

ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι ΣΕΜΦΕ, 1/2/2022

Θέμα 1. Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι Σωστές (Σ) και ποιές είναι Λάθος (Λ) (δεν απαιτείται δικαιολόγηση).

- (1) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Αν το A δεν έχει μέγιστο στοιχείο τότε δεν είναι άνω φραγμένο.
- (2) Έστω (a_n) συγκλίνουσα ακολουθία. Αν $a_{2n} = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- (3) Έστω (a_n) ακολουθία θετικών αριθμών. Αν $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n = 1$.
- (4) Έστω $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε η f δεν είναι συνεχής.
- (5) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με f' συνεχή. Τότε $\int_a^b f(x)f'(x) dx = \frac{f^2(b) - f^2(a)}{2}$.

Θέμα 2. Απαντήστε στις επόμενες ερωτήσεις δικαιολογώντας την απάντησή σας.

- (1) Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Αν $a_n = \frac{\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})}{n}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είναι η (a_n) συγκλίνουσα και αν ναι ποιο είναι το όριό της?
- (2) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη με $\int_a^b f(t) dt \neq 0$. Υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $\int_a^\xi f(t) dt = \int_\xi^b f(t) dt$?
- (3) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\int_a^x f(t) dt}{x - a}$ και αν ναι ποιο είναι?.

Θέμα 3. (α) Έστω η ακολουθία (a_n) με $a_1 = 2$ και $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)$. (i) Δείξτε με επαγωγή ότι $a_n > 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. (ii) Δείξτε ότι $a_n - a_{n+1} > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. (iii) Εξηγήστε γιατί η (a_n) είναι συγκλίνουσα και υπολογίστε το όριό της.

(β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x}{x^2 + 4x + 5} dx$.

Θέμα 4. (α) Έστω $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $\phi'(\xi) = 0$ σε κάθε μια από τις επόμενες περιπτώσεις:

- (1) $\phi(a) = \phi(b)$ και η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) .
- (2) $\phi(a) \neq \phi(b)$, η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο $(a, b]$ και $(\phi(b) - \phi(a)) \cdot \phi'(b) < 0$.

(β) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(a) = f'(b)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}$$

Τι σημαίνει αυτό γεωμετρικά για την γραφική παράσταση της f ?

Υπόδειξη: Θεωρείστε την συνάρτηση $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\phi(a) = f'(a) \quad \text{και} \quad \phi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{για κάθε } x \in (a, b].$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1:

- (1) ΛΑΘΟΣ (πχ. το $A = (-\infty, 0)$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο αλλά είναι άνω φραγμένο).
- (2) ΣΩΣΤΟ (Πράγματι, η (a_{2n}) είναι υποκολουθία της (a_n) και άρα συγκλίνει στο ίδιο όριο με την (a_n) . Οπότε, $\lim a_n = \lim a_{2n} = 0$).
- (3) ΛΑΘΟΣ (πχ. $a_n = 1 + \frac{1}{n}$. Τότε $a_n \rightarrow 1$ αλλά $a_n^n \rightarrow e$)
- (4) ΛΑΘΟΣ, κάθε συνάρτηση είναι συνεχής στα απομονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού της και το \mathbb{N} αποτελείται από απομονωμένα σημεία. Άρα κάθε $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση)
- (5) ΣΩΣΤΟ $\left(\int_a^b f(x)f'(x) dx = \frac{1}{2} \int_a^b (f^2(x))' dx = \frac{1}{2} [f^2(x)]_a^b = \frac{f^2(b) - f^2(a)}{2} \right)$.

ΘΕΜΑ 2:

- (1) Παρατηρούμε ότι $a_n = R(f, P_n, T_n)$ όπου $R(f, P_n, T_n)$ είναι το άθροισμα Riemann της f ως προς την διαμέριση $P_n = \{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n}{n} = 1\}$ και τα ενδιάμεσα σημεία $T_n = \{\frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n}{n} = 1\}$. Επειδή, η λεπτότητα $\lambda(P_n)$ της P_n τείνει στο μηδέν, από την θεωρία Ολοκλήρωσης έχουμε ότι $\lim R(f, P_n, T_n) = \int_0^1 f(x) dx$ και άρα $\lim a_n = \int_0^1 f(x) dx$.
- (2) Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ είναι συνεχής. Επειδή $F(a) = 0$ και $F(b) = \int_a^b f(t) dt \neq 0$ (υπόθεση), από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής για συνεχείς συναρτήσεις (Bolzano) έπεται ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $F(\xi) = F(b)/2$. Τώρα, από την προσθετικότητα του ολοκληρώματος, βλέπουμε ότι αυτό είναι και το ζητούμενο ξ . Πράγματι, $\int_\xi^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt - \int_a^\xi f(t) dt = F(b) - F(\xi) = F(\xi) = \int_a^\xi f(t) dt$.
- (3) Αν $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ τότε, από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού, λόγω συνέχειας της f , η F είναι παραγωγίσιμη με $F' = f$. Άρα $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\int_a^x f(t) dt}{x - a} = \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = F'(a) = f(a)$.

ΘΕΜΑ 3:

(α) Έστω η ακολουθία (a_n) με $a_1 = 2$ και $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)$. (i) Έχουμε $a_1 = 2 > 1$. Έστω ότι $a_n > 1$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) = \frac{a_n^2 + 1}{2a_n} > 1 \stackrel{(a_n > 0)}{\Leftrightarrow} a_n^2 + 1 > 2a_n \Leftrightarrow a_n^2 - 2a_n + 1 > 0 \Leftrightarrow (a_n - 1)^2 > 0$ που ισχύει.

(ii) Έχουμε $a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) = \frac{a_n}{2} - \frac{1}{2a_n} = \frac{a_n^2 - 1}{2a_n} > 0$ αφού $a_n > 1 > 0$ και $a_n^2 - 1 = (a_n - 1)(a_n + 1) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Η (a_n) είναι συγκλίνουσα ως φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Έστω $\ell = \lim a_n$. Επειδή $a_n > 1$ έπεται ότι $\ell \geq 1$ και άρα $\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\ell}$. Επίσης $\lim a_{n+1} = \lim a_n = \ell$ (η (a_{n+1}) είναι υποκολουθία της (a_n)). Οπότε, από αλγεβρικές ιδιότητες ορίων ακολουθιών, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right) \Rightarrow \ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{1}{\ell} \right) \Rightarrow \ell^2 - 1 = 0 \Rightarrow \ell = \pm 1$. Η περίπτωση $\ell = -1$ απορρίπτεται (αφού $\ell \geq 1$) και άρα $\ell = 1$.

(β) Έχουμε $\int \frac{x}{x^2+4x+5} dx = \int \frac{x}{x^2+4x+4+1} dx = \int \frac{x}{(x+2)^2+1} dx$. Θέτουμε $t = x+2$ και $dt = dx$. Οπότε $\int \frac{x}{x^2+4x+5} dx = \int \frac{t-2}{t^2+1} dt = \int \frac{t}{t^2+1} dt - 2 \int \frac{1}{t^2+1} dt$. Για το πρώτο ολοκλήρωμα θέτουμε $u = t^2+1$ και άρα $du = 2tdt \Rightarrow tdt = du/2$. Συνεπώς, $\int \frac{t}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln u = \frac{1}{2} \ln(t^2+1) = \ln \sqrt{t^2+1} = \ln \sqrt{(x+2)^2+1}$. Για το δεύτερο έχουμε $\int \frac{1}{t^2+1} dt = \arctan t = \arctan(x+2)$. Άρα $\int \frac{x}{x^2+4x+5} dx = \ln \sqrt{(x+2)^2+1} - 2 \arctan(x+2)$.

ΘΕΜΑ 4:

(α) (i) Προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφ. Λογισμού. (ii) Πάλι από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφ. Λογισμού έπεται ότι υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ με $\phi'(x_0) = \frac{\phi(b) - \phi(a)}{b - a}$. Άρα, από την σχέση $(\phi(b) - \phi(a)) \cdot \phi'(b) < 0$ παίρνουμε ότι $\phi'(x_0) \cdot \phi'(b) < 0$ και συνεπώς από το Θεώρημα Darboux, υπάρχει $\xi \in (x_0, b) \subseteq (a, b)$ με $\phi'(\xi) = 0$.

(β) Θεωρούμε την συνάρτηση $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\phi(a) = f'(a) \text{ και } \phi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ για κάθε } x \in (a, b].$$

Παρατηρούμε ότι η ϕ είναι συνεχής στο $(a, b]$ (ως πηλίκιο συνεχών) αλλά και στο $x_0 = a$ αφού

$$\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = \phi(a)$$

Άρα η ϕ είναι συνεχής. Επίσης η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο $(a, b]$ με παράγωγο

$$\phi'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - (f(x) - f(a))}{(x-a)^2} = \frac{f'(x)}{x-a} - \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = \frac{f'(x)}{x-a} - \frac{\phi(x)}{x-a} = \frac{f'(x) - \phi(x)}{x-a}$$

για κάθε $x \in (a, b]$.

Παρατηρούμε τώρα ότι αν $x \in (a, b)$ τότε

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Leftrightarrow f'(x) = \phi(x) \Leftrightarrow \phi'(x) = 0$$

και συνεπώς το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση ενός $\xi \in (a, b)$ με $\phi'(\xi) = 0$.

Αυτό είναι συνέπεια του (α) και των παραπάνω. Πράγματι, από τον τύπο $\phi'(x) = \frac{f'(x) - \phi(x)}{x - a}$ για κάθε $x \in (a, b]$ και την υπόθεση $\phi(a) = f'(a) = f'(b)$ έχουμε

$$\phi'(b) = \frac{f'(b) - \phi(b)}{b - a} = \frac{f'(a) - \phi(b)}{b - a} = \frac{\phi(a) - \phi(b)}{b - a}$$

και άρα αν $\phi(a) \neq \phi(b)$,

$$(\phi(b) - \phi(a)) \cdot \phi'(b) = (\phi(b) - \phi(a)) \cdot \frac{\phi(a) - \phi(b)}{b - a} = -\frac{(\phi(a) - \phi(b))^2}{b - a} < 0$$

Η γεωμετρική ερμηνεία είναι η εξής:

Αν η γραφική παράσταση της f έχει παράλληλες εφαπτομένες στα άκρα της $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ τότε υπάρχει ένα ενδιάμεσο σημείο $(\xi, f(\xi))$ όπου η εφαπτομένη στο σημείο αυτό διέρχεται από το αριστερό άκρο $(a, f(a))$.