ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
Λύσεις του 5ου φυλλαδίου ασκήσεων

Ασκηση 1. *Ορίζουμε τις συναρτήσεις*

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ και } g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

(ι) Δείξτε ότι οι h και g ορίζονται για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(ιι) Δείξτε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο

$$f(x) = \alpha h(x) + \beta g(x)$$

είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y'' - y = 0\,, \;\; y(0) = \alpha\,, y'(0) = \beta\,.$$

Λύση. Εφαρμόζουμε κριτήριο λόγου, για την h και έχουμε

$$\left|\frac{\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{x^{2n}}{(2n!)}}\right| = \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} \to 0\,,$$

καθώς $n \to +\infty$ και συνεπώς η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Όμοια εργαζόμαστε και για την g.

Παραγωγίζοντας στη συνέχεια δύο φορές όρο προς όρο, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} f''(x) &= \alpha \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \beta \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ &= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \alpha h(x) + \beta g(x)\,. \end{aligned}$$

Επίσης

$$f(0) = \alpha \text{ και } f'(0) = \beta$$

και συνεπώς η f είναι λύση του δοσμένου προβλήματος αρχικών τιμών. $\square$

Ασκηση 2. *Να αναπτύξετε σε δυναμοσειρά, κέντρου 0, τις παρακάτω συναρτήσεις*

$$(i)\ \frac{3}{1-x^4}\,,\ (ii)\ \frac{x}{9+x^2}\,,\ (iii)\ \frac{1}{(1+x)^2}\,.$$

Στη συνέχεια προσδιορίστε την ακτίνα και το αντίστοιχο σύνολο σύγκλισης.

Λύση. (ι) Παρατηρούμε ότι πρόκειται για γεωμετρική σειρά με πρώτο όρο 3 και λόγο x^4 και συνεπώς έχουμε

$$\frac{3}{1-x^4} = 3 + 3x^4 + 3x^8 + 3x^{12} + \ldots\,, \text{ για } |x| < 1\,.$$

(ιι) Έχουμε ότι

$$\frac{x}{9+x^2} = \frac{x}{9} \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{9}}$$

και συνεπώς πρόκειται για γεωμετρική σειρά με πρώτο όρο $\frac{x}{9}$ και λόγο $-\frac{x^2}{9}$. Επομένως

$$\frac{x}{9+x^2} = \frac{x}{9} - \frac{x^3}{81} + \frac{x^5}{729} - \ldots\,, \text{ για } |x| < 1\,.$$

(ιιι) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα για την παραγώγιση όρο προς όρο δυναμοσειράς έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+x)^2} &= (-\frac{1}{1+x})' \\
&= (-1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots)' \\
&= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots\,, \text{ για } |x| < 1\,.
\end{aligned}$$

□

Ασκηση 3. *Να βρείτε το σύνολο σύγκλισης της δυναμοσειράς*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{2n}$$

και στη συνέχεια, για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία συγκλίνει, να υπολογίσετε το άθροισμα της.

Λύση. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο λόγου (και ελέγχοντας τι συμβαίνει στα άκρα) βλέπουμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει για $|x| < 1$ και αποκλίνει για $|x| \geq 1$. Από το θεώρημα για την όρο προς όρο παραγώγιση δυναμοσειρών και το ανάπτυγμα

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}\,, \text{ για κάθε } x \in (-1,1)$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n x^{2n} &= \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2n x^{2n-1} \\
&= \frac{x}{2} (\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n})' \\
&= \frac{x}{2} (\frac{1}{1-x^2})' \\
&= \frac{x^2}{(1-x^2)^2}\,,
\end{aligned}$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. $\square$

Ασκηση 4. *Να υπολογίσετε το άθροισμα*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}\,.$$

(Υπόδειξη: ξεκινήστε από τη γεωμετρική σειρά και στη συνέχεια με παραγώγισεις αλλα και με κατάλληλους πολλαπλασιασμούς προσπαθήστε να βρείτε τύπο για τη δυναμοσειρά $\sum n^2 x^n$.)

Λύση. Παραγωγίζοντας όρο προς όρο τη γεωμετρική σειρά για $|x| < 1$, έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}\,.$$

Πολλαπλασιάζοντας επί x και παραγωγίζοντας ξανά παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας άλλη μία φορά επί x έχουμε τελικά ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}\,.$$

Συνεπώς, θέτοντας $x = 1/2$ βρίσκουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6\,.$$

$\square$

Ασκηση 5. *(Διωνυμική σειρά) Αν $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, αποδεικνύεται ότι*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n\,,\, |x| < 1\,.$$

Η δυναμοσειρά στο δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας καλείται διωνυμική σειρά, αφού για $\alpha \in \mathbb{N}$ δίνει το γνωστό μας διωνυμικό ανάπτυγμα.

(α) *Βρείτε τις σειρές Maclaurin των συναρτήσεων $\sqrt{1+x}$ και $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.*

(β) *Βρείτε τη σειρά Maclaurin της συνάρτησης $\arcsin x$.*

Λύση. (α) Αντικαθιστώντας $\alpha = 1/2$ έχουμε

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \ldots, |x| < 1$$

και αντικαθιστώντας $\alpha = -1/2$ έχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \ldots, |x| < 1\,.$$

(β) Αν θέσουμε στην τελευταία σχέση όπου x το x^2 βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8 + \ldots, |x| < 1$$

και στη συνέχεια ολοκληρώσουμε όρο προς όρο παίρνουμε ότι

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{x^9}{9} + \ldots, |x| < 1\,.$$

□