Περιγραφική Θεωρία Συνόλων

Εργασίες

Εαρινό Εξάμηνο 2021-2022

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

2η Εργασία

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Προθεσμία παράδοσης: η μέρα εξέτασης του μαθήματος.

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να αποδειχθεί ότι τα $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$ σύνολα ικανοποιούν την Υπόθεση του Συνεχούς, συγκεκριμένα θα δείξουμε το εξής αποτέλεσμα.

Πρόταση 1. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και κάθε $\boldsymbol{\Sigma}^0_n$ σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}$ είτε το P είναι αριθμήσιμο είτε υπάρχει συνεχής μονομορφισμός $\tau : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{X}$ με $\tau[2^{\mathbb{N}}] \subseteq P$.*

Ορολογία. Δίνονται Πολωνικοί χώροι $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$. Θα λέμε ότι ένα $P \subseteq \mathcal{X}$ είναι **η συνεχής ένα-προς-ένα εικόνα ενός κλειστού υποσυνόλου του** $\mathcal{Y}$ αν υπάρχει κλειστό $C \subseteq \mathcal{Y}$ και συνεχής συνάρτηση $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ με $f[C] = P$ και ο περιορισμός $f|C$ της f στο C είναι ένα-προς-ένα συνάρτηση. (Το τελευταίο σημαίνει ότι αν έχουμε $y_1, y_2 \in C$ με $f(y_1) = f(y_2)$ τότε $f(y_1) = f(y_2)$.)

Η απόδειξη της Πρότασης 1 γίνεται με τα εξής ενδιάμεσα βήματα.

Λήμμα 2. *Κάθε G_δ σύνολο $A \subseteq \mathcal{N}$ είναι η συνεχής ένα-προς-ένα εικόνα ενός κλειστού υποσυνόλου του $\mathcal{N}$.*

Απόδειξη. **(Υποδείξεις)** Επειδή ο $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον $\mathcal{N}$ (το παίρνουμε δεδομένο) αρκεί να δειχθεί ότι το A είναι η συνεχής ένα-προς-ένα εικόνα ενός κλειστού υποσυνόλου του $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$.

Θεωρούμε μια αριθμήσιμη βάση $\{V_s \mid s \in \mathbb{N}\}$ του $\mathcal{N}$ η οποία αποτελείται από σύνολα που είναι κλειστά και ανοικτά. Το A είναι η αριθμήσιμη τομή $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ όπου κάθε U_n είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathcal{N}$. Κάθε U_n είναι η ένωση κάποιων V_s, γράφουμε $U_n = \bigcup_{s \in I(n)} V_s$ όπου $I(n) \subseteq \mathbb{N}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως έχουμε

$$\alpha \in A \iff \forall n \, \exists s \, (s \in I(n) \; \& \; \alpha \in V_s).$$

Η ιδέα είναι για κάθε $\alpha \in A$ να ορίσουμε $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ έτσι ώστε

$$\beta(n) = \text{ο ελάχιστος } s \in I(n) \text{ με } \alpha \in V_s.$$

Συγκεκριμένα ορίζουμε $C \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ ως εξής:

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta) \in C &\iff \forall n \, [\, \beta(n) \in I(n) \; \& \; \alpha \in V_{\beta(n)} \; \& \; \forall s' < \beta(n) \, (s' \in I(n) \longrightarrow \alpha \notin V_{s'}) \,] \\ &\iff \forall n \, \forall s' [\, \beta(n) \in I(n) \; \& \; \alpha \in V_{\beta(n)} \; \& \; (s' \geq \beta(n) \, \vee \, s' \notin I(n) \, \vee \, \alpha \notin V_{s'}) \,].\end{aligned}$$

Εξηγήστε με χρήση του διαγραμματικού συλλογισμού γιατί το C είναι κλειστό σύνολο. Τέλος παίρνουμε τη συνάρτηση της προβολής:

$$f : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N} : f(\alpha, \beta) = \alpha.$$

Παίρνουμε δεδομένο ότι η f είναι συνεχής. Δείξτε ότι $f[C] = A$ και ότι ο περιορισμός $f|C$ της f στο C είναι ένα-προς-ένα. $\dashv$

Λήμμα 3. *Για κάθε Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ έχουμε ότι κάθε G_δ σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}$ είναι η συνεχής ένα-προς-ένα εικόνα ενός κλειστού υποσυνόλου του $\mathcal{N}$.*

Απόδειξη. **(Υποδείξεις)** Το σύνολο P με τη σχετική τοπολογία είναι Πολωνικός χώρος. Θεωρούμε μια συμβατή μετρική d στον Πολωνικό χώρο P και ένα πυκνό σύνολο $D = \{r_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ στον P. Από το Θεώρημα 2.3.7 των σημειώσεων υπάρχει συνεχής επιμορφισμός $\pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow P$. (Θεωρούμε ότι η π έχει οριστεί όπως στην απόδειξη αυτού του θεωρήματος με χρήση της μετρική d και του πυκνού συνόλου D.)

Ορίζουμε το σύνολο $A \subseteq \mathcal{N}$ με

$$\alpha \in A \iff \forall n \text{ το } \alpha(n) \text{ είναι ο ελάχιστος } k \in \mathbb{N} \text{ με } d(r_k, \pi(\alpha)) < 2^{-(n+3)}.$$

Δείξτε ότι ο περιορισμός $\pi|A$ της π στο A είναι ένα-προς-ένα. Επίσης με τη βοήθεια της Παρατήρησης 2.3.8 των σημειώσεων αποδείξτε ότι $\pi[A] = P$. Έπειτα αναπτύξτε μια ισοδυναμία για το A και με χρήση του διαγραμματικού συλλογισμού συμπεράνετε ότι το A είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_2$ σύνολο, οπότε το P είναι η συνεχής ένα-προς-ένα εικόνα ενός G_δ υποσυνόλου του $\mathcal{N}$. Τέλος χρησιμοποιήστε το Λήμμα 2. $\dashv$

Λήμμα 4. *Θεωρούμε την κλάση Γ όλων των $P \subseteq \mathcal{X}$, όπου $\mathcal{X}$ είναι Πολωνικός χώρος, για τα οποία τα σύνολα P και $\mathcal{X} \setminus P$ είναι συνεχείς ένα-προς-ένα εικόνες κλειστών υποσυνόλων του $\mathcal{N}$. Τότε η Γ είναι κλειστή ως προς τον τελεστή της αριθμήσιμης τομής $\bigwedge_{\mathbb{N}}$ και του συμπληρώματος.*

Απόδειξη. **(Υποδείξεις)** Η κλειστότητα ως προς το συμπλήρωμα είναι προφανής από τον ορισμό επομένως δείχνουμε την κλειστότητα ως προς την αριθμήσιμη τομή. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$ και μια ακολουθία $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από υποσύνολα του $\mathcal{X}$ που ανήκουν στη Γ.

1ο Βήμα: Δείχνουμε ότι το σύνολο $P = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_n$ είναι η συνεχής ένα-προς-ένα εικόνα ενός κλειστού υποσυνόλου του $\mathcal{N}$. (Στο 2ο Βήμα δείχνουμε το ίδιο για το σύνολο $\mathcal{X} \setminus P$.)

Παίρνουμε κλειστά σύνολα $C_n \subseteq \mathcal{N}$ και συνεχείς συναρτήσεις $f_n : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ με $f_n[C_n] = P_n$ και $f_n|C_n$ ένα-προς-ένα για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θεωρούμε τον Πολωνικό χώρο $\mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ και παίρνουμε δεδομένο ότι είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον $\mathcal{N}$. Ορίζουμε το σύνολο $C \subseteq \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ ως εξής:

$$\begin{aligned}(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C \iff & \forall n\, \forall m\, [\, \alpha_n \in C_n \ \&\ f_n(\alpha_n) = f_m(\alpha_m)\,] \\ & \forall n\, \forall m\, [\, \alpha_n \in C_n \ \&\ d_{\mathcal{X}}(f_n(\alpha_n), f_m(\alpha_m)) = 0\,],\end{aligned}$$

όπου $d_{\mathcal{X}}$ είναι μια συμβατή μετρική στον $\mathcal{X}$. Εξηγήστε γιατί το C είναι κλειστό.

Έπειτα θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f : \mathcal{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{X} : f((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}) = f_0(\alpha_0).$$

Παίρνουμε δεδομένο ότι η f είναι συνεχής. Δείξτε ότι $f[C] = P$ και ότι ο περιορισμός $f|C$ είναι ένα-προς-ένα.

2ο Βήμα: Το σύνολο $\mathcal{X} \setminus P$ είναι η συνεχής ένα-προς-ένα εικόνα ενός κλειστού υποσυνόλου του $\mathcal{N}$.

Θέτουμε $Q_n = \mathcal{X} \setminus P_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Κάθε Q_n ανήκει στη Γ γιατί το P_n ανήκει στη Γ. Παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{X} \setminus P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{X} \setminus P_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (Q_n \setminus \cup_{i<n} Q_i)\,.$$

Θέτουμε $R_n = Q_n \setminus \cup_{i<n} Q_n$ έτσι που τα R_n είναι ξένα ανά δύο και $\mathcal{X} \setminus P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$. Έπειτα παρατηρούμε ότι

$$R_n = Q_n \bigcap (\mathcal{X} \setminus \cup_{i<n} Q_i) = Q_n \bigcap \cap_{i<n}(\mathcal{X} \setminus Q_i) = Q_n \bigcap \cap_{i<n} P_i.$$

Τα σύνολα $Q_n, P_0, \dots, P_{n-1}$ ανήκουν στη Γ συνεπώς από το 1ο Βήμα η τομή τους ανήκει επίσης στη Γ. Άρα κάθε R_n ανήκει στη Γ.

Για κάθε n θεωρούμε κλειστά σύνολα $B_n \subseteq \mathcal{N}$ και συνεχείς συναρτήσεις $g_n : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ με $g_n[B_n] = R_n$ και $g_n|B_n$ ένα-προς-ένα. Ορίζουμε το σύνολο $B \subseteq \mathbb{N} \times \mathcal{N}$ με

$$(n, \alpha) \in B \iff \alpha \in B_n.$$

Το B είναι προφανώς κλειστό. Τέλος παίρνουμε τη συνάρτηση

$$g : \mathbb{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{X} : g(n, \alpha) = g_n(\alpha).$$

Η g είναι συνεχής. Δείξτε ότι $g[B] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$ και πως ο περιορισμός $g|B$ είναι ένα-προς-ένα. Όπως είδαμε $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n = \mathcal{X} \setminus P$. Άρα το $\mathcal{X} \setminus P$ είναι η συνεχής ένα-προς-ένα εικόνα ενός κλειστού υποσυνόλου του $\mathbb{N} \times \mathcal{N}$. Επειδή ο τελευταίος χώρος είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον $\mathcal{N}$ έχουμε το ζητούμενο. $\dashv$

Λήμμα 5. *Κάθε $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ και κάθε $\underset{\sim}{\mathbf{\Pi}}^0_n$ υποσύνολο ενός Πολωνικού χώρου είναι η συνεχής ένα-προς-ένα εικόνα ενός κλειστού υποσυνόλου του $\mathcal{N}$.*

Απόδειξη. **(Υποδείξεις)** Με επαγωγή στο $n \geq 1$, χρησιμοποιήστε τα προηγούμενα. Παρατηρήστε ότι η Γ του Λήμματος 4 είναι κλειστή ως προς τον τελεστή $\bigvee_{\mathbb{N}}$ της αριθμήσιμης ένωσης. $\dashv$

Τέλος σχετικά με την **απόδειξη της Πρότασης 1**. Αν $P \subseteq \mathcal{X}$ είναι $\underset{\sim}{\mathbf{\Sigma}}^0_n$ σύνολο τότε από το Λήμμα 5 υπάρχει κλειστό σύνολο $C \subseteq \mathcal{N}$ και συνεχής $f : \mathcal{N} \to \mathcal{X}$ με $f[C] = P$ και ο περιορισμός $f|C$ είναι ένα-προς-ένα. Εφαρμόστε το Πόρισμα 2.4.3 των σημειώσεων.