x}{x^{1+a}}\right| \leq \frac{1}{x^{1+a}}$ και επειδή $1+a>1 \Rightarrow$ $\int_1^\infty \frac{1}{x^{a+1}}\,dx < +\infty$, επομένως το $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{1+a}}$ συγκλίνει απολύτως. Έπεται

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^a}\,dx = \frac{\cos 1}{1^a} - a\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^{1+a}}\,dx \in \mathbb{R}$$

4. Σύγκλιση του $\int_1^\infty \sin t^2\,dt$

Αλλαγή μεταβλητής ολοκλήρωσης $x = \overbrace{x(t)}^{t^2}$, $t \geq 1 \Leftrightarrow$

$t=\sqrt{x}$, $x \geq 1$, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2} \Rightarrow \int_1^\infty \sin t^2\,dt = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^{1/2}}\,dx$

το οποίο συγκλίνει από το προηγούμενο παράδειγμα.

5. Σύγκλιση του $\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$ όπου $\varphi(t) = \frac{\sin t}{t}$, $t \neq 0$ και $\varphi(0) = 1$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

(Δες προηγούμενη περίπτωση)

6. Αν $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $|f(x)| \leq M$, $\forall x \geq 0$ (φραγμένη) $\Rightarrow$ $\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ συγκλίνει απολύτως

Έχουμε:

$|e^{-t} f(t)| \leq M e^{-t}$ και αφού $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ συγκλίνει

~~το~~ αρχικό συγκλίνει απολύτως.

7. Με την ίδια υπόθεση για την f $\Rightarrow$

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} f(t) dt < +\infty$$

Υπόδειξη: Δείχνουμε ότι $t^2 \leq e^{t/2}$ για κάθε $t \geq p$, $p > 0$ κατάλληλη σταθερά. Στη συνέχεια:

$$\int_0^{+\infty} |t^2 e^{-t} f| dt \leq M \int_0^{+\infty} e^{-t/2} dt < +\infty$$

4 ~~13~~

8 • Δείξτε ότι υπάρχει $\rho>0$ με $\frac{t^2-1}{t^3+t^2+1} \geq \frac{1}{2t}$, $\forall t\geq\rho$

Μελέτη της σύγκλισης

(1) $$\int_0^\infty \underbrace{\frac{t^2-1}{t^3+t^2+1}}_{f(t)} dt$$

και εύρεση ορίου

(2) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

Απάντηση: $$\int_\rho^\infty \frac{t^2-1}{t^3+t^2+1}\,dt \geq \frac{1}{2}\int_\rho^\infty \frac{1}{t}\,dt = +\infty$$

{πρώτο ερώτημα}

Άρα $$\lim_{x\to+\infty}\int_\rho^x \cdot = \int_\rho^\infty f(t)\,dt = +\infty$$

Εύρεση ορίου (∞/∞)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \underset{\text{(Hospital)}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x\right)'}{1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

9• Ευρεση ορίου $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$, $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

Απαντηση:

Επειδη $f(\,) \geq 0$ διακρινουμε 2 περιπτωσεις

1η $x \longrightarrow \underbrace{\int_0^x}_{(\text{αυξουσα})}$ πάνω φραγμένη $\Leftrightarrow \exists \lim_{x\to+\infty}\int_0^x = \int_0^{+\infty} \in \mathbb{R}^+$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\downarrow\, 0} \int_0^x = 0$$

2η $x \longrightarrow \int_0^x$ μή πανω φραγμένη $\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\int_0^x = \int_0^{+\infty} = +\infty$

$$\underset{\infty/\infty}{\Rightarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\int_0^x\right)'}{1} = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \underset{\text{υποθεση}}{\underset{\uparrow}{0}}$$

10• Αν $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ και $\exists \int_0^\infty f(t)\,dt \Rightarrow a = 0$?

Απαντηση: χβγ $a > 0$. Απο υπόθεση για $\varepsilon = \frac{a}{2}$

$0 < \frac{a}{2} = a - \varepsilon \leq f(x) \leq a + \varepsilon$, $\forall\, x \geq p$, p επαρκώς μεγάλο. $\Rightarrow \underbrace{\frac{a}{2}\int_p^{+\infty} dx}_{\substack{\| \\ +\infty}} < \underbrace{\int_p^{+\infty} f(x)\,dx}$

$\Rightarrow +\infty$, άτοπο (υπόθεση)

11. Αν $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ συνεχής και $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx=+\infty$

εξετάζουμε την σύγκλιση

$$\cdot\quad \sum \int_\eta^{\eta+1} f(x)\,dx,\quad \sum \int_\eta^{\eta^2} f(x)\,dx,\quad \sum \frac{1}{\eta}\int_\eta^{\eta^2} f\left(\frac{x}{\eta}\right) dx$$

Απάντηση: $\left\{ \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f + \int_1^2 f + \dots + \int_\eta^{\eta+1} f + \dots = \infty \right\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_\eta^{\eta^2} f(x)\,dx > \int_\eta^{\eta+1} f(x)\,dx,\quad \eta=2,3,\dots \Rightarrow \\ \sum_{\eta=2}^{\infty} \int_\eta^{\eta^2} f(x)\,dx \geq \sum_{\eta=2}^{\infty} \int_\eta^{\eta+1} f(x)\,dx = +\infty \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\eta}\int_\eta^{\eta^2} f\left(\frac{x}{\eta}\right) dx \underset{x=\eta w}{=} \int_1^\eta f(w)\,dw \\ \qquad \geq \int_{\eta-1}^{\eta} f(w)\,dw \Rightarrow \\ \sum \frac{1}{\eta}\int_\eta^{\eta^2} f\left(\frac{x}{\eta}\right) dx \geq \sum \int_{\eta-1}^{\eta} f(x)\,dx = \int_0^\infty = +\infty \end{array} \right\}$$

7

12 • Αν $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ συνεχής, φθίνουσα και

$f(x) \geq \frac{1}{1+x}$, $x \geq \mu > 0$, εύρεση

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

Απάντηση: $\int_\mu^\infty \frac{dt}{1+t} = \left[\ln(1+t)\right]_{t=\mu}^{\infty} = +\infty$ κ επειδή

$f(x) \geq 1/(1+x)$, $x \geq \mu \Rightarrow \int_\mu^\infty f = +\infty$ ή το ίδιο

$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt = +\infty$. Επιπλέον επειδή $f \downarrow$

$\Rightarrow \exists\ \xi \geq 0$ με $\lim_{x\to\infty} f(x) = \xi$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \underset{\text{(Hospital)}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\int_0^x\right)^{(1)}}{(x)^{(1)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1} = \xi$$

• 13 Δείξτε ότι $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^a}\,dx < +\infty$, όπου $a>1$

με απευθείας υπολογισμό του ολοκληρώματος,

εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$\bigstar \begin{cases} \ln x \le x^b \text{ με } a-1>b>0 \\ \forall x \ge \mu \\ \text{για κατάλληλο } \mu \ge 1 \end{cases}$$

Πραγματι, απο την ★ κ την υπόθεση $a-1>b$

εχουμε

$$\int_\mu^\infty \frac{\ln x}{x^a}\,dx \le \int_\mu^\infty \frac{1}{x^{a-b}}\,dx < +\infty$$

Στη συνεχεια διερευνήστε αν υπαρχουν οι προϋποθέσεις του ολοκληρωτικου θεωρηματος για τη σύγκλιση της σειρας $\sum \ln(n)/n^a$

★ Αποδειξη της ανισότητας: Ορίζουμε

$\varphi(x) = x^b - \ln x = x^b\left(1 - \frac{\ln x}{x^b}\right)$ κ δείχνουμε

$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$, το οποιο συνεπάγεται το

ζητούμενο

(IV) TAYLOR

• Σειρά Taylor της $\tan^{-1} x$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum x^n \quad (|x|<1)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 \cdots = \sum (-1)^n x^n$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum (-1)^n x^{2n}$$

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$\tan^{-1} x - \underbrace{\cancel{\tan^{-1}(0)}}_{0} = \int_0^x \frac{ds}{1+s^2}$$

$$= \int_0^x \left(\sum (-1)^n s^{2n} \right) ds$$

$$= \sum (-1)^n \int_0^x s^{2n}\, ds = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \bigstar$$

Άσκηση: Διερεύνηση σύγκλισης της $\bigstar$ για $|x| \leq 1$:

• Απόλυτη σύγκλιση $\sum \underbrace{\frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}}_{a_n}$, $\underbrace{\frac{a_{n+1}}{a_n} \to |x|^2 \overset{?}{<} 1}_{\text{κριτήριο πηλίκου}} \Leftrightarrow$ $\underline{|x|<1}$ (απόλυτη σύγκλιση).

• Για $x = 1$, $\sum (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ (Leibniz) $\rightsquigarrow$ σύγκλιση

• Για $x = -1$ $\sum \frac{1}{2n+1} (-1)^{n+2n+1} = \sum \frac{1}{2n+1} (-1)^{n+1} \rightsquigarrow$ σύγκλιση

• Σειρά Taylor, σύγκλιση για $|x| \leq 1$ για τις συναρτήσεις

$$\ln(1+x^2), \quad \int_0^x \ln(1+s^2)\,ds$$

Έχουμε:

$$\frac{1}{1+x} = \sum (-1)^n x^n, \quad |x|<1$$

και $\ln'(1+x) = \dfrac{1}{1+x} \overset{\int_0^x}{\Longrightarrow}$

$$\ln(1+x) - \underbrace{\ln(1)}_{0} = \int_0^x \frac{ds}{1+s} \Rightarrow$$

$$\ln(1+x^2) = \int_0^{x^2} \frac{1}{1+s}\,ds$$

$$= \int_0^{x^2} \left(\sum (-1)^n s^n \right) ds = \sum (-1)^n \int_0^{x^2} s^n\,ds$$

$$= \sum (-1)^n \frac{x^{2(n+1)}}{n+1}$$

Απόλυτη σύγκλιση: $\sum \underbrace{\dfrac{|x|^{2(n+1)}}{n+1}}_{a_n}$, $\sqrt[n]{a_n} \to |x|^2 \overset{?}{<} 1$

$\Leftrightarrow |x|<1$

Για $x = \pm 1$ προκύπτει εναλλάσσουσα $\Rightarrow$ σύγκλιση (αλλά όχι απόλυτη σύγκλιση)

• Σειρά Taylor (γύρω από το μηδέν) της

$f(x) = (1-x)^a$

$f^{(1)}(x) = (-1)a(1-x)^{a-1}$

$f^{(2)}(x) = (-1)^2 a(a-1)(1-x)^{a-2}$

$f^{(3)}(x) = (-1)^3 a(a-1)(a-2)(1-x)^{a-3}$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = (-1)^n a(a-1)\cdots(a-(n-1))(1-x)^{a-n}$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \dots$$

$$= 1 + \frac{(-1)^1}{1!}ax + \frac{(-1)^2}{2!}a(a-1)x^2 + \dots + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n!}a(a-1)(a-2)\cdots(a-(n-1))x^n}_{a_n} + \dots$$

Απόλυτη σύγκλιση: κριτήριο πηλίκου

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x|\frac{|a(a-1)\cdots(a-n+1)(a-n)|}{|a(a-1)\cdots(a-(n-1))|}\frac{n!}{(n+1)!}$$

$$= |x|/_{n+1}|a-n| = \left|\frac{a}{n+1} - \frac{n}{n+1}\right||x| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|$$

• $\underbrace{|x|<1}_{\text{Απόλυτη σύγκλιση}}$, ακτίνα σύγκλισης $= 1$

4

• Σειρές, σύγκλιση των $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

και $\int_0^x \underbrace{\frac{e^s+e^{-s}-2}{s}}_{\varphi} ds$, Απόλυτη σύγκλιση?

$$e^s = 1+s+\frac{s^2}{2!}+\dots+\frac{s^n}{n!}+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}$$

$$e^{-s} = \quad \dots \quad = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{s^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \varphi(s)=(e^s+e^{-s}-2)/s$$

$$=2\left(\sum_{n=2}\frac{s^{2n}}{(2n)!}\right)/s = 2\sum_{n=2}\frac{s^{2n-1}}{(2n)!}$$

Απόλυτη σύγκλιση $\rightsquigarrow \sum \underbrace{\frac{|s|^{2n-1}}{(2n)!}}_{a_n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{s^{2n+1}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{s^{2n-1}}\longrightarrow 0<1$$

Άρα απόλυτη σύγκλιση για κάθε $s\in\mathbb{R}$.

Έχουμε τέλος:

$$\int_0^x \varphi(s)\,ds = 2\int_0^x\left(\sum_{n=2}\frac{s^{2n-1}}{(2n)!}\right)ds$$

$$= 2 \sum_{n=2} \frac{x^{2n}}{(2n)!\, 2n}$$

Δείξτε ότι η σειρά ~~…~~ συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (κριτήριο λόγου)...

- Σειρά της $\varphi(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$

Παρατηρούμε:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1} n x^{n-1}, \text{ Άρα } \left\{ \frac{1}{(1-x)^2} = \sum n x^{n-1} \right\}$$

Απόλυτη σύγκλιση για $|x| < 1$: $\sum \underbrace{n|x|^{n-1}}_{a_n}$

$\sqrt[n]{a_n} \to |x| < 1$

Διαπιστώστε ότι για $x = \pm 1$ οι αντίστοιχες σειρές δεν συγκλίνουν....

- Υπολογίζουμε την τιμή

$$S := 1+\rho+\rho^2-\rho^3-\rho^4-\rho^5+\rho^6+\rho^7+\rho^8-\rho^9-\rho^{10}-\rho^{11}+\dots$$

με $|\rho|<1$

Λόγω απόλυτης σύγκλισης της σειράς η διαδικασία είναι ανεξάρτητη της σειράς των πράξεων. Έχουμε:

$$S = 1+\rho+\rho^2-\rho^3(1+\rho+\rho^2)+\rho^6(1+\rho+\rho^2)-\rho^9(1+\rho+\rho^2)+\dots$$

$$=(1+\rho+\rho^2)(1-\rho^3+\rho^6-\rho^9+\rho^{16}+\dots+(-\rho)^{3n}+\dots)$$

$$=(1+\rho+\rho^2)(1+(-\rho^3)^1+(-\rho^3)^2+(-\rho^3)^3+\dots)$$

$$=(1+\rho+\rho^2)\frac{1}{1-(-\rho^3)}$$

- Σειρά Taylor γύρω από το μηδέν κ' ακτίνα απόλυτης σύγκλισης για την

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

Έχουμε $\sin t = t-\frac{t^3}{3!}+\dots+(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\,\frac{1}{(2n+1)!}$$

Σύγκλιση της $\sum \underbrace{\frac{|x|^{2(n+1)}}{2(n+1)(2n+1)!}}_{a_n}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 0 < 1$, για κάθε x, άρα ακτίνα σύγκλισης $=+\infty$

Χρήση αναπτύγματος Taylor

- Δείχνουμε ότι αν $a \geq 3$

$$(1+x)^a \geq 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2, \ \forall x \geq 0$$

$$f = (1+x)^a$$

$$f^{(1)} = a(1+x)^{a-1}$$

$$f^{(2)} = a(a-1)(1+x)^{a-2}$$

$$f^{(3)} = a(a-1)(a-2)(1+\cancel{x})^{a-3}$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(\theta x)}{3!}x^3$$

$$= 1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}$$

"επί" $\times (1+\theta x)^{a-3} x^3, \ \theta \in (0,1)$

$\geq$ το ζητούμενο.

· Δείχνουμε ότι $\frac{\sin x}{x} \leq 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}, \forall x \in (0,\pi)$

$f(x) = \sin x,\ f^{(1)}(x) = \cos x,\ f^{(2)}(x) = -\sin x$

$f^{(3)}(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x,\ f^{(5)}(x) = \cos x$

$f^{(6)}(x) = -\sin x$

$$\sin x = f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)\,x + f^{(2)}(0)\frac{x^2}{2!} + f^{(3)}(0)\frac{x^3}{3!} + f^{(4)}(0)\frac{x^4}{4!}$$

$$+ f^{(5)}(0)\frac{x^5}{5!} + f^{(6)}(\theta x)\frac{x^6}{6!}, \quad \theta \in (0,1)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!}\sin(\theta x) \leq \ (x \in (0,\pi))$$

$$\leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \Rightarrow \text{το Ζητούμενο}$$

· Δείχνουμε ότι $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2},\ e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2!},\ x \geq 0.$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}e^{\theta_1 x} \Rightarrow \ldots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}e^{-\theta_2 x} \Rightarrow \ldots$$