ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ, 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1. Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

$$\text{(i)}(\mathbf{1}\ \boldsymbol{\mu o\nu.})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,2^n}{n^n}\quad \text{(ii)}(\mathbf{0{,}5}\ \boldsymbol{\mu o\nu.})\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right),\qquad \text{(iii)}(\mathbf{0{,}5}\ \boldsymbol{\mu o\nu.})\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$$

ΛΥΣΗ: (i) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο Λόγου. Έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)!2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!2^n}{n^n}}=\frac{2^{n+1}}{2^n}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}&=2\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\cdot(n+1)\\&=2\frac{n^n}{(n+1)^n}\\&=2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\end{aligned}$$

και άρα

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}<1$$

Συνεπώς, η σειρά συγκλίνει.

(ii) Θα εφαρμόσουμε κριτήριο σύγκρισης με την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ συγκλίνει.

(iii) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy.

Πράγματι, η ακολουθία $a_n=\dfrac{1}{n\cdot\ln n}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και άρα η δεδομένη σειρά είναι ισοδύναμη ως προς την σύγκλιση με την $\sum_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$. Επειδή

$$\sum_{n=0}^{\infty}2^n\frac{1}{2^n\cdot\ln(2^n)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\ln 2\cdot n}=\frac{1}{\ln 2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$$

η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ αποκλίνει.

ΘΕΜΑ 2. Δίνεται η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

(i) (**1 μον.**) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R και το ακριβές διάστημα σύγκλισης.

(ii) (**1 μον.**) Βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $x \in (-R, R)$.

Λύση: (i) Έχουμε $\varrho = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Άρα $R = 1/\varrho = 1$ και η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in (-1, 1)$ και αποκλίνει για $x < -1$ ή $x > 1$. Μένει να εξετάσουμε τα σημεία $x = -1$ και $x = 1$. Στο $x = -1$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ που είναι η εναλλάσσουσα αρμονική η οποία συγκλίνει ενώ για $x = 1$ παίρνει την μορφή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι η αρμονική η οποία αποκλίνει. Άρα το ακριβές διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $[-1, 1)$.

(ii) Είναι $f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$, για κάθε $x \in (-1, 1)$. Άρα από το ΘΘΟΛ και επειδή $f(0) = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\, dt &= \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt \\ &= -\int_1^{1-x} \frac{1}{u}\, du \\ &= -[\ln u]_1^{1-x} = -\ln(1-x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right), \end{aligned}$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$.

ΘΕΜΑ 3. Έστω

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(1) (**1 μον.**) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(2) (**1 μον.**) Δείξτε ότι η f έχει κατευθυνόμενες παραγώγους στο $(0,0)$ ως προς οποιαδήποτε κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

(3) (**1 μον.**) Εξετάστε αν η f διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

ΛΥΣΗ: (i) Για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ έχουμε

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x|^3}{x^2+y^2} + \frac{|y|^3}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|^3}{x^2} + \frac{|y|^3}{y^2} = |x| + |y|$$

Άρα $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(ii) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$. Είναι

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\mathbf{u}) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3u_1^3+t^3u_2^3}{t^2u_1^2+t^2u_2^2}}{t} = \frac{u_1^3+u_2^3}{u_1^2+u_2^2} = u_1^3 + u_2^3.$$

αφού $\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 = 1$ ($\mathbf{u}$ μοναδιαίο).

(iii) Από το (ii) για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1,0)$,

$$f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(0,0) = 1,$$

και αντίστοιχα για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0,1)$,

$$f_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(0,0) = 1.$$

Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ με δύο τρόπους.

1ος τρόπος: Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ αν και μόνο αν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

ισοδύναμα,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y + xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

Αλλά τότε αν $x = y = t$ θα πρέπει

$$\lim_{t\to 0} \frac{2t^3}{\sqrt{2}|t|^3} = 0 \text{ ή } \lim_{t\to 0} \frac{t}{|t|} = 0,$$

που βέβαια δεν ισχύει.

2ος τρόπος: Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ τότε θα έπρεπε $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = f_x(0,0)u_1 + f_y(0,0)u_2 = u_1 + u_2$.

Όμως από το (ii) έχουμε ότι $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = u_1^3 + u_2^3$. Άρα θα είχαμε $u_1^3 + u_2^3 = u_1 + u_2$, για όλα τα $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$, άτοπο.

ΘΕΜΑ 4. (α) (**1,5 μον.**) Μελετήστε ως προς τα τοπικά ακρότατα την συνάρτηση

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy$$

(β) (**1,5 μον.**) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης και τέτοια ώστε (i) $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ και (ii) Υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ με $|f_{xx}(x,y)|, |f_{xy}(x,y)|, |f_{yy}(x,y)| \leq M$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι $|f(x,y)| \leq \dfrac{M}{2}\left(|x| + |y|\right)^2$.

ΛΥΣΗ: (α) Έχουμε,

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 4x^3 - 4x + 4y \\
f_y(x,y) &= 4y^3 - 4y + 4x \\
f_{xx}(x,y) &= 12x^2 - 4 \\
f_{yy}(x,y) &= 12y^2 - 4 \\
f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 4
\end{aligned}$$

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία λύνοντας το σύστημα

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\
f_y(x,y) &= 4y^3 - 4y + 4x = 0
\end{aligned}$$

με πρόσθεση κατά μέλη δίνει ότι $x^3 = -y^3$ ισοδύναμα

$$y = -x$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση βρίσκουμε ότι $4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2) = 0$ και άρα

$$x = 0 \text{ ή } x = \sqrt{2} \text{ ή } x = -\sqrt{2}$$

Συνεπώς τα πιθανά τοπικά ακρότατα είναι τα σημεία

$$(0,0), \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \quad \text{και} \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Έχουμε

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - \left(f_{xy}(x,y)\right)^2 = (12x^2 - 4) \cdot (12y^2 - 4) - 16$$

(1) $\Delta(0,0) = 0$ και άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε από το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για το αν το $(0,0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Όμως παρατηρούμε ότι

(α) $f(0,0) = 0$,

(β) για κάθε $0 < x \leq 1$, είναι $f(x,0) = x^4 - 2x^2 < 0$ και

(γ) για κάθε $x = y \neq 0$ είναι $f(x,y) = f(x,x) = 2x^4 > 0$.

Τα παραπάνω δείχνουν ότι *σε κάθε περιοχή του* $(0,0)$ μπορούμε να βρούμε δύο σημεία που η τιμή της f στο ένα από αυτά να είναι μικρότερη του $f(0,0)$ ενώ η τιμή στο άλλο να είναι μεγαλύτερη του $f(0,0)$, πράγμα που σημαίνει ότι το $(0,0)$ δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου.

(2) Όπως εύκολα βλέπουμε

$$\Delta(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = \Delta(\sqrt{2},\sqrt{2}) > 0$$

και $f_{xx}(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = f_{xx}(\sqrt{2},-\sqrt{2}) > 0$ οπότε στα σημεία $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ και $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ η f έχει αυστηρό τοπικό ελάχιστο. Άρα η f έχει ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα που είναι και τα δύο αυστηρά τοπικά ελάχιστα.

(β) Η προς απόδειξη ανισότητα ισχύει κατά τετριμένο τρόπο αν $(x,y)=(0,0)$. Έστω $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ με $(x,y)\neq(0,0)$. Από τον Τύπο Taylor υπάρχει (ξ,η) στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $(0,0)$ και (x,y) τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f_{xx}(\xi,\eta)x^2 + 2f_{xy}(\xi,\eta)xy + f_{yy}(\xi,\eta)y^2\right) \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &\le \frac{1}{2}\left(|f_{xx}(\xi,\eta)|x^2 + 2|f_{xy}(\xi,\eta)|\cdot|xy| + |f_{yy}(\xi,\eta)|y^2\right) \\ &\le \frac{M}{2}\left(x^2+2|xy|+y^2\right) = \frac{M}{2}\left(|x|+|y|\right)^2 \end{aligned}$$

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 1 ώρα και 30′