

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
Λύσεις του 4ου φυλλαδίου ασκήσεων

Άσκηση 1. Δείξτε ότι

$$|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Λύση. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x < y$. Αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση $f(x) = \arctan t$ στο διάστημα $[x, y]$, τότε βρίσκουμε $\xi \in (x, y)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\arctan x - \arctan y}{x - y} = \frac{1}{1 + \xi^2} \leq 1$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

Άσκηση 2. Να δείξετε ότι

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Λύση. Έστω $x > 0$. Ο τύπος του Taylor για τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1+x}$, με κέντρο το 0 για $n = 1$ μας δίνει ότι

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}(1+\xi)^{-\frac{3}{2}}x^2$$

για κάποιο $\xi \in (0, x)$ και επομένως $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$.

Αντίστοιχα για $n = 2$ έχουμε

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{3}{8}(1+\xi)^{-\frac{5}{2}}x^3$$

για κάποιο $\xi \in (0, x)$ και επομένως $\sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$. □

Άσκηση 3. Τι τάξης πολυώνυμο Taylor κέντρου 0 χρειάζεται, ώστε να προσεγγίσουμε το $\sin 1$ με σφάλμα (κατά απόλυτη τιμή) μικρότερο από 0,001;

Λύση. Το σφάλμα στον τύπο του Taylor, για την προσέγγιση της συνάρτησης $f(x) = \sin x$ από πολυώνυμο n -τάξης κέντρου 0, είναι

$$R_n(1) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

για κάποιο $\xi \in (0, 1)$, όπου το $f^{(n+1)}(\xi)$ είναι $\sin \xi$ ή $\cos \xi$. Συνεπώς

$$|R_n(1)| \leq \frac{1}{(n+1)!}.$$

Με δοκιμές βρίσκουμε ότι η ζητούμενη προσέγγιση μπορεί να επιτευχθεί για $n = 6$. □

Άσκηση 4. Έστω ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές διαφορίσιμη και $f(0) = f'(0) = 0$. Υποθέτουμε ότι

$$|f''(x)| \leq 1, \text{ αν } |x| \leq 1.$$

Δείξτε ότι

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}, \text{ αν } |x| \leq 1.$$

Λύση. Σύμφωνα με το Θεώρημα Taylor, έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει ξ μεταξύ του x και του 0, τέτοιο ώστε

$$f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}x^2.$$

Όμως, από υπόθεση, $|f''(\xi)| \leq 1$ και επομένως αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $|x| \leq 1$ παίρνουμε ότι

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

□

Άσκηση 5. Να δείξετε ότι $\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$, για κάθε $x \in [-\pi, 0]$.

Λύση. Σύμφωνα με το Θεώρημα Taylor, έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει ξ μεταξύ του x και του 0, τέτοιο ώστε

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\sin \xi}{6!}x^6.$$

Αν $x \in [-\pi, 0)$, τότε $\xi \in (-\pi, 0)$ και συνεπώς $-\sin \xi < 0$. Οπότε

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

για κάθε $x \in [-\pi, 0]$, με την ισότητα να ισχύει για $x = 0$.

□

Άσκηση 6. Να δείξετε ότι

$$0 < x - \ln(1+x) < \frac{x^2}{2}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Λύση. Έστω $x > 0$. Ο τύπος του Taylor για τη συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x)$, με κέντρο το 0 για $n = 1$ μας δίνει ότι

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{1+\xi}x^2$$

για κάποιο $\xi \in (0, x)$ και επομένως $x - \ln(1+x) > 0$.

Αντίστοιχα για $n = 2$ έχουμε ότι

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{2(1+\xi)^{-3}}{3!}x^3$$

για κάποιο $\xi \in (0, x)$ και επομένως $x - \ln(1+x) < \frac{x^2}{2}$.

□

Άσκηση 7. Έστω ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι απεριόριστα διαφορίσιμη και

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0,$$

για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ και κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι αν $f^{(2n)}(x_0) > 0$, τότε η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ελάχιστο.

Λύση. Λόγω της υπόθεσης, σύμφωνα με το Θεώρημα Taylor, έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, υπάρχει ξ μεταξύ του x_0 και του x , τέτοιο ώστε

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} (x - x_0)^{2n}.$$

Αφού $f^{(2n)}(x_0) > 0$ και η $f^{(2n)}$ είναι συνεχής, θα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f^{(2n)}(\xi) > 0$, για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$ με $|\xi - x_0| < \delta$. Επομένως

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} (x - x_0)^{2n} > 0,$$

για κάθε $|x - x_0| < \delta$. Άρα η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό ελάχιστο. \square

Άσκηση 8. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με

$$f(x) \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Υποθέτουμε ότι

$$f''(x) \leq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

(Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε το Θεώρημα Taylor.)

Λύση. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Από το Θεώρημα Taylor έχουμε ότι για κάθε $h \in \mathbb{R}$, υπάρχει ξ μεταξύ του x και του $x + h$ τέτοιο ώστε

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2!} h^2.$$

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση έχουμε ότι

$$0 \leq f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2!} h^2 \leq f(x) + f'(x)h,$$

δηλαδή

$$f(x) + f'(x)h \geq 0, \text{ για κάθε } h \in \mathbb{R}.$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι $f'(x) = 0$ (γιατί;) και αφού αυτό ισχύει για οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Παρατήρηση: η υπόθεση $f''(x) \leq 0$ μας λέει ότι η f είναι κοίλη. Κάντε ένα πρόχειρο σχήμα για να δείτε ότι αυτό μαζί με το ότι η f έχει μη-αρνητικές τιμές καθιστά το συμπέρασμα απολύτως αναμενόμενο. \square