Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής & Υπολογιστών

ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ ΚΑΙ ΕΥΦΥΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΔΙΚΤΥΑ HOPFIELD

Άσκηση 1

Να δειχθεί ότι, σε διακριτό δίκτυο Hopfield με διπολικές τιμές κόμβων, τα αντίθετα (συμπληρωματικά) των αποθηκευμένων προτύπων αποτελούν επίσης σημεία ισορροπίας του δικτύου. Ισχύει το ίδιο για δυαδικές τιμές κόμβων;

Άσκηση 2

Θεωρούμε διακριτό δίκτυο Hopfield με διπολικές τιμές κόμβων (συνάρτηση πρόσημο).

Ο πίνακας βαρών ***W*** του δικτύου είναι:

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

α) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα μεταβάσεων του δικτύου (κατευθυνόμενος γράφος με κορυφές τις δυνατές καταστάσεις και ακμές τις δυνατές μεταβάσεις), και σε κάθε κορυφή του διαγράμματος να σημειωθεί η αντίστοιχη τιμή της ενέργειας του δικτύου. Υποθέτουμε ασύγχρονη λειτουργία του δικτύου.

β) Με βάση τις τιμές της ενέργειας να προσδιοριστούν τα πιθανά πρότυπα που ενδεχομένως έχουν αποθηκευτεί στο δίκτυο. Για τα πρότυπα αυτά να κατασκευαστεί ο πίνακας βαρών σύμφωνα με τον κανόνα του Hebb και να συγκριθεί με τον δεδομένο πίνακα.

γ) Να υλοποιηθεί μια ακολουθία ασύγχρονων μεταβάσεων από υψηλή σε χαμηλή ενέργεια. Ξεκινώντας από την ίδια αρχική κατάσταση να υλοποιηθεί σύγχρονη ενημέρωση. Σημειώνεται μείωση της ενέργειας στην περίπτωση αυτή;

Απάντηση

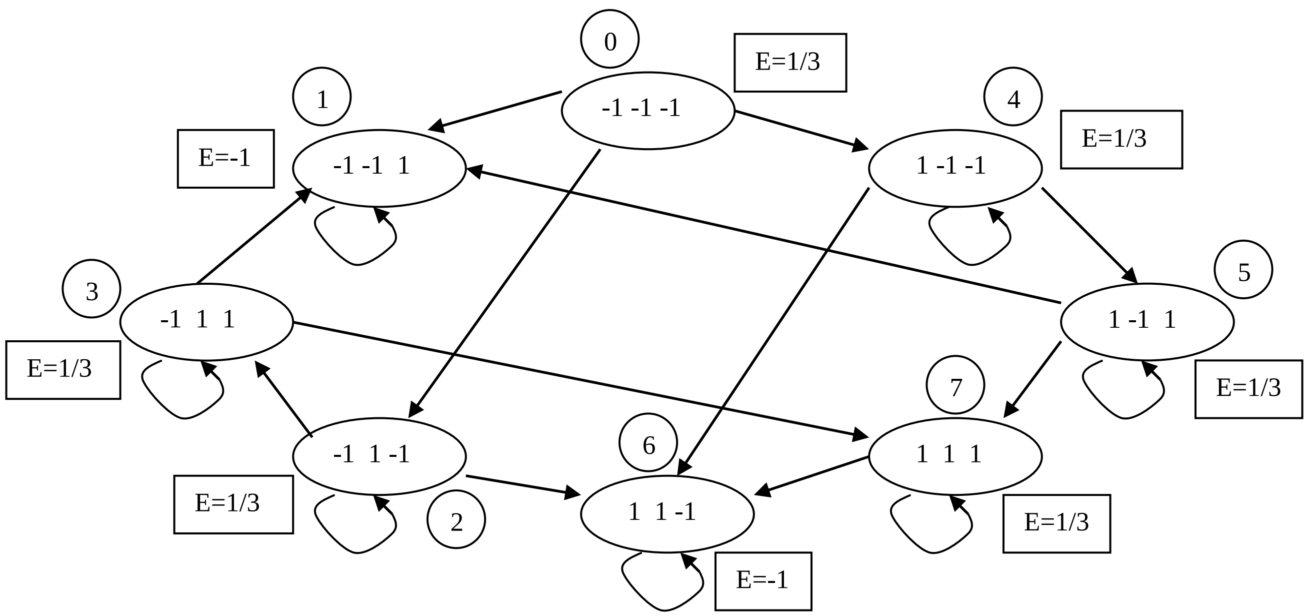
α) <u>Συνάρτηση ενέργειας</u>

$$E = -1/2\, \Sigma_i\, \Sigma_j\, w_{ij}\, y_i\, y_j = -1/2\,(1/3\, y_1 y_2 - 1/3\, y_1 y_3 + 1/3\, y_2 y_1 - 1/3\, y_2 y_3 - 1/3\, y_3 y_1 - 1/3\, y_3 y_2)$$
$$= 1/3\,(-y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_1 y_3)$$

Πίνακας μεταβάσεων

Κατάσταση		Νέα κατάσταση (με επιλογή κόμβου)			Ενέργεια
#	y_1 y_2 y_3	Κόμβος 1	Κόμβος 2	Κόμβος 3	
0	-1 -1 -1	4	2	1	1/3
1	-1 -1 1	1	1	1	-1
2	-1 1 -1	6	2	3	1/3
3	-1 1 1	7	1	3	1/3
4	1 -1 -1	4	6	5	1/3
5	1 -1 1	1	7	5	1/3
6	1 1 -1	6	6	6	-1
7	1 1 1	7	7	6	1/3

Διάγραμμα μεταβάσεων



Παρατήρηση: Οι δυνατές μεταβάσεις εξαρτώνται και από τη μορφή της συνάρτησης εξόδου $f(u)$. Ειδικότερα, εφόσον $f(0)=1$, πραγματοποιούνται και μεταβάσεις μεταξύ καταστάσεων ίσης ενέργειας. Η συνάρτηση εξόδου θα μπορούσε να οριστεί διαφορετικά, ώστε να αποκλείονται μεταβάσεις μεταξύ καταστάσεων ίσης ενέργειας (π.χ. ορίζοντας ότι για $u=0$ η κατάσταση του κόμβου δεν μεταβάλλεται).

β)

- Τα πρότυπα που πιθανώς έχουν αποθηκευτεί στο δίκτυο είναι είναι τα τοπικά ελάχιστα της συνάρτησης ενέργειας:

  [-1, -1, 1] και [1, 1, -1].

Τα πρότυπα αυτά είναι συμπληρωματικά, όπως ήταν αναμενόμενο. (Σύμφωνα με τη Χεμπιανή μάθηση, όταν αποθηκεύεται ένα πρότυπο, αποθηκεύεται αυτόματα και το συμπληρωματικό του.)

Ελεγχος. Για τα αποθηκευμένα πρότυπα πρέπει να ισχύει: $f(\boldsymbol{W}\,\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}$.

- Κανόνας του Hebb:

  $w_{ii} = 0 \,, \ \forall\, i$

  $w_{ij} = 1/N \, \Sigma_k \, \xi_i^k \, \xi_j^k, \ \ i \neq j$ (άθροιση για όλα τα πρότυπα $\boldsymbol{\xi}^k$).

Αν εφαρμόσουμε τον κανόνα για καθένα από τα δύο πρότυπα χωριστά, βρίσκουμε και στις δύο περιπτώσεις πίνακα βαρών ίδιο με τον πίνακα $\boldsymbol{W}$ που δόθηκε. Αν εφαρμοσουμε τον κανόνα για τα δύο πρότυπα μαζί, θα βρούμε πίνακα βαρών ίσο με $2\boldsymbol{W}$ (κάτι που ουσιαστικά δεν αλλάζει τη λειτουργία του δικτύου).

γ) Για παράδειγμα, θεωρούμε την ακολουθία ασύγχρονων μεταβάσεων:

$$\begin{array}{ccccc} [1, -1, 1] & \rightarrow & [1, 1, 1] & \rightarrow & [1, 1, -1] \\ E=1/3 & & E=1/3 & & E=-1 \end{array}$$

Πραγματοποιώντας σύγχρονη ενημέρωση από την ίδια αρχική κατάσταση έχουμε:

$$\begin{array}{ccccc} [1, -1, 1] & \rightarrow & [-1, 1, 1] & \rightarrow & [1, -1, 1] \\ E=1/3 & & E=1/3 & & E=1/3 \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι δεν έχουμε μείωση της ενέργειας και επιπλέον το δίκτυο πραγματοποιεί ταλάντωση.

Άσκηση 3

Ένα διακριτό δίκτυο Hopfield με διπολική συνάρτηση εξόδου (πρόσημο) έχει πίνακα βαρών:

$$1/4 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Με βάση τις τιμές της ενέργειας να προσδιοριστούν τα πρότυπα που έχουν αποθηκευτεί στο δίκτυο.
Χωρίς να θεωρούνται γνωστά τα ήδη αποθηκευμένα πρότυπα, να τροποποιηθεί ο πίνακας βαρών ώστε να αποθηκευτεί και το πρότυπο [1, -1, -1, 1].

Απάντηση

Συνάρτηση ενέργειας

$$E = -1/2 \, \Sigma_i \, \Sigma_j \, w_{ij} \, y_i \, y_j \ = \ -1/2 \, y_1 \, y_2 - 1/2 \, y_3 \, y_4$$

Αποθηκευμένα πρότυπα: [1, 1, 1,1], [-1, -1, -1, -1], [1, 1, -1, -1], [-1, -1, 1, 1] (E_{min}=-1)

$$1/4 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$+$

$$1/4 \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$=$

$$1/4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 4

Θεωρούμε διακριτό δίκτυο Hopfield N κόμβων με διπολικές τιμές κόμβων (πρόσημο). Στο δίκτυο αποθηκεύονται πρότυπα σύμφωνα με τον κανόνα του Hebb. Θα υποθέσουμε ότι τα βάρη προσδιορίζονται από τη γενική σχέση

$$w_{ki} = 1/N\ \Sigma_m\, \xi_k^m\, \xi_i^m, \quad \forall\ k, i$$

δηλαδή υπάρχουν και αυτοβρόχοι.

α) Στο δίκτυο αποθηκεύονται M πρότυπα $\boldsymbol{\xi}^m$. Να δειχθεί ότι αν όλα τα αποθηκευμένα πρότυπα είναι αμοιβαίως ορθογώνια ($\Sigma_i\, \xi_i^l\, \xi_i^m = 0,\ \forall\ l \neq m$), τότε κάθε αποθηκευμένο πρότυπο είναι σημείο ισορροπίας του δικτύου. Η ιδιότητα αυτή ισχύει τόσο για ασύγχρονη όσο και για σύγχρονη ενημέρωση.

β) Στο δίκτυο αποθηκεύουμε ένα μόνο πρότυπο $\boldsymbol{\xi}$. Έστω ότι το δίκτυο ξεκινά από μια αρχική κατάσταση $\boldsymbol{y}$. Να δειχθεί ότι αν οι περισσότεροι κόμβοι του δικτύου έχουν σωστή αρχική τιμή y_i σε σχέση με το αποθηκευμένο πρότυπο, τότε το δίκτυο θα καταλήξει στο πρότυπο $\boldsymbol{\xi}$**,** διαφορετικά θα καταλήξει στο αντίθετο πρότυπο $\boldsymbol{-\xi}$. Η ιδιότητα αυτή ισχύει τόσο για ασύγχρονη όσο και για σύγχρονη ενημέρωση.

Απάντηση

α) Σύμφωνα με τον κανόνα του Hebb έχουμε

$$w_{ki} = 1/N\ \Sigma_m\, \xi_k^m\, \xi_i^m$$

Αν y_k είναι η τρέχουσα τιμή του κόμβου k, συμβολίζουμε με $u_k = \Sigma_i\, w_{ki}\, y_i$ την ενεργοποίηση του κόμβου k και με y'_k τη νέα τιμή του κόμβου k μετά την ενημέρωση. Έστω ότι αρχική κατάσταση του δικτύου είναι το αποθηκευμένο πρότυπο $\boldsymbol{\xi}^m$.
Έχουμε

$$\begin{aligned} y'_k &= f(\underline{u_k}) = f(\Sigma_i\, w_{ki}\, \xi_i^m) = f(1/N\ \Sigma_i\, \Sigma_l\, \xi_k^l\, \xi_i^l\, \xi_i^m) = f(1/N\ \Sigma_l\, \xi_k^l\, \Sigma_i\, \xi_i^l\, \xi_i^m) \\ &= f(1/N\ \xi_k^m\, \Sigma_i\, \xi_i^m\, \xi_i^m + 1/N\ \Sigma_{l\neq m}\, \xi_k^l\, \Sigma_i\, \xi_i^l\, \xi_i^m) = f(1/N\ \xi_k^m\, N + 0) = f(\xi_k^m) = \xi_k^m \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ορθογωνιότητα των αποθηκευμένων προτύπων.
Ο υπολογισμός του y'_k έγινε ανεξάρτητα από ασύγχρονη ή σύγχρονη ενημέρωση.

β) Σύμφωνα με τον κανόνα του Hebb έχουμε

$$w_{ki} = 1/N\ \xi_k\, \xi_i$$

Για αρχική κατάσταση του δικτύου $\boldsymbol{y}$ έχουμε

$y'_k = f(u_k) = f(\Sigma_i\, w_{ki}\, y_i) = f(1/N\ \Sigma_i\, \xi_k\, \xi_i\, y_i) = f(1/N\ \xi_k\, \Sigma_i\, \xi_i\, y_i)$

Αν οι περισσότερες τιμές ξ_i και y_i συμπίπτουν, τότε $\Sigma_i\, \xi_i\, y_i > 0$, αλλιώς $\Sigma_i\, \xi_i\, y_i < 0$, συνεπώς αντίστοιχα θα είναι $y'_k = \xi_k$ ή $y'_k = -\xi_k$ για όλα τα k.

Άσκηση 5

Θεωρούμε διακριτό δίκτυο Hopfield N κόμβων με διπολικές τιμές, στο οποίο αποθηκεύουμε M πρότυπα $\boldsymbol{\xi}^m$ σύμφωνα με τον κανόνα του Hebb. Θα υποθέσουμε ότι τα βάρη προσδιορίζονται από τη γενική σχέση

$w_{ki} = 1/N\ \Sigma_m\, \xi_k^m\, \xi_i^m,\ \ \forall\ k, i$

δηλαδή υπάρχουν και αυτοβρόχοι.

Να δειχθεί ότι η ενέργεια του δικτύου μπορεί να εκφραστεί ως

$$E = -\frac{N}{2}\sum_{m=1}^{M} q_m^2$$

όπου q_m είναι η επικάλυψη ανάμεσα στην τρέχουσα κατάσταση $\boldsymbol{y}$ του δικτύου και το αποθηκευμένο πρότυπο $\boldsymbol{\xi}^m$:

$$q_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i\, \xi_i^m$$

Απάντηση

$E = -1/2\ \Sigma_k\, \Sigma_i\, w_{ki}\, y_k\, y_i = -1/2\ \Sigma_k\, \Sigma_i\ 1/N\ \Sigma_m\, \xi_k^m\, \xi_i^m\, y_k\, y_i = -1/2\ 1/N\ \Sigma_m\, \Sigma_k\, \xi_k^m\, y_k\, \Sigma_i\, \xi_i^m\, y_i$

$= -1/2\ 1/N\ \Sigma_m\, Nq_m\, Nq_m = -N/2\ \Sigma_m\, q_m^2$

Άσκηση 6

α) Σε διακριτό δίκτυο Hopfield N κόμβων αποθηκεύουμε M διπολικά πρότυπα $\boldsymbol{\xi}^m$ σύμφωνα με τον κανόνα του Hebb. Υποθέτουμε ότι τα βάρη προσδιορίζονται από τη γενική σχέση

$w_{ki} = 1/N\ \Sigma_m\, \xi_k^m\, \xi_i^m,\ \ \forall\ k, i$

δηλαδή υπάρχουν και αυτοβρόχοι.

Να δειχθεί ότι η μεταβολή ΔE^k της ενέργειας του δικτύου λόγω αλλαγής της κατάστασης του κόμβου k μπορεί να εκφραστεί ως

$$\Delta E^k = 2y_k \sum_{m=1}^{M} q_m\, \xi_k^m$$

όπου q_m η επικάλυψη της τρέχουσας κατάστασης $\boldsymbol{y}$ του δικτύου με το αποθηκευμένο πρότυπο $\boldsymbol{\xi}^m$

$$q_m = \sum_{i=1}^{N} y_i\, \xi_i^m$$

β) Θεωρούμε δίκτυο Hopfield 5 κόμβων στο οποίο έχουμε αποθηκεύσει τα παρακάτω πρότυπα σύμφωνα με τον κανόνα του Hebb:

$\boldsymbol{\xi}^1$ = [-1, 1, -1, -1, 1], $\boldsymbol{\xi}^2$ = [1, -1, -1, 1, 1], $\boldsymbol{\xi}^3$ = [-1, 1, 1, 1, -1]

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος α) να επιβεβαιώσετε ότι το πρότυπο $\boldsymbol{\xi}^1$ αντιστοιχεί σε τοπικό ελάχιστο της ενέργειας.

Απάντηση

α) $\Delta E^k = -1/2\ \Sigma_{i\neq k}\ \Sigma_{j\neq k}\ w_{ij}\ y_i\ y_j - \Sigma_i\ w_{ki}\ y'_k\ y_i + 1/2\ \Sigma_{i\neq k}\ \Sigma_{j\neq k}\ w_{ij}\ y_i\ y_j + \Sigma_i\ w_{ki}\ y_k\ y_i = 2\ y_k\ \Sigma_i\ w_{ki}\ y_i$

$= 2\ y_k\ \Sigma_i\ \Sigma_m\ \xi_k^m\ \xi_i^m\ y_i = 2\ y_k\ \Sigma_m\ \xi_k^m\ \Sigma_i\ y_i\ \xi_i^m = 2\ y_k\ \Sigma_m\ \xi_k^m\ q_m$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $y'_k = -y_k$.

β) Θεωρώντας ως τρέχουσα κατάσταση του δικτύου το πρότυπο $\boldsymbol{\xi}^1$ έχουμε

$q_1 = 5,\quad q_2 = -1,\quad q_3 = -1$

και

$\Delta E^1 = 10,\ \ \Delta E^2 = 10,\ \ \Delta E^3 = 10,\ \ \Delta E^4 = 14,\ \ \Delta E^5 = 10,$

δηλαδή, $\Delta E^k > 0,\ \forall\ k$.

Άσκηση 7

Θεωρούμε διακριτό δίκτυο Hopfield N κόμβων με διπολικές τιμές (πρόσημο), στο οποίο αποθηκεύουμε M πρότυπα $\boldsymbol{\xi}^m$ σύμφωνα με τον κανόνα του Hebb. Υποθέτουμε ότι τα βάρη προσδιορίζονται από τη γενική σχέση

$w_{ki} = 1/N\ \Sigma_m\ \xi_k^m\ \xi_i^m,\ \ \forall\ k, i,$

δηλαδή υπάρχουν και αυτοβρόχοι.

Να δειχθεί ότι ένα αποθηκευμένο πρότυπο $\boldsymbol{\xi}^p$ αποτελεί ευσταθή κατάσταση του δικτύου αν ισχύει

$|1/N\ \Sigma_i\ \Sigma_{m\neq p}\ \xi_k^m\ \xi_i^m\ \xi_i^p| < 1,\ \forall i.$

Απάντηση

Σύμφωνα με τον κανόνα του Hebb έχουμε $w_{ki} = 1/N\ \Sigma_m\ \xi_k^m\ \xi_i^m$

Έστω ότι αρχική κατάσταση του δικτύου είναι το αποθηκευμένο πρότυπο $\boldsymbol{\xi}^p$. Έχουμε

$y'_k = f(u_k) = f(\Sigma_i\ w_{ki}\ \xi_i^p) = f(1/N\ \Sigma_i\ \Sigma_m\ \xi_k^m\ \xi_i^m\ \xi_i^p) = f(1/N\ \Sigma_m\ \xi_k^m\ \Sigma_i\ \xi_i^m\ \xi_i^p)$

$= f(1/N\ \xi_k^p\ \Sigma_i\ \xi_i^p\ \ \xi_i^p + 1/N\ \Sigma_{m\neq p}\ \xi_k^m\ \Sigma_i\ \xi_i^m\ \xi_i^p)$

$= f(1/N\ \xi_k^p\ N + 1/N\ \Sigma_i\ \Sigma_{m\neq p}\ \xi_k^m\ \xi_i^m\ \xi_i^p) = f(\xi_k^p + 1/N\ \Sigma_i\ \Sigma_{m\neq p}\ \xi_k^m\ \xi_i^m\ \xi_i^p) = \xi_k^p$

αφού, στην περίπτωση που τα $1/N\ \Sigma_i\ \Sigma_{m\neq p}\ \xi_k^m\ \xi_i^m\ \xi_i^p$ και ξ_k^p είναι ετερόσημα, το όρισμα της f θα έχει το πρόσημο του ξ_k^p σύμφωνα με την υπόθεση.

Άσκηση 8

Θεωρούμε διακριτό δίκτυο Hopfield N κόμβων με συνάρτηση ενεργοποίησης: $y_k = f(u_k) = 1$ αν $u_k \geq 0$ και -1 αλλιώς, όπου $u_k=\Sigma_j\ w_{kj}\ y_j$. Στο δίκτυο αποθηκεύουμε M πρότυπα $\boldsymbol{\xi}^m$ σύμφωνα με τον κανόνα του Hebb. Υποθέτουμε ότι τα βάρη προσδιορίζονται από τη γενική σχέση:

$w_{kj} = 1/N\ \Sigma_m\ \xi_k^m\ \xi_j^m,\ \ \forall\ k, j$, δηλαδή υπάρχουν και αυτοβρόχοι.

Να δειχθεί ότι ένα αποθηκευμένο πρότυπο $\boldsymbol{\xi}^p$ αποτελεί ευσταθή κατάσταση του δικτύου αν ισχύει

$Z_k^p < M,\ \forall k$, όπου $Z_k^p = -\ \xi_k^p\ \Sigma_m\ \xi_k^m\ \Sigma_{j\neq k}\ \xi_j^m\ \xi_j^p.$

Απάντηση

Σύμφωνα με τον κανόνα του Hebb έχουμε $w_{ki} = 1/N\ \Sigma_m\ \xi_k^m\ \xi_i^m$

Έστω ότι αρχική κατάσταση του δικτύου είναι το αποθηκευμένο πρότυπο $\boldsymbol{\xi}^p$. Έχουμε

$$y'_k = f(u_k) = f(\Sigma_j\ w_{kj}\ \xi_j^p) = f(1/N\ \Sigma_j\ \Sigma_m\ \xi_k^m\ \xi_j^m\ \xi_j^p) = f(1/N\ \Sigma_m\ \xi_k^m\ \Sigma_j\ \xi_j^m\ \xi_j^p)$$
$$= f(1/N\ \Sigma_m\ \xi_k^m\ \xi_k^m\ \xi_k^p + 1/N\ \Sigma_m\ \xi_k^m\ \Sigma_{j\neq k}\ \xi_j^m\ \xi_j^p)$$
$$= f(1/N\ \xi_k^p\ M + 1/N\ \Sigma_m\ \xi_k^m\ \Sigma_{j\neq k}\ \xi_j^m\ \xi_j^p) = f(1/N\ \xi_k^p\ [M - Z_k^p]) = \xi_k^p$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $(-\ \xi_k^p)^2=1$.

Άσκηση 9

Έστω διακριτό δίκτυο Hopfield N κόμβων, με συνάρτηση ενεργοποίησης $y_k = f(u_k) = 1$, αν $u_k \geq 0$, και -1 αλλιώς, όπου $u_k = \sum_j w_{kj} y_j$. Θεωρούμε ακολουθία M προτύπων ξ^m (m = 1, 2, …, M), όπου το πρότυπο 1 έπεται του προτύπου M κυκλικά. Τα βάρη του δικτύου προσδιορίζονται σύμφωνα με τη γενική σχέση:

$$w_{kj} = \frac{1}{N}\sum_m \xi_k^m \xi_j^m + \frac{\lambda}{N}\sum_m \xi_k^{m+1}\xi_j^m,\ \forall k, j,$$

δηλαδή οι συνδέσεις είναι μη συμμετρικές. Έστω ότι η τρέχουσα κατάσταση του δικτύου είναι το πρότυπο ξ^p. Να δειχθεί ότι, αν $\lambda > 1$, το δίκτυο τείνει να μεταβεί στο επόμενο πρότυπο ξ^{p+1} της ακολουθίας (ασύγχρονη ενημέρωση). Υποθέτουμε ότι οι όροι διαφωνίας είναι αμελητέοι (ασυσχέτιστα πρότυπα).

Απάντηση

Έστω ότι αρχική κατάσταση του δικτύου είναι το αποθηκευμένο πρότυπο $\boldsymbol{\xi}^p$. Έχουμε

$$y'_k = f(u_k) = f(\Sigma_j\ w_{kj}\ \xi_j^p) = f(1/N\ \Sigma_j\ \Sigma_m\ \xi_k^m\ \xi_j^m\ \xi_j^p + \lambda/N\ \Sigma_j\ \Sigma_m\ \xi_k^{m+1}\ \xi_j^m\ \xi_j^p)$$
$$= f(1/N\ \Sigma_m\ \xi_k^m\ \Sigma_j\ \xi_j^m\ \xi_j^p + \lambda/N\ \Sigma_m\ \xi_k^{m+1}\ \Sigma_j\ \xi_j^m\ \xi_j^p)$$
$$= f(1/N\ \xi_k^p\ \Sigma_j\ \xi_j^p\ \ \xi_j^p + 1/N\ \Sigma_{m\neq p}\ \xi_k^m\ \Sigma_j\ \xi_j^m\ \xi_j^p + \lambda/N\ \xi_k^{p+1}\ \Sigma_j\ \xi_j^p\ \ \xi_j^p + \lambda/N\ \Sigma_{m\neq p}\ \xi_k^{m+1}\ \Sigma_j\ \xi_j^m\ \xi_j^p)$$
$$= f(\xi_k^p + \lambda\xi_k^{p+1} + \text{όροι διαφωνίας})$$

Εφόσον οι όροι διαφωνίας είναι αμελητέοι, για λ<1 το πρόσημο του $\xi_k^p + \lambda\xi_k^{p+1}$ θα είναι ίδιο με το πρόσημο του ξ_k^p, ενώ για λ<1 επικρατεί ο δεύτερος όρος και το σύστημα ωθείται προς το επόμενο πρότυπο.