ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΟΙ ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ.

Έστω $(X, +, \cdot)$ γραμμικός (διανυσματικός) χώρος επί του $\mathbb{R}$.

Εάν $A, B \subset X$ μη κενά, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x_0 \in X$, $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$, θέτουμε

- $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$, $A - B = \{x - y : x \in A, y \in B\}$.
- $\lambda A = \{\lambda \cdot x \mid x \in A\}$, $S \cdot A = \{s \cdot x \mid s \in \mathbb{R}, x \in A\}$.
- $x_0 + A = \{x_0 + x : x \in A\}$, $x_0 - A = \{x_0 - x : x \in A\}$.

<u>Ορισμός 1:</u> Έστω $\emptyset \neq A \subset X$. Το A λέγεται

- <u>συμμετρικό</u> αννν $-A = A$, δηλ. $\forall x \in A$, ισχύει $-x \in A$.
- <u>ισορροπημένο</u> αννν $\bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A = A$, δηλ. $\forall x \in A, \forall \lambda \in [-1, 1]$, ισχύει $\lambda \cdot x \in A$. (Ειδικότερα, <u>$0 \in A$.</u>)
- <u>απορροφούν</u> αννν $\forall x \in X, \exists \delta = \delta_x > 0 \mid \forall \lambda \in (-\delta, \delta), \lambda \cdot x \in A$. (Ειδικότερα, <u>$0 \in A$.</u>)

- <u>κυρτό</u> αννν $\forall x, y \in A, \forall \lambda \in [0, 1], (1-\lambda)x + \lambda y \in A$.

Παραδείγματα:

<u>(i)</u> Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Οι μπάλες

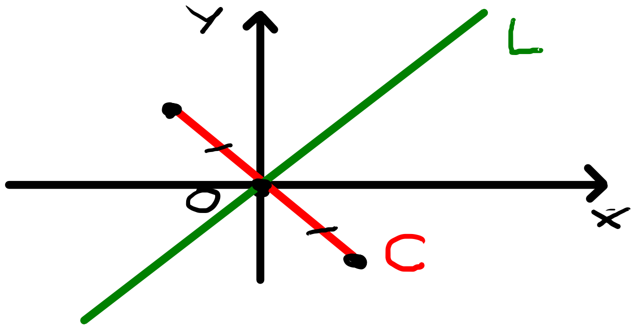
$$B(0,r) = \{x \in X : \|x\| < r\}, \quad B[0,r] = \{x \in X : \|x\| \leq r\}, \quad r > 0,$$

είναι κυρτά, ισορροπημένα κ' απορροφούντα.

Για το απορροφούν, έστω $x \in X \setminus \{0\}$. Θέτουμε $\delta = \frac{r}{2\|x\|}$.

Τότε, $\forall \lambda \in (-\delta, \delta)$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \leq \frac{r}{2} < r \Rightarrow \lambda x \in B(0,r)$.

<u>(ii)</u> Στον $\mathbb{R}^2$, κάθε ευθ. τμήμα με μέσο το $O(0,0)$ κ' κάθε ευθεία που διέρχεται από το O είναι ισορροπημένο.



Η ευθεία L κι' το ευθ. τμήμα C είναι ισορροπημένα.

Το $C \cup L$ είναι επίσης ισορροπημένο αλλά όχι κυρτό.

(iii) Εάν $B \subset X$ τυχαίο, μη κενό κι' $\rho > 0$, το σύνολο

$$A = \bigcup_{|\lambda| \leq \rho} \lambda B$$

είναι ισορροπημένο.

Παρατηρήσεις:

(i) Κάθε ισορροπημένο είναι συμμετρικό.

(ii) Έστω $A \subset X$ ισορροπημένο τέτοιο ώστε

$$\forall x \in X,\ \exists\, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid c \cdot x \in A.$$

Τότε, A απορροφών.

Πράγματι· έστω $x \in X$. $\exists\, c \neq 0 \mid cx \in A$. Θέτουμε $\delta = |c|$.
Τότε, $\forall \lambda \in (-\delta, \delta)$, έχουμε $|\lambda| < \delta = |c| \Rightarrow |\lambda/c| < 1$

$$\Rightarrow \quad \lambda \cdot x = \frac{\lambda}{c} \cdot (c \cdot x) \in A,$$ αφού A ισορροπημένο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

1. Έστω $E \subset \mathbb{R}$ ισορροπημένο με $E \subsetneq \mathbb{R}$, $E \neq \{0\}$.

Να δ.ο. $\exists r>0 \,|\, E=(-r,r)$ ή $E=[-r,r]$.

(**Υπόδειξη:** Να δ.ο. E φραγμένο κ' να θέσετε $r=\sup\{|a| : a\in E\}$.)

2. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα κ'

$$B_X=\{x\in X : \|x\|<1\},\quad S_X=\{x\in X : \|x\|=1\}.$$

Εάν $A\subset X$ ισορροπημένο με $A\cap S_X=\emptyset$, να δ.ο.

$$A\subset B_X.$$

3. Έστω X γραμμικός χώρος κ' $Y \subset X$ ισορροπημένο.

Εάν $Y+Y \subset Y$, να δ.ο. Y γραμμικός υπόχωρος του X.

(Υπόδ: Να δ.ο. $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^n \cdot Y \subset Y$.)

4. Έστω X γραμμικός χώρος κ' $A \subset X$ απορροφούν.

Να δ.ο.

$\forall x, y \in X$, $\exists$ $\alpha \in A$ κ' $\lambda \in (0,1)$ ώστε

$$y = (1-\lambda)\cdot x + \lambda \cdot (y+\alpha).$$

5. Έστω X γραμμικός χώρος κ' $A \subset X$ <u>κυρτό</u> κ'

<u>απορροφούν</u>. Να δ.ο. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (nA)$.

Έστω $(X, +, \cdot)$ γραμμικός χώρος, τ μια τοπολογία στον X κ' τ_u η ευκλείδια τοπολογία στον $\mathbb{R}$. Εφοδιάζουμε τους

$$X \times X, \qquad \mathbb{R} \times X$$

με τις αντίστοιχες τοπολογίες – γινόμενο

$$\tau \times \tau, \qquad \tau_u \times \tau.$$

- Μια βάση για την $\tau \times \tau$ είναι το σύνολο

$$\{ G \times H : G, H \in \tau \}.$$

- Μια βάση για την $\tau_u \times \tau$ είναι το σύνολο

$$\{ (\lambda - \delta, \lambda + \delta) \times G : \lambda \in \mathbb{R}, \delta > 0, G \in \tau \}.$$

<u>Ορισμός 2</u>: Ο $(X,+,\cdot,\tau)$ λέγεται <u>τοπολογικός γραμμικός χώρος</u> ανν ο (X,τ) είναι T_1 κ' οι απεικονίσεις-πράξεις

- $(X\times X,\ \tau\times\tau) \ni (x,y) \longmapsto x+y \in (X,\tau)$.
- $(\mathbb{R}\times X,\ \tau_u\times\tau) \ni (\lambda,x) \longmapsto \lambda\cdot x \in (X,\tau)$

είναι συνεχείς.

<u>Παραδείγματα</u>:

<u>(i)</u> Ένας χώρος με νόρμα $(X,\|\cdot\|)$ είναι τοπολ. γραμμ. χώρος ως προς την τοπολογία της νόρμας, δηλ. την τ_d όπου

$$d(x,y)=\|x-y\|,\quad x,y\in X.$$

Η συνέχεια των πράξεων ελέγχεται εύκολα με χρήση ακολουθιών:

- Εάν $(x_n),(y_n) \subset X$, $x, y \in X$ με $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$, τότε

$$\|(x_n+y_n)-(x+y)\| = \|(x_n-x)+(y_n-y)\| \le \|x_n-x\|+\|y_n-y\| \xrightarrow{n} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_n+y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x+y.}$$

- Εάν $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$, $(x_n) \subset X$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$ με $\lambda_n \to \lambda$, $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, τότε $\sup_n \|x_n\| = M < \infty$ κι

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|(\lambda_n-\lambda)x_n + \lambda(x_n-x)\| \le |\lambda_n-\lambda|\cdot\|x_n\| + |\lambda|\cdot\|x_n-x\|$$

$$\le M|\lambda_n-\lambda| + |\lambda|\cdot\|x_n-x\| \xrightarrow{n} 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lambda_n x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \lambda x.}$$

(ii) Εφοδιάζουμε τον $(\mathbb{R},+,\cdot)$ με την τοπολογία τ_S.

Ο $(\mathbb{R},+,\cdot,\tau_S)$ δεν είναι τοπολ. γραμμ. χώρος.

Πράγματι $\frac{1}{n} \xrightarrow{\tau_S} 0$, αλλά $-\frac{1}{n} \overset{\tau_S}{\not\to} 0$, δηλ. η πράξη

$$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, \tau_u \times \tau_S) \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda\cdot x \in (\mathbb{R},\tau_S)$$

δεν είναι συνεχής.

Παρ' όλ' αυτά η "πρόσθεση" είναι συνεχής. Πράγματι·

έστω $x_0, y_0 \in X$ κ' $G \in \tau_S$ με $x_0+y_0 \in G$. Τότε, $\exists\, b > x_0+y_0$

$$[x_0+y_0, b) \subset G.$$

Επιλέγουμε

$$t \in (2x_0 - b,\ b - 2y_0).$$

Θέτουμε $c = \frac{t+b}{2}$, $d = \frac{b-t}{2}$.

Τότε, $[x_0, c) + [y_0, d) \subset [x_0 + y_0, b) \subset G$.

<u>Συμβολισμός:</u> "τ.γ.χ." ≡ τοπολογικός γραμμικός χώρος.

<u>Πρόταση 3:</u> κάθε τ.γ.χ. είναι T_2.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $(X, +, \cdot, \tau)$ τ.γ.χ. κ' $x_0, y_0 \in X$ με $x_0 \neq y_0$.

Τότε, $x_0 - y_0 \in X \setminus \{0\}$. Επειδή ο X είναι T_1, το $X \setminus \{0\}$ είναι ανοικτό κ' επειδή η πράξη $(x,y) \mapsto x-y$ είναι συνεχής, $\exists\ G, H \in \tau$ ώστε

$$x_0 \in G,\quad y_0 \in H, \qquad G - H \subset X \setminus \{0\}.$$

Τότε $G \cap H = \emptyset$. ⊠

<u>Πρόταση 4:</u> Έστω X τ.γ.χ. $a \in X$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Θεωρούμε τις απεικονίσεις

$$\tau_a : X \to X, \quad \tau_a(x) = x + a, \quad \forall x \in X,$$

$$\sigma_\lambda : X \to X, \quad \sigma_\lambda(x) = \lambda \cdot x, \quad \forall x \in X.$$

Τότε, οι τ_a, σ_λ είναι ομοιομορφισμοί με

$$\tau_a^{-1} = \tau_{-a}, \quad \sigma_\lambda^{-1} = \sigma_{1/\lambda}.$$

(Η απόδειξη ως άσκηση.)

<u>Πόρισμα 5:</u> Έστω $(X, +, \cdot, \mathcal{T})$ τ.γ.χ.

<u>(i)</u> Εάν $G \subset X$ ανοικτό κ' $a \in X$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, τότε

$$a + G, \quad \lambda \cdot G \quad \text{ανοικτά.}$$

Επιπλέον, εάν $\phi \neq A \subset X$, τότε

$$A+G \text{ ανοικτό.}$$

(ii) Εάν β βάση περιοχών του $0 \in X$, τότε $\forall x \in X$, το

$$\beta_x = \{ x+V : V \in \beta \}$$

είναι βάση περιοχών του x.

(iii) $\tau = \{ x+V : x \in X,\ V \in \tau \text{ με } 0 \in V \}$.

Πρόταση 6: Έστω X τ.γ.χ. κ' $A, B \subset X$, $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Τότε:

(i) $\overline{x+A} = x + \overline{A}$, $\overline{\lambda \cdot A} = \lambda \cdot \overline{A}$, $(x+A)^{\circ} = x + \mathring{A}$.

Εάν $\lambda \neq 0$, $(\lambda \cdot A)^{\circ} = \lambda \cdot \mathring{A}$.

(ii) $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A+B}$, $A + \mathring{B} \subset (A+B)^{\circ}$.

(iii) Εάν Y γραμμ. υπόχ. του X, τότε $\overline{Y}$ γραμμ. υπόχ. του X.

(iv) Εάν A ισορροπημένο, τότε $\overline{A}$ ισορροπημένο.

Εάν A ισορροπημένο κ' $0 \in \mathring{A}$, τότε $\mathring{A}$ ισορροπημένο.

(v) Εάν A κυρτό, τα $\overline{A}$, $\mathring{A}$ είναι κυρτά.

(vi) Εάν $G \subset X$ ανοικτό, μη κενό, τότε το

$$co(G) = \{ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \mid \lambda_i \in [0,1],\ x_i \in G,\ 1 \leq i \leq n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ n \geqslant 1 \}$$

είναι ανοικτό.

(vii) Εάν A ισορροπημένο, τότε $co(A)$ κυρτό, ισορροπημένο.

Απόδειξη:

(i) Προκύπτει άμεσα από το ότι οι απεικονίσεις

$$X \ni y \overset{T_x}{\longmapsto} x+y \in X, \qquad X \ni y \overset{\sigma_\lambda}{\longmapsto} \lambda \cdot y \in X$$

είναι ομοιομορφισμοί για $\lambda \neq 0$.

(ii) Επειδή η $\varphi : X \times X \to X$, $\varphi(y_1, y_2) = y_1 + y_2$ είναι συνεχής, έχουμε

$$\varphi(\overline{A \times B}) \subset \overline{\varphi(A \times B)} = \overline{A+B}.$$

Αλλά $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ (δείτε το!), οπότε

$$\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A+B}.$$

Επιπλέον, $\mathring{B}$ ανοικτό $\Rightarrow$ $A+\mathring{B}$ ανοικτό $\subset A+B$

$\Rightarrow$ $A+\mathring{B} \subset \widehat{A+B}^{\circ}$.

<u>(iii)</u> Εάν $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, τότε

$$\mu_1 \overline{Y} + \mu_2 \overline{Y} \overset{(i)}{=} \overline{\mu_1 Y} + \overline{\mu_2 Y} \overset{(ii)}{\subset} \overline{\mu_1 Y + \mu_2 Y} \subset \overline{Y}.$$

<u>(iv)</u> αφήνεται ως άσκηση.

<u>(v)</u> $\forall \lambda \in [0,1]$, $\lambda \overline{A} + (1-\lambda)\overline{A} \overset{(i)}{=} \overline{\lambda A} + \overline{(1-\lambda)A}$

$$\overset{(ii)}{\subset} \overline{\lambda A + (1-\lambda)A} \subset \overline{A}.$$

- Έστω $\lambda \in (0,1)$. Τότε, $\lambda \mathring{A} + (1-\lambda)\mathring{A}$ ανοικτό (βλ. (i)) κ'

$$\lambda \mathring{A} + (1-\lambda)\mathring{A} \subset \lambda A + (1-\lambda) A \overset{[A \text{ κυρτό}]}{\subset} A$$

$$\Rightarrow \quad \lambda \mathring{A} + (1-\lambda)\mathring{A} \subset \mathring{A}.$$

Η τελευταία ισχύει κ' για $\lambda = 0$ ή 1, αφού $0 \in \mathring{A}$.

<u>(vi)</u> - Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in [0,1]$, $n \geq 1$ με $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Είναι $\lambda_i > 0$, για κάποιο i. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda_1 > 0$.

Τότε, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + z$, όπου $z = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i$ κ'

$$\lambda_1 x_1 + z \in \lambda_1 G + z = \text{ανοικτό} \subset co(G).$$

(vii) Αφήνεται ως άσκηση.

Έστω $(X,+,\cdot,\tau)$ τ.γ.χ.

Συμβολ.: $\mathcal{N}_0 = \{$οι περιοχές του $0\}$.

Πρόταση 7: Έστω $V \in \mathcal{N}_0$. Τότε:

(i) V απορροφούν.

(ii) $\exists\, W \in \mathcal{N}_0$ ισορροπημένο ώστε

$$W \subset \overline{W} \subset W+W \subset V.$$

(iii) ο X είναι T_3.

Απόδειξη:

(i) Έστω $x \in X$. Η απεικόνιση

$$\varphi_x : (\mathbb{R}, \tau_u) \to (X, \tau), \quad \varphi_x(\lambda) = \lambda \cdot x, \ \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

είναι συνεχής (στο $0 \in \mathbb{R}$) κ' $\varphi_x(0) = 0 \in V$, $V \in \mathcal{N}_0$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 \mid \varphi_x((-\delta, \delta)) \subset V$, δηλ. $(-\delta, \delta) \cdot x \subset V$.

Άρα, V απορροφούν.

(ii) Η απεικόνιση $\varphi : X \times X \to X$ με $\varphi(x,y) = x + y$ είναι συνεχής (στο $(0,0) \in X \times X$) κ' $\varphi(0,0) = 0 \in V$.

Επομένως, $\underline{\exists\, V_1, V_2 \in \mathcal{N}_0} \mid \varphi(V_1 \times V_2) \subset V$,

δηλ. $\underline{V_1 + V_2 \subset V}$.

Επιπλέον, η απεικόνιση

$\psi : (\mathbb{R} \times X, \mathcal{T}_u \times \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$, $\psi(\lambda, x) = \lambda \cdot x$, $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times X$,

είναι συνεχής (στο $(0,0) \in \mathbb{R} \times X$) με $\psi(0,0) = 0 \in V_1 \cap V_2$

κ' $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}_0$.

Τότε, $\underline{\exists\, \delta > 0}$, $\underline{\exists\, U \in \mathcal{N}_0}$ ώστε $\psi((-\delta, \delta) \times U) \subset V_1 \cap V_2$, δηλ.

$$(-\delta, \delta) \cdot U \subset V_1 \cap V_2 \implies \underline{\bigcup_{|\lambda| < \delta} (\lambda \cdot U) \subset V_1 \cap V_2}.$$

Θέτουμε
$$W = \bigcup_{|\lambda|<\delta} (\lambda \cdot U).$$

Τότε, $W \in \mathcal{N}_0$, ισορροπημένο κ' $W \subset V_1 \cap V_2$.

Έχουμε
$$W + W \subset V_1 + V_2 \subset V.$$

Τέλος, $\overline{W} \subset W + W$. Πράγματι έστω $x \in \overline{W}$.

Τότε, $x + W$ περιοχή του $x \Rightarrow (x+W) \cap W \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists\, w_1, w_2 \in W \mid \quad x + w_1 = w_2 \Rightarrow x = w_2 - w_1 \in W - W.$

Αλλά, W ισορροπ. $\Rightarrow -W = W \Rightarrow \quad x \in W + W.$

<u>(iii)</u> Έστω $x\in X$, G ανοικτό με $x\in G$. Τότε,

$$G-x\in \mathcal{N}_0 \overset{(ii)}{\Rightarrow} \exists\, W\in \mathcal{N}_0 \mid W\subset \overline{W}\subset G-x$$

$$\Rightarrow x+W\subset \overline{x+W} = x+\overline{W}\subset G$$

κ' $x+W$ περιοχή του x. $\boxtimes$

<u>Πρόταση 8:</u> Εάν $V\in \mathcal{N}_0$ κυρτό, τότε $\exists\, \mathcal{U}\in \mathcal{N}_0$ κυρτό ισορροπημένο με $\mathcal{U}\subset V$.

<u>Απόδειξη:</u> Πρότ. 7(ii) $\Rightarrow \exists\, W\in \mathcal{N}_0$ ισορροπημένο με $W\subset V$. Θέτουμε $\mathcal{U}=co(W)$ κ' εφαρμόζουμε την Πρόταση 7 (vi), (vii). $\boxtimes$

Θ. 9 (Υπενθύμιση από Γενική Τοπολογία).

Έστω $X \neq \emptyset$ κ' $\beta_x \subset \mathcal{P}(X)$, $x \in X$ ώστε:

(I): $\forall x \in X$, $\forall V \in \beta_x$, ισχύει $x \in V$.

(II): $\forall x \in X$, $\forall V, W \in \beta_x$, $\exists\ U \in \beta_x \mid U \subset V \cap W$.

(III): Εάν $x \in X$, $V \in \beta_x$, $\exists\, G \subset X$ ώστε

- $x \in G \subset V$.
- $\forall y \in G$, $\exists\ H_y \in \beta_y \mid H_y \subset G$.

Τότε, η $\mathcal{T} = \{G \subset X : \forall x \in G, \exists V \in \beta_x$ με $V \subset G\}$

είναι η μοναδική τοπολογία στο X τέτοια ώστε

$\forall x \in X$, β_x βάση <u>περιοχών</u> του x.

Θεώρημα 10: Έστω X γραμμικός χώρος κ' $\beta \subset \mathcal{P}(X)$ που ικανοποιεί τα παρακάτω:

(i) $\bigcap \{V : V \in \beta\} = \{0\}$.

(ii) $\forall\, V, W \in \beta,\ \exists\, U \in \beta \mid U \subset V \cap W$.

(iii) $\forall\, V \in \beta$, το V είναι ισορροπημένο, απορροφούν.

(iv) $\forall\, V \in \beta,\ \exists\, W \in \beta \mid W + W \subset V$.

Θέτουμε $\tau = \{G \subset X : \forall x \in G,\ \exists\, V \in \beta$ με $x + V \subset G\}$.

Τότε, ο (X, τ) είναι τ.γ.χ. κ' β βάση περιοχών του 0.

Απόδειξη: $\forall x \in X$, θέτουμε

$$\beta_x = \{ x+V : V \in \beta \}.$$

Ισχυρισμός 1: Οι β_x, $x \in X$ ικανοποιούν τις συνθήκες (I) – (III) του Θ. 9.

Πράγματι·

(I): $\forall V \in \beta$, $0 \overset{(i)}{\in} V \Rightarrow \forall x \in X$, $x \in x+V$.

(II): Έστω $x \in X$, $V, W \in \beta$. Από (ii), $\exists\, U \in \beta \mid U \subset V \cap W$.

Τότε, $x+U \subset (x+V) \cap (x+W)$ κι' $x+U \in \beta_x$.

(III): Έστω $x \in X$ κ' $V \in \beta$. Θέτουμε

$$G = \{ y \in X : \exists H \in \beta \text{ με } y + H \subset x + V \}.$$

Προφανώς

$$x \in G, \qquad G \subset x + V.$$

Έστω $y \in G$. Τότε, $\exists H \in \beta \mid y + H \subset x + V$.

(iv) $\Rightarrow$ $\exists W \in \beta \mid W + W \subset H$.

Θα δ.ο. $y + W \subset G$. Πράγματι·

έστω $z \in y + W$. Τότε,

$$z + W \in y + W + W \subset y + H \subset x + V$$

$\Rightarrow z \in G$.

Άρα, $y+W \in \beta_y$ κ' $y+W \subset G$.

Η απόδειξη του Ισχυρ. 1 ολοκληρώθηκε.

Θέτουμε

$$\tau = \{ G \subset X : \forall x \in G, \exists V_x \in \beta_x \text{ με } V_x \subset G \}$$
$$= \{ G \subset X : \forall x \in G, \exists V \in \beta \text{ με } x+V \subset G \}.$$

Από το Θ.9 κ' τον Ισχ. 1 έπεται ότι η $\mathcal{T}$ <u>είναι τοπολογία</u>

στο X ώστε <u>$\forall x \in X$, η β_x είναι βάση περιοχών του x.</u>

Ειδικότερα, η <u>$\beta_0 = \beta$ είναι βάση περιοχών του 0.</u>

<u>Ισχυρισμός 2:</u> Η απεικόνιση

$$\varphi : (X \times X, \mathcal{T} \times \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}), \quad \varphi(x, y) = x + y$$

είναι συνεχής.

Πράγματι· έστω $(x_0, y_0) \in X \times X$ κ' $G \in \mathcal{T}$ με $x_0 + y_0 \in G$.

<u>$\exists\, V \in \beta \mid \quad x_0 + y_0 + V \subset G.$</u>

Από την (iv) έπεται ότι $\underline{\exists W \in \mathcal{B} \mid W+W \subset V}$.

Τότε, το $(x_0+W)\times(y_0+W) \in \tau\times\tau$ περιέχει το (x_0, y_0)

κ' $$\varphi\big((x_0+W)\times(y_0+W)\big) = (x_0+W)+(y_0+W)$$
$$= (x_0+y_0)+(W+W)$$
$$\subset x_0+y_0+V \subset G.$$

Η απόδειξη του Ισχυρισμού 2 ολοκληρώθηκε.

Ισχυρισμός 3: $\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\, V\in\beta,\ \exists\, U\in\beta \mid 2^n\cdot U\subset V.$

Πράγματι· για $n=0$, προφανώς ισχύει.

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο $n\in\mathbb{N}$.

Έστω $V\in\beta \overset{(iv)}{\Longrightarrow} \exists\, W\in\beta \mid W+W\subset V$. Τότε,

$$2W\subset W+W\subset V.$$

Αλλά από επαγωγική υπόθεση, $\exists\, U\in\beta \mid 2^n\cdot U\subset W$

$$\Longrightarrow\ 2^{n+1}\cdot U\subset 2W\subset V.$$

Άρα, ισχύει κι για $n+1$.

Η απόδειξη του Ισχ. 3 ολοκληρώθηκε.

<u>Ισχυρισμός 4:</u> Η απεικόνιση

$\psi : (\mathbb{R}\times X, \mathcal{T}_u \times \mathcal{T}) \to (X, \tau)$, $\psi(\lambda, x) = \lambda \cdot x$, $(\lambda, x) \in \mathbb{R}\times X$

είναι συνεχής.

Πράγματι· έστω $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R}\times X$ κ' $G \in \tau$ με

$\psi(\lambda_0, x_0) \in G$ δηλ. $\lambda_0 \cdot x_0 \in G$. Τότε,

$\exists V \in \mathcal{B}$ με $\lambda_0 \cdot x_0 + V \subset G$.

θα δ.ο. $\exists\, \delta > 0$, $\exists\, \mathcal{U} \in \mathcal{B} \,|$

$\forall \lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$, $\forall x \in x_0 + \mathcal{U}$, ισχύει $\lambda x \in \lambda_0 x_0 + V$.

ή

$\lambda x - \lambda_0 x_0 \in V$.

(iv) $\Rightarrow$ $\underline{\exists\, W \in \beta \mid \quad W + W \subset V.}$ (1)

(iii) $\Rightarrow$ W απορροφούν $\Rightarrow$ $\exists\, \delta > 0 \mid$

$\underline{\forall t \in (-\delta, \delta), \quad t x_0 \in W.}$ (2)

Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ με $\underline{2^n > |\lambda_0| + \delta.}$

$\underline{\text{Ισχ} \cdot 3}$ $\Rightarrow$ $\underline{\exists\, U \in \beta \mid \quad 2^n \cdot U \subset W.}$ (3)

Έστω $\underline{\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta), \quad x \in x_0 + U.}$ (4)

Λόγω των (2), (4) παίρνουμε

$\lambda x - \lambda_0 x_0 = \lambda(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0) x_0 \in \lambda U + W.$

Επιπλέον,

$$|\lambda| \leq |\lambda-\lambda_0| + |\lambda_0| < \delta + |\lambda_0| < 2^n$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\lambda}{2^n}\right| < 1 \xRightarrow[(iii)]{[W \text{ ισορροπημένο}]} \underline{\frac{\lambda}{2^n} W \subset W}$$

$$\Rightarrow \lambda u = \frac{\lambda}{2^n}(2^n \cdot u) \overset{(3)}{\subset} \frac{\lambda}{2^n} W \subset W$$

$$\Rightarrow \lambda x - \lambda_0 x_0 \in W + W \overset{(1)}{\subset} V.$$

Η απόδειξη του Ισχυρ. 4 ολοκληρώθηκε.

Τέλος, ο (X,τ) είναι T_1.

Πράγματι· έστω $x \in X$ κ' $y \in X \setminus \{x\}$. Τότε,

$$x-y \neq 0 \xRightarrow{(i)} \exists\, V \in \beta \mid \quad x-y \notin V$$

$$\Rightarrow \quad y+V \subset X \setminus \{x\}.$$

Άρα, $X \setminus \{x\} \in \tau$.

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, παίρνουμε ότι

ο $(X,+,\cdot,\tau)$ είναι τ.γ.χ. κ' β βάση περιοχών του 0. $\boxtimes$

Γραμμικοί τελεστές - Γραμμικά συναρτησιακά.

- Έστω X, Y τοπολογικοί γραμμικοί χώροι κ' $T: X \to Y$ **γραμμικός τελεστής**, δηλ.

$$\forall\, x_1, x_2 \in X,\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda T(x_1) + \mu T(x_2).$$

Εάν $T: X \to Y$ γραμμικός, τότε $T(0) = 0$.

$\ker T = \{x \in X : T(x) = 0\}$.

T 1-1 ανν $\ker T = \{0\}$

Πρόταση 11: T συνεχής ανν T συνεχής στο 0.

Απόδειξη: $(\Leftarrow)$. Έστω $x_0 \in X$ κ' G ανοικτό $\subset Y$ με

$$T(x_0) \in G.$$

Τότε, $G - T(x_0)$ ανοικτό $\subset Y$ με $0 \in G - T(x_0)$

$\Rightarrow \exists\ \mathcal{U}$ ανοικτό $\subset X$ με

$0 \in \mathcal{U}$, $\quad T(\mathcal{U}) \subset G - T(x_0)$.

Τότε, $x_0 + \mathcal{U}$ ανοικτό $\subset X$ με $x_0 \in \mathcal{U}$ κι'

$$T(x_0 + \mathcal{U}) = T(x_0) + T(\mathcal{U}) \subset G. \qquad \boxtimes$$

<u>Πρόταση 12:</u> Έστω X, Y χώροι με νόρμα. Τότε,

T συνεχής <u>ανν</u> T συνεχής στο 0 <u>ανν</u> $\exists\ V$ ανοικτό $\subset X$ με $0 \in V$ κι' $T(V)$ $\|\cdot\|$-φραγμένο <u>ανν</u> $\exists\ M > 0 \mid \forall x \in X$, $\|T(x)\| \leq M \|x\|$.

<u>Απόδειξη (ως άσκηση).</u>

Παρατήρηση: Εάν $A \subset X$, $E \subset Y$ ισορροπημένα, τότε

$T(A) \subset Y$, $T^{-1}(E) \subset X$ ισορροπημένα.

Πρόταση 13: Έστω X τ.γ.χ. κ' $f: X \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ γραμμική

με $f \not\equiv 0$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) f συνεχής στο 0

(ii) f συνεχής

(iii) $\ker f$ κλειστό

(iv) $\overline{\ker f} \subsetneq X$

(v) $\exists V \in \mathcal{N}_0 \mid f(V)$ φραγμένο $\subset \mathbb{R}$.

Απόδειξη: (i) $\Rightarrow$ (ii) Προκύπτει από την Πρόταση 11.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\{0\}$ κλειστό κι f συνεχής $\Rightarrow$ $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ κλειστό.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) $\overline{\ker f} = \ker f \subsetneq X$, αφού f συνεχής.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Επιλέγω $x_0 \in X \setminus \overline{\ker f}$. Τότε, $\exists\, V \in \mathcal{N}_0$ ισορροπημένο ώστε

$$(x_0 + V) \cap \ker f = \emptyset.$$

Τότε, $\forall\, v \in V$, $f(x_0 + v) \neq 0 \Rightarrow f(v) \neq -f(x_0) = \mu$,

δηλ. $\mu \notin f(V)$.

Ισχυρ. $\forall\, v \in V$, $|f(v)| \leq |\mu|$.

Πράγματι· έστω αντίθετα ότι $\exists\, v \in V$ με
$|f(v)| > |\mu|$

Τότε, $\left|\frac{\mu}{f(v)}\right| < 1 \xRightarrow[\text{[V ισορροπ.]}]{} \frac{\mu}{f(v)} v \in V$

κ' $f\left(\frac{\mu}{f(v)} v\right) = \mu \Rightarrow \mu \in f(V)$ (ΑΤΟΠΟ!).

Άρα, $f(V)$ φραγμένο.

<u>(v) $\Rightarrow$ (i)</u> Έστω $V \in \mathcal{N}_0$ κ' $M > 0 \mid |f(v)| \leq M,\ \forall v \in V$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $U = \frac{\varepsilon}{M} V \in \mathcal{N}_0$.

$\forall x \in U,\ \frac{M}{\varepsilon} x \in V \Rightarrow \left|f\left(\frac{M}{\varepsilon} x\right)\right| \leq M \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon$.

Άρα, f συνεχής στο 0.

Σχόλιο: Εάν X, Y τ.γ.χ. κ' $T: X \to Y$ γραμμικός με $\ker T$ κλειστό $\subset X$, δεν έπεται γενικά ότι T συνεχής.

Παράδειγμα: Θεωρούμε τους γραμμικούς χώρους

$$Y = C[0,1] = \{ u : [0,1] \to \mathbb{R} \mid u \text{ συνεχής} \},$$

$$C^1[0,1] = \{ u : [0,1] \to \mathbb{R} \mid u \text{ διαφορίσιμη με } u' \in C[0,1] \},$$

$$X = \{ u \in C^1[0,1] : u(0) = 0 \}$$

εφοδιασμένους με τη νόρμα $\|u\|_\infty = \max\limits_{t \in [0,1]} |u(t)|$.

Θεωρούμε τον τελεστή

$$T : (X, \|\cdot\|_\infty) \to (Y, \|\cdot\|_\infty), \quad T(u) = u'.$$

Προφανώς, T γραμμικός κ'

$$\ker T = \{u \in X : u' \equiv 0\} = \{u \in C^1[0,1] : u' \equiv 0,\ u(0) = 0\} = \{0\}.$$

Παρ' όλ' αυτά, T ασυνεχής στο 0. Πράγματι· θέτουμε

$$u_n(t) = t^n/n, \quad t \in [0,1], \quad n = 1, 2, \dots$$

Τότε, $(u_n) \subset X$, $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$, ενώ

$$\|T(u_n)\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |t^{n-1}| = 1 \quad \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0.$$

Ασθενής τοπολογία παραγόμενη από οικογένεια γραμμικών συναρτησιακών.

Έστω X γραμμικός χώρος. Θέτουμε

$$X^{\#} = \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ γραμμική} \}.$$

Παρατήρηση: $\forall f \in X^{\#}$, $\forall \varepsilon > 0$, το σύνολο

$$f^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon))$$

είναι ισορροπημένο, απορροφούν κ' περιέχει το 0.

Πράγματι·

- $\forall \lambda \in [-1, 1]$, $\forall x \in f^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon))$, έχουμε

$$|f(\lambda x)| = |\lambda| |f(x)| \leq |f(x)| < \varepsilon .$$

• Έστω $x \in X$ με $f(x) \neq 0$. Θέτουμε $\delta = \varepsilon / |f(x)|$.

Για $|\lambda| < \delta$, έχουμε

$$|f(\lambda x)| = |\lambda| |f(x)| < \delta |f(x)| = \varepsilon.$$

<u>Θεώρημα 14:</u> Έστω $\Phi \subset X^{\#}$ που χωρίζει σημεία, δηλ.

$\forall\ x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$, $\exists f \in \Phi \mid f(x_1) \neq f(x_2)$.

Τότε, $\exists!$ τοπολογία τ_Φ στον X, ώστε:

<u>(i)</u> (X, τ_Φ) τ.γ.χ.

<u>(ii)</u> $\forall f \in \Phi$, η $f : (X, \tau_\Phi) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

<u>(iii)</u> Εάν τ τοπολογία στον X ώστε $f : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ συνεχής $\forall f \in \Phi$, τότε $\tau_\Phi \subset \tau$.

Απόδειξη: Θέτουμε

$$\mathcal{J} = \{ f^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon)) : f \in \Phi,\ \varepsilon > 0 \},$$

$\beta = \{$τομές πεπερασμένου πλήθους μελών της $\mathcal{J}\}$ $(\supset \mathcal{J})$.

Θα δ.ο. η β ικανοποιεί τις συνθήκες (i)–(iv) του Θ. 10.

Πράγματι· κάθε μέλος της β είναι ισορροπημένο, απορροφούν κ' περιέχει το 0. Επιπλέον, αν $x \neq 0$, $\exists f \in \Phi \mid f(x) \neq f(0) = 0$ (αφού η Φ χωρίζει σημεία). Θέτουμε $\varepsilon = |f(x)|/2 > 0$ κ'

$V = f^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon)) \in \mathcal{J} \subset \beta$. Τότε, $x \notin V$, διότι $|f(x)| = 2\varepsilon > \varepsilon$. Άρα,

$$\bigcap \{ V : V \in \beta \} = \{0\}.$$

Επίσης, προφανώς $\underline{\forall\ V, W \in \beta,\ \text{ισχύει}\ V \cap W \in \beta}$.

Τέλος, έστω $V \in \beta$, δηλ.

$\exists\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k > 0$, $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \Phi\ (k \geq 1)$ ώστε

$$V = \bigcap_{j=1}^{k} f_j^{-1}\left((-\varepsilon_j, \varepsilon_j)\right).$$

Θέτουμε

$$W = \bigcap_{j=1}^{k} f_j^{-1}\left((-\varepsilon_j/2, \varepsilon_j/2)\right) \in \beta.$$

Τότε, $\forall\ x_1, x_2 \in W$, $\forall\ j \in \{1, 2, \ldots, k\}$,

$$|f(x_1+x_2)| = |f(x_1)+f(x_2)| \leq |f(x_1)| + |f(x_2)|$$

$$< \varepsilon_j/2 + \varepsilon_j/2 = \varepsilon_j$$

$\Longrightarrow \quad x_1+x_2 \in V \quad \Longrightarrow \quad \underline{W+W \subset V}.$

Σύμφ. με το Θ.10, $\exists!$ τοπολογία τ_Φ στον X ώστε (X,τ_Φ) τ.γ.χ. κ' $\mathcal{B}$ βάση περιοχών του 0.

• $\forall f \in \Phi$, $\forall \varepsilon>0$, ισχύει $f^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon)) \in \mathcal{S} \subset \mathcal{B}$

$\Longrightarrow \quad f^{-1}((-\varepsilon,\varepsilon))$ περιοχή του 0, $\forall \varepsilon>0$

$\Longrightarrow \quad f$ συνεχής στο 0 $\Longrightarrow$ $f:(X,\tau_\Phi) \to \mathbb{R}$ συνεχής.

• Έστω τ τοπολογία στον X ώστε $\forall f \in \Phi$, η

$f : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Θα δ.ο. $\tau_\Phi \subset \tau$.

Έστω $G \in \tau_\Phi$, $x \in G$ $\xRightarrow{[\beta\ \tau_\Phi\text{-}}$ $\exists\, V \in \beta \mid x + V \subset G$.

-βάση περιοχών του 0]

$\exists\, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k > 0$, $f_1, f_2, \dots, f_k \in \Phi$ $(k \geq 1)$ ώστε

$$V = \bigcap_{j=1}^{k} f_j^{-1}\big((-\varepsilon_j, \varepsilon_j)\big).$$

Τότε, $z \in x + V \iff \forall j \in \{1, 2, \dots, k\}$, $|f_j(z - x)| < \varepsilon_j \iff$

$\Leftrightarrow \forall j, \ |f_j(z) - f_j(x)| < \varepsilon_j$

$\Leftrightarrow \quad z \in \bigcap_{j=1}^{k} f_j^{-1}\left(\left(f_j(x)-\varepsilon_j, \ f_j(x)+\varepsilon_j\right)\right)$

δηλ. $\quad x+V = \bigcap_{j=1}^{k} f_j^{-1}\left(\left(f_j(x)-\varepsilon_j, \ f_j(x)+\varepsilon_j\right)\right) \in \tau$

κ' $\quad x+V \subset G$.

Άρα, $G \in \tau$. $\boxtimes$

<u>Ορισμός 15:</u> Έστω X γραμμικός χώρος κ' $\Phi \subset X^{\#}$ που χωρίζει σημεία. Η τοπολογία τ_Φ που προκύπτει από το Θ.14, ονομάζεται <u>ασθενής τοπολογία του X που παράγεται από την Φ.</u>

Η <u>τ_Φ είναι η μικρότερη τοπολογία στον X ώστε $\forall f \in \Phi$, η $f : (X, \tau_\Phi) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής κ' (X, τ_Φ) τ.γ.χ.</u>

<u>Πρόταση 16:</u> Έστω $\Phi \subset X^{\#}$ που χωρίζει σημεία κ' $(x_n) \subset X$. Τότε, $x_n \xrightarrow{\tau_\Phi} x$ ανν $\forall f \in \Phi$, $f(x_n) \to f(x)$.

Απόδειξη (ως άσκηση).

Για τη συνέχεια, θα χρειαστούμε κάποια προαπαιτούμενα από τη Γραμμική Άλγεβρα.

Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ γραμμικό κ'

$$n = \left(f(e_1), f(e_2), f(e_3) \right),$$

$e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

Τότε, $\forall\ x = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i f(e_i) = \langle n, x \rangle,$$

όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ το ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.

Δηλ. το f καθορίζεται μονοσήμαντα από το διάνυσμα n.

Ταύτιση: $f \equiv n$.

$\mathrm{Ker}\, f = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \langle n, x \rangle = 0 \}$ = το επίπεδο (Π) που διέρχεται από το $O(0,0,0)$ κ' είναι κάθετο στο n.

Έστω $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ γραμμικά με

$$\mathrm{Ker}\, f_1 \cap \mathrm{Ker}\, f_2 \subset \mathrm{Ker}\, f_3 .$$

Ποιά σχέση συνδέει τα f_1, f_2, f_3?

$\forall i$, έστω n_i το διάνυσμα που καθορίζει το f_i κ'

$(\Pi_i) \equiv$ το επίπεδο που διέρχεται από το O κ' είναι $\perp n_i$.

Τότε, $\forall i$, $\ker f_i \equiv \Pi_i$.

Η τομή των επιπέδων $(\Pi_1), (\Pi_2)$ είναι μια ευθεία (ε).

Τότε, $(\varepsilon) \perp n_1, n_2$

$\Rightarrow$ <u>$(\varepsilon) \perp$ επίπεδο που ορίζουν τα n_1, n_2.</u>

Αλλά, $(\varepsilon) = (\Pi_1) \cap (\Pi_2) \subset (\Pi_3) \Rightarrow$ <u>$n_3 \perp (\varepsilon)$</u>

$\Rightarrow$ <u>$n_3 \parallel$ επίπεδο που ορίζουν τα n_1, n_2</u>

$\Rightarrow \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \mid n_3 = c_1 n_1 + c_2 n_2$.

Με κίνητρο την παραπάνω διαδικασία, διατυπώνουμε την παρακάτω

<u>Πρόταση 17:</u> Έστω X γραμμ. χώρος κ' $f_j \in X^{\#}$, $1 \leq j \leq n$ $(n \geq 1)$, $g \in X^{\#}$ ώστε $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker} f_j \subset \operatorname{Ker} g$.

Τότε, $g \in \langle f_j \mid 1 \leq j \leq n \rangle$, δηλ. $\exists\, c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R} \mid$

$$g = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j .$$

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το παρακάτω

Λήμμα 18: Εάν $f, g \in X^{\#}$ με $\ker f \subset \ker g$, τότε $\exists\, c \in \mathbb{R} \mid g = c \cdot f$.

Απόδειξη:

- Εάν $f \equiv 0$, τότε $\ker f = X \Rightarrow \ker g = X \Rightarrow g \equiv 0$ (ισχύει).
- Έστω $f \not\equiv 0$ κι' $x_0 \in X$ με $f(x_0) \neq 0$.

$\forall x \in X$, $f(x_0)x - f(x)x_0 \in \ker f \subset \ker g$

$$\Rightarrow f(x_0)g(x) = f(x)g(x_0) \Rightarrow g(x) = \frac{g(x_0)}{f(x_0)} f(x).$$

Θέτουμε $c = g(x_0)/f(x_0)$. Τότε, $g = c \cdot f$. $\boxtimes$

Απόδειξη Πρότ. 17:

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο n.

- Για $n=1$, ισχύει λόγω του Λήμματος 18.
- Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο $n \geq 1$.

Έστω $(f_j)_{j=1}^{n+1} \subset X^\#$ με

$$\bigcap_{j=1}^{n+1} \ker f_j \subset \ker g.$$

Θέτουμε $Z = \bigcap_{j=1}^{n} \ker f_j$. Τότε,

$$\ker(f_{n+1}|_Z) = Z \cap \ker f_{n+1} \subset \ker(g|_Z)$$

[Λήμμα 18] $\Longrightarrow$ $\exists\, c_{n+1} \in \mathbb{R} \mid g|_Z = c_{n+1} f_{n+1}|_Z$

$\Longrightarrow$ $Z \subset \ker(g - c_{n+1} f_{n+1})$

[Υπόθεση επαγωγής] $\Longrightarrow$ $\exists\, c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R} \mid g - c_{n+1} f_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j$

$\Longrightarrow$ $g = \sum_{j=1}^{n+1} c_j f_j$ $\Longrightarrow$ ισχύει η' για $n+1$. $\boxtimes$

Πρόταση 19: Έστω $(f_j)_{j=1}^{n} \subset X^{\#}$ με $n < \dim X$. Τότε,
$$\bigcap_{j=1}^{n} \ker f_j \neq \{0\}.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση
$$F : X \to \mathbb{R}^n, \qquad F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)), \quad x \in X.$$
Εφόσον $\dim X > n$, η F <u>δεν είναι 1-1</u>, οπότε $\ker F \neq \{0\}$
ή $\bigcap_{j=1}^{n} \ker f_j \neq \{0\}$. $\boxtimes$

Σχόλιο: Η Πρότ. 19 μας λέει ότι αν σε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα το πλήθος των αγνώστων είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των εξισώσεων, το σύστημα έχει κ΄ μη μηδενικές λύσεις.

<u>Ορισμός 20:</u> Έστω (X,τ) τ.γ.χ. Ο <u>τοπολογικός δυϊκός</u> του (X,τ) είναι το σύνολο

$$(X,\tau)^* = \{ f:(X,\tau)\to \mathbb{R} \mid f \text{ γραμμική, συνεχής} \}.$$

Προφανώς $(X,\tau)^* \subset X^{\#}$.

Έστω X γραμμικός χώρος κ΄ $\Phi \subset X^{\#}$ που χωρίζει σημεία στον X.

Η παρακάτω Πρόταση περιγράφει τον τοπολογικό δυϊκό του (X,τ_Φ).

Πρόταση 21: Ισχύει
$$(X,\tau_\Phi)^* = \langle \Phi \rangle,$$
δηλ. αν $g:(X,\tau_\Phi)\to\mathbb{R}$ γραμμική συνεχής, τότε $\exists\, c_1,c_2,\dots,c_n\in\mathbb{R}$, $\exists\, f_1,f_2,\dots,f_n\in\Phi$ ώστε $g=\sum_{j=1}^{n} c_j f_j$.

Απόδειξη: Έστω $g:(X,\tau_\Phi)\to\mathbb{R}$ γραμμική συνεχής. Το σύνολο
$$\mathcal{U}=\{x\in X: |g(x)|<1\} = g^{-1}((-1,1))$$
είναι τ_Φ-ανοικτό με $0\in\mathcal{U}$. Τότε,

$\exists\, \varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n>0$, $\exists\, f_1,f_2,\dots,f_n\in\Phi$ ώστε
$$\bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}((-\varepsilon_j,\varepsilon_j)) = V \subset \mathcal{U}.$$

Θέτουμε $Z = \bigcap_{j=1}^{n} \ker f_j$ ($=$ <u>γρ. αμμι. υπόχ. του X !</u>)

Τότε, $Z \subset V \subset \mathcal{U}$.

Έστω $x \in Z$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, ισχύει $kx \in Z \Rightarrow kx \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow |g(kx)| < 1 \Rightarrow |g(x)| < \frac{1}{k}$, $\forall k \geq 1 \Rightarrow g(x) = 0$.

Άρα, $Z \subset \ker g \xRightarrow{[\text{Πρόταση } 17]} \exists\, c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R} \mid$

$$g = \sum_{j=1}^{n} c_j f_j \in \langle \Phi \rangle . \qquad \boxtimes$$

Πρόταση 22: Εάν X απειροδιάστατος, τότε ο (X, τ_Φ) δε **νορμάρεται**, δηλ. δεν υπάρχει νόρμα $\|\cdot\|$ στον X ώστε

$$\tau_\Phi = \tau_{\|\cdot\|},$$

όπου $\tau_{\|\cdot\|}$ η τοπολογία που επάγεται από τη νόρμα $\|\cdot\|$.

Απόδειξη: Έστω αντίθετα ότι $\exists$ νόρμα $\|\cdot\|$ στον X ώστε

$$\tau_\Phi = \tau_{\|\cdot\|}.$$

Το σύνολο $B_X = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ είναι $\|\cdot\|$-ανοικτό, άρα κ

τ_Φ-ανοικτό με $0 \in B_X \implies \exists\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n > 0$,

$\exists\ f_1, f_2, \ldots, f_n \in \Phi$ $(n \geq 1)$ ώστε

$$\underbrace{\bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}\big((-\varepsilon_j, \varepsilon_j)\big)}_{V} \subset B_X .$$

Τότε, $$\underbrace{\bigcap_{j=1}^{n} \ker f_j}_{Z} \subset V \subset B_X .$$

Ο Z είναι γραμμικός υπόχωρος κ' επειδή $\dim X = \infty > n$, έχουμε ότι $Z \neq \{0\}$ (βλ. πρότ. 19).

Έστω $x_0 \in Z$, με $x_0 \neq 0$. Τότε, $\frac{2}{\|x_0\|} \cdot x_0 \in Z \subset B_X$

$$\Rightarrow \left\| \frac{2}{\|x_0\|} x_0 \right\| < 1$$

$$\Rightarrow \quad 2 < 1 \text{ (ΑΤΟΠΟ)!} \qquad \boxtimes$$

<u>Σχόλιο!</u> Από την απόδειξη της Πρότ. 22 προκύπτει ότι <u>κάθε τ_φ-περιοχή του 0 περιέχει κάποιον γραμμικό υπόχωρο του X (μη τετριμμένο, στην περίπτωση που $\dim X = \infty$).</u>

Θα αποδειχθεί αργότερα (αρχείο "w- τοπολογία" - Πρότ. 13) το παρακάτω:

"Εάν $\Phi \subset X^{\#}$ αριθμήσιμη που χωρίζει σημεία, τότε ο (X, τ_ϕ) είναι μετρικοποιήσιμος".

<u>Παραδείγματα</u>:

<u>(i)</u> Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα κ' $\Phi = (X, \|\cdot\|)^* =$
$= \{ f : (X, \|\cdot\|) \to \mathbb{R} \mid f$ γραμμική, $\|\cdot\|$- συνεχής$\}$.

Τότε, $\Phi \subset X^{\#}$ κ' η Φ χωρίζει σημεία, λόγω του Θ. Hahn - Banach (αναλυτική μορφή).

Η τ_Φ ονομάζεται <u>ασθενής τοπολογία του $(X, \|\cdot\|)$</u>
κ' συμβολίζεται με

$$\underline{\tau_w} \quad \text{ή απλά} \quad (\underline{w}).$$

(Θα μελετηθεί αργότερα.)

<u>(ii)</u> <u>(Τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης)</u>.

Θέτουμε
$$X = \{ u : [0,1] \to \mathbb{R} \mid u \text{ συνάρτηση} \},$$

$$\delta_t : X \to \mathbb{R}, \quad \delta_t(u) = u(t), \quad u \in X, \quad t \in [0,1],$$

$$\Phi = \{ \delta_t : t \in [0,1] \}.$$

Προφανώς, $\Phi \subset X^{\#}$ κ' η Φ χωρίζει σημεία στον X.

Εάν $(u_n) \subset X$, $u \in X$, τότε λόγω της Πρότασης 16

$$u_n \xrightarrow{\tau_\Phi} u \quad \text{ανν} \quad \delta_t(u_n) \longrightarrow \delta_t(u), \ \forall\, t \in [0,1]$$

$$\text{ανν} \quad u_n(t) \to u(t), \quad \forall\, t \in [0,1].$$