



Αυτο-οργανούμενοι χάρτες

SOM



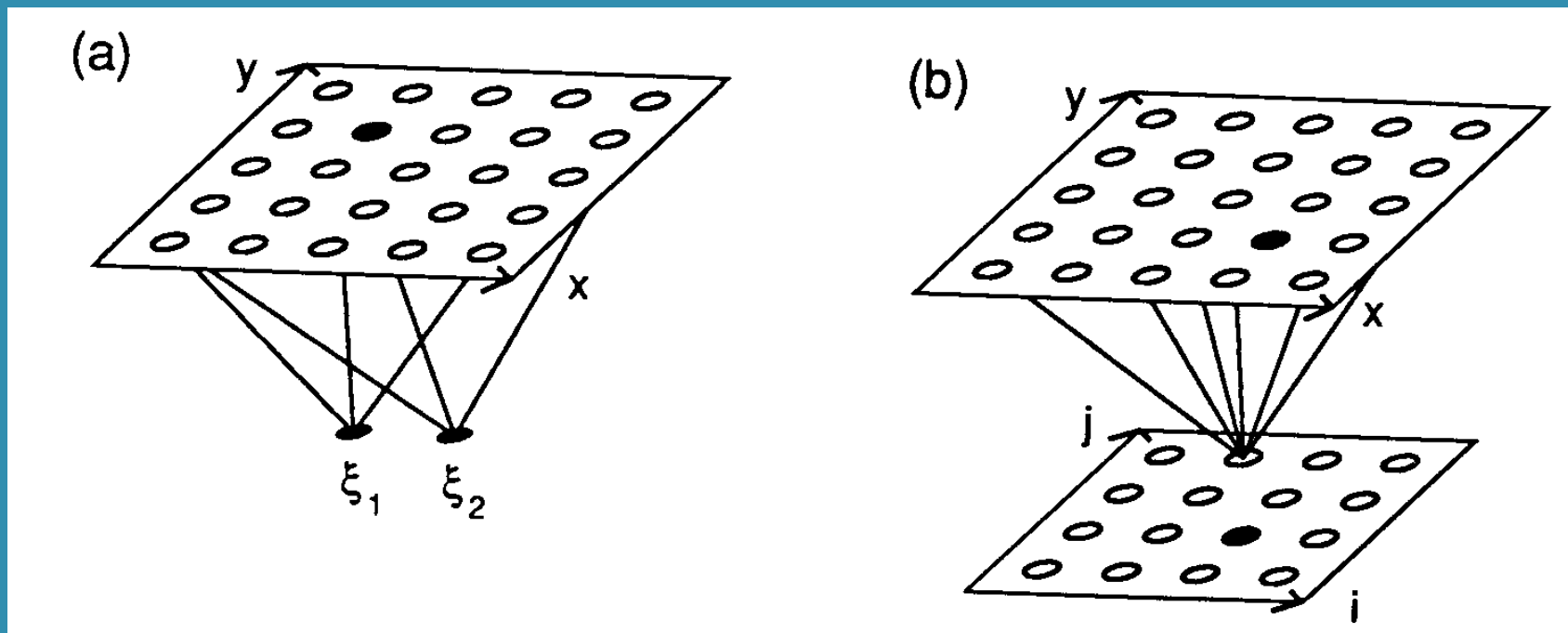
Τοπογραφικοί χάρτες

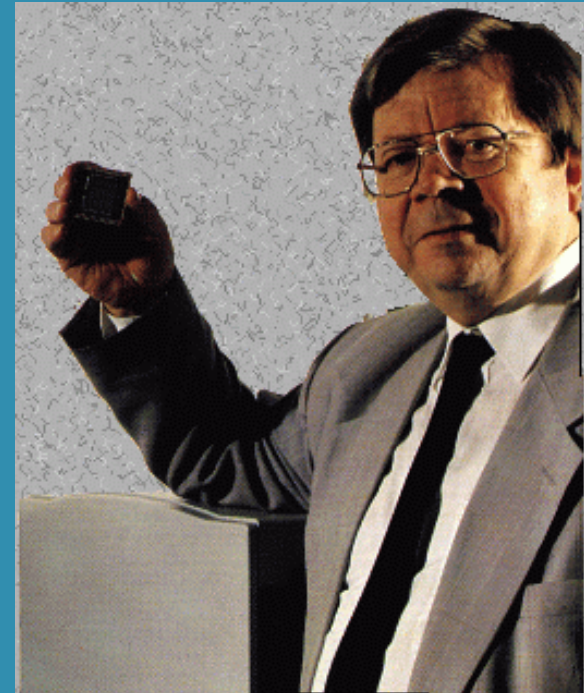
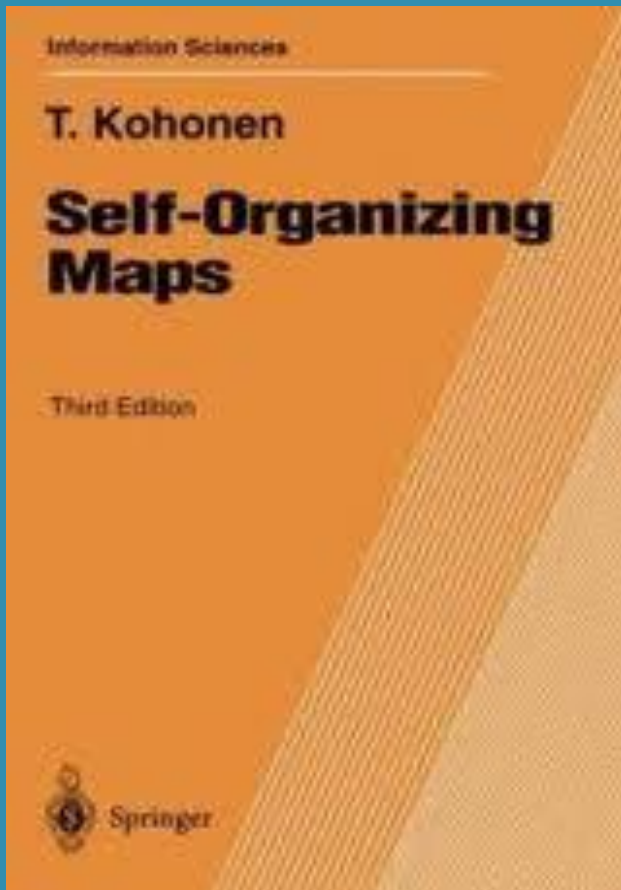
Απεικόνιση χαρακτηριστικών

(a) Μοντέλο Kohonen

Self Organizing (Feature) Maps – SO(F)M

(b) Μοντέλο Willshaw και von der Malsburg





Teuvo Kohonen
Helsinki University
of Technology

Δίκτυο SOM

- Η χωρική σχέση των νευρώνων αντικατοπτρίζει φυσικά χαρακτηριστικά της εισόδου (κατανομή πιθανότητας χώρου εισόδου).
- Διανυσματικός κβαντισμός εισόδου
- Φυσική διάταξη νευρώνων
- Διατήρηση τοπολογίας (order preservation): όμοια πρότυπα εισόδου απεικονίζονται σε γειτονικούς νευρώνες.
- Επεκτάσεις (μεταβλητός αριθμός νευρώνων)

Δίκτυο SOM: Εκπαίδευση

Φάση ανταγωνισμού

Νικητής: ελάχιστη ευκλείδεια απόσταση

$$\min d_j = \left\| \vec{x} - \vec{w}_j \right\|$$

ή μέγιστο εσωτερικό γινόμενο

$$\max s_j = \vec{w}_j \cdot \vec{x}$$

Φάση συνεργασίας

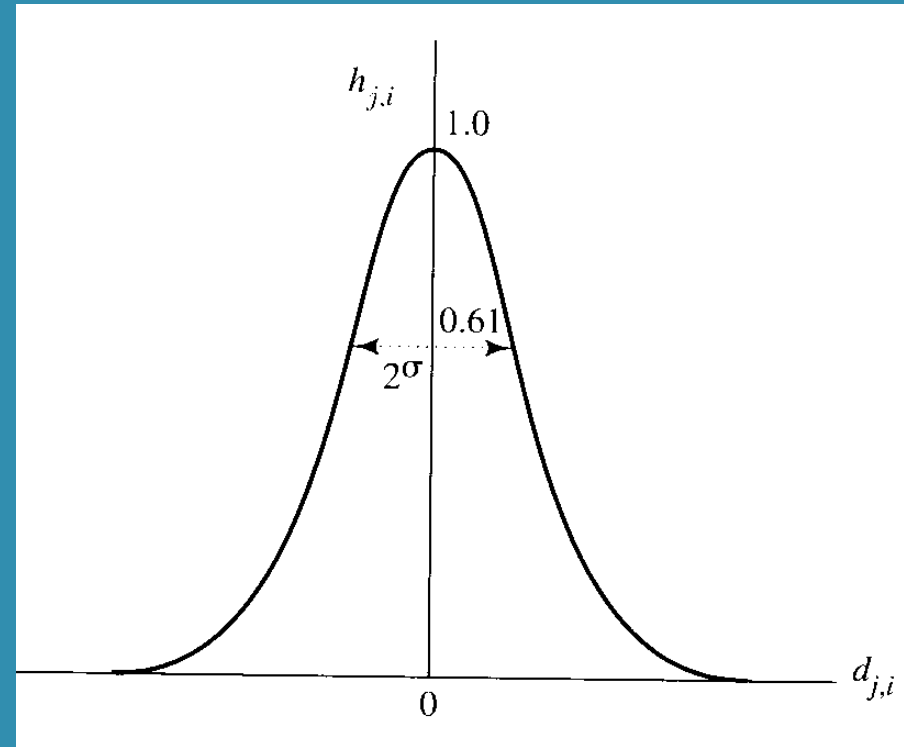
Καθορισμός τοπολογικής γειτονιάς

Φάση ανταμοιβής

Προσαρμογή βαρών νικήτριας γειτονιάς

Τοπολογική γειτονιά

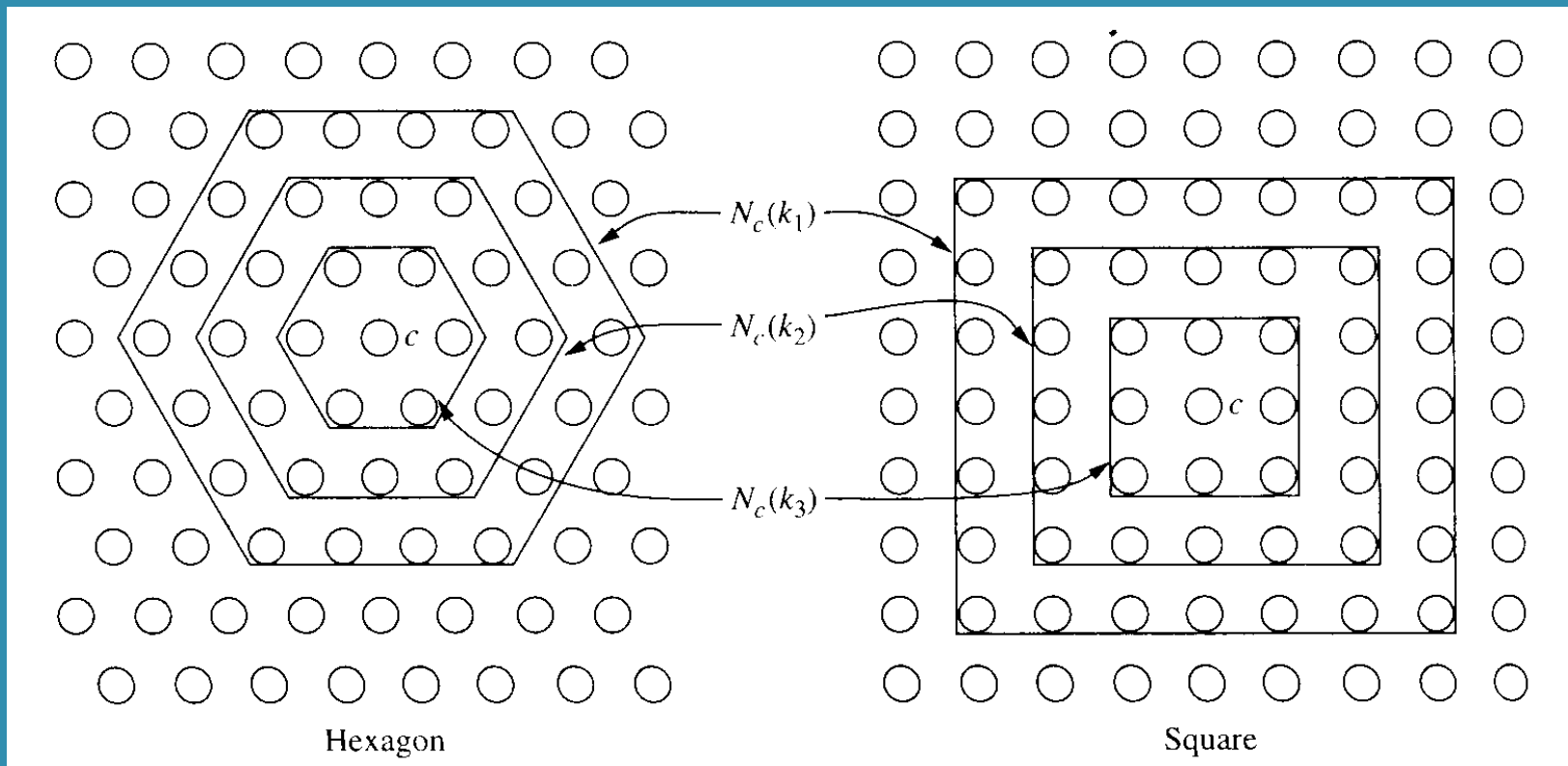
- Συμμετρική συνάρτηση γύρω από τον νικητή φθίνουσα με την απόσταση
- r_i, r_j : διανύσματα θέσης στο πλέγμα
- Παράμετρος πλάτους $\sigma(t)$ φθίνουσα με τον χρόνο (εκθετική μείωση)



$$h_{j,i}(t) = \exp\left(\frac{-\|r_j - r_i\|^2}{2\sigma^2(t)}\right)$$

Τοπολογική γειτονιά

- Γεωμετρικός καθορισμός
- Κοινή αντιμετώπιση όλων των νευρώνων
- Μείωση με το χρόνο



Δίκτυο SOM: Εκπαίδευση

Φάση ανταμοιβής

$$\vec{w}_j^{(t+1)} = \vec{w}_j^{(t)} + \eta(t) h_{j,i}(t) \left[\vec{x} - \vec{w}_j^{(t)} \right], \quad \forall j$$

i : νικητής νευρώνας (x)

$$0 \leq \eta(t) \leq 1$$

Συντελεστής μάθησης φθίνων με το χρόνο
(εκθετική μείωση)

Δίκτυο SOM

Ελαχιστοποίηση συνάρτησης κόστους

$$\begin{aligned} E(\vec{w}) &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sum_m M(m, i) h_{j,i} \left\| \vec{x}^m - \vec{w}_j \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sum_m \sum_k M(m, i) h_{j,i} \left(x_k^m - w_{kj} \right)^2 \end{aligned}$$

$$M(m, i) = \begin{cases} 1 & \text{αν } i \text{ νικητής με είσοδο } \vec{x}^m \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Συνάρτηση συμμετοχής ομάδας

Κάθοδος κλίσης: τοπικά ελάχιστα

$$\Delta \vec{w}_j = -\eta \frac{\partial E}{\partial \vec{w}_j} = \eta \sum_m \sum_i M(m, i) h_{j,i} \left(\vec{x}^m - \vec{w}_j \right)$$

Προσέγγιση αυξητικής μεταβολής

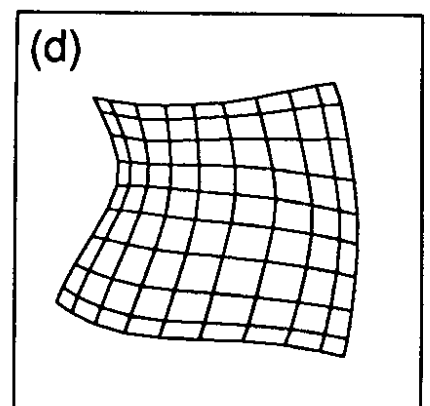
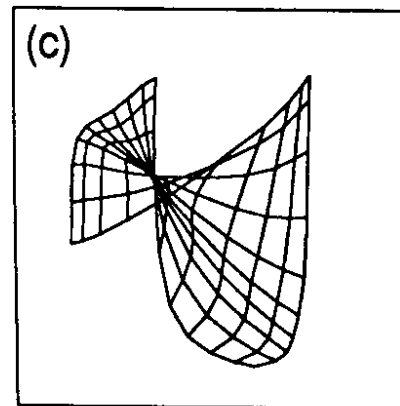
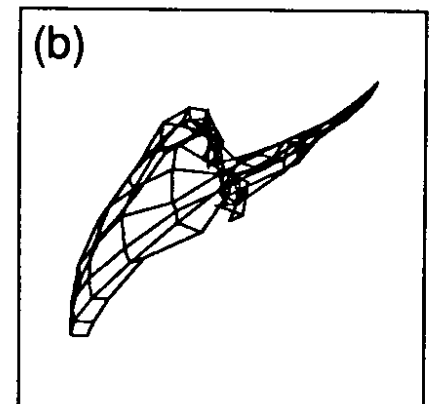
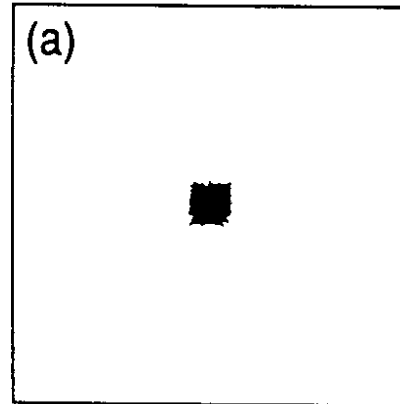
Δίκτυο SOM

Παράδειγμα

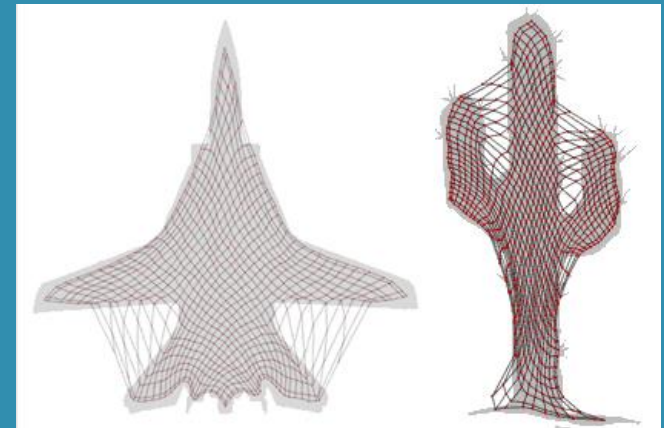
- Πλέγμα εξόδου 10 x 10

- Πρότυπα εισόδου ομοιόμορφα κατανεμημένα στο τετράγωνο

$$\{0 \leq x_1 < 1, 0 \leq x_2 < 1\}$$

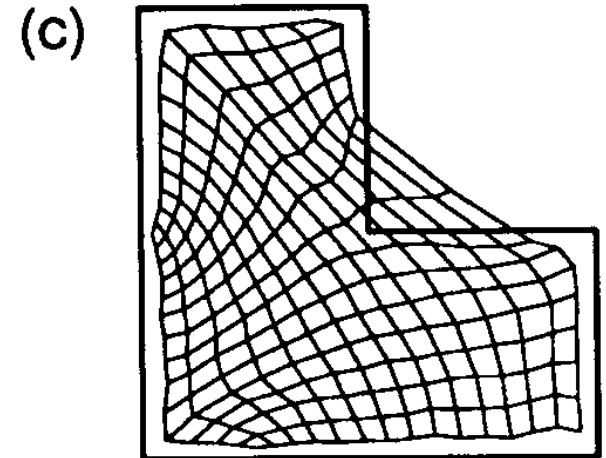
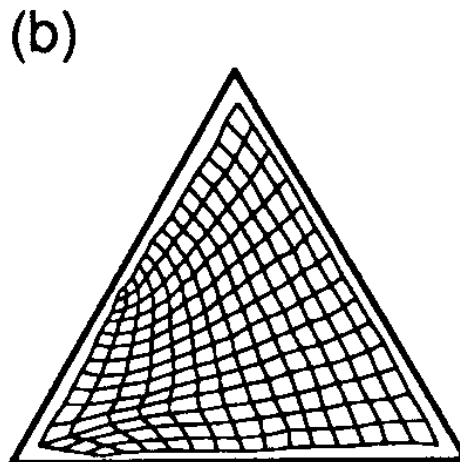
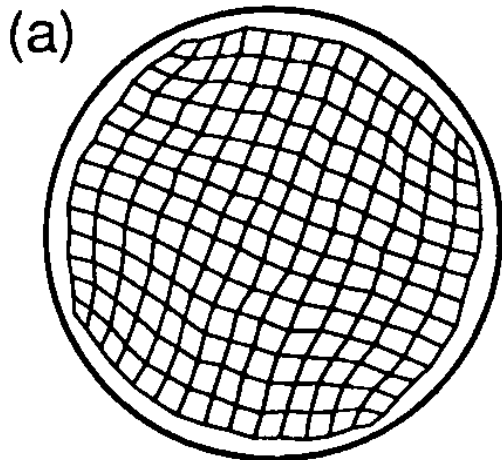


Δίκτυο SOM



Παράδειγμα

- Πλέγμα εξόδου 15×15
- Πρότυπα εισόδου ομοιόμορφα κατανομημένα σε κύκλο, τρίγωνο και περιοχή σχήματος L



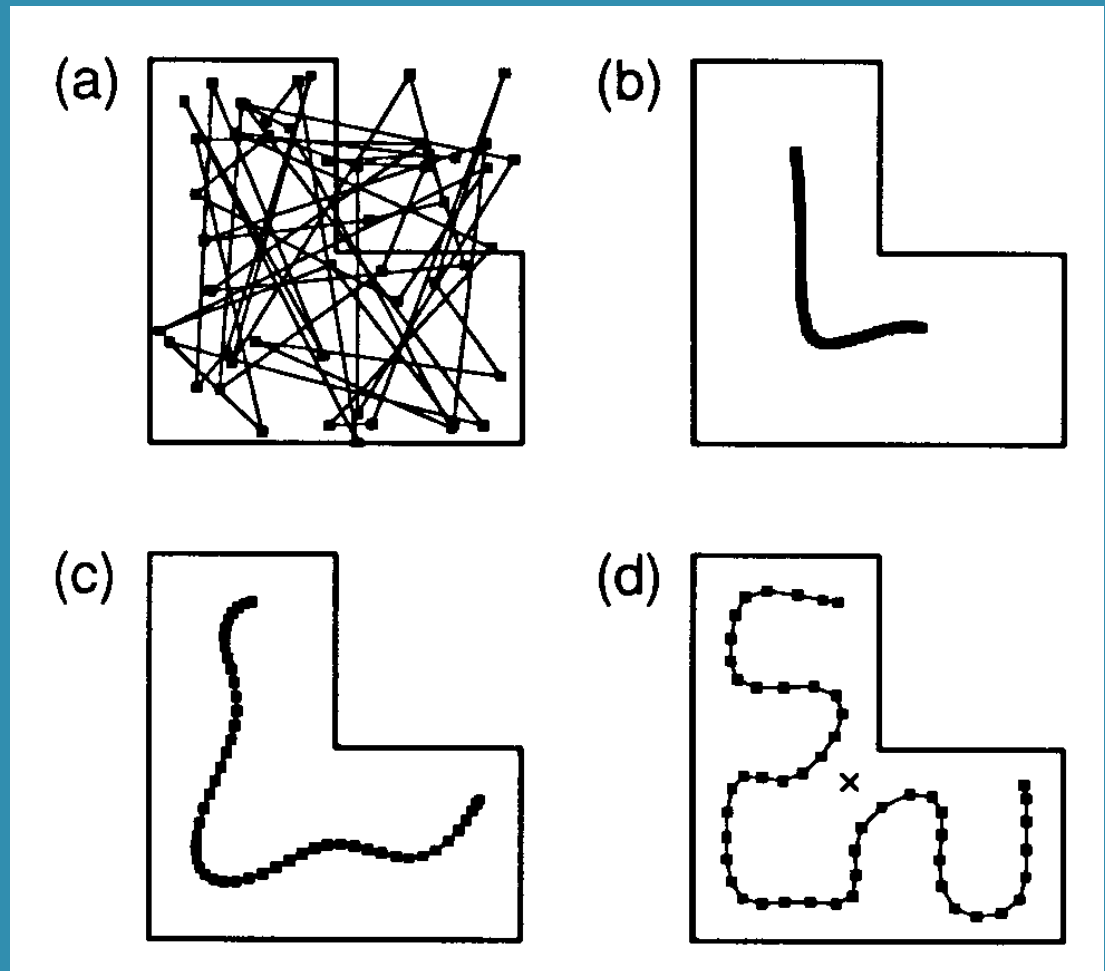
Δίκτυο SOM

Παράδειγμα

- Μονοδιάστατη έξοδος 50 κόμβων
- Πρότυπα εισόδου ομοιόμορφα κατανεμημένα σε περιοχή σχήματος L

➤ Μείωση διάστασης (*dimensionality reduction*)

➤ Μερική διατήρηση τοπολογίας



Δίκτυο SOM: Σύγκλιση

- Σημεία ισορροπίας - τοπικά ελάχιστα

$$\Delta \vec{w}_j = \eta \sum_m \sum_i M(m, i) h_{j,i} \left(\vec{x}^m - \vec{w}_j \right) = 0, \forall j$$

Δύσκολη επίλυση στη γενική περίπτωση
- Ομοιόμορφη κατανομή προτύπων
Μονοδιάστατο πλέγμα

- Διαδικασία σύγκλισης:

(i) Εκτύλιξη (untangling)

Συστροφές, στρεβλώσεις

(ii) Λεπτή προσαρμογή (fine tuning)

Δίκτυο SOM: Σύγκλιση

Μονοδιάστατος χώρος εισόδου σε
μονοδιάστατο πλέγμα εξόδου

Κατάσταση ισορροπίας

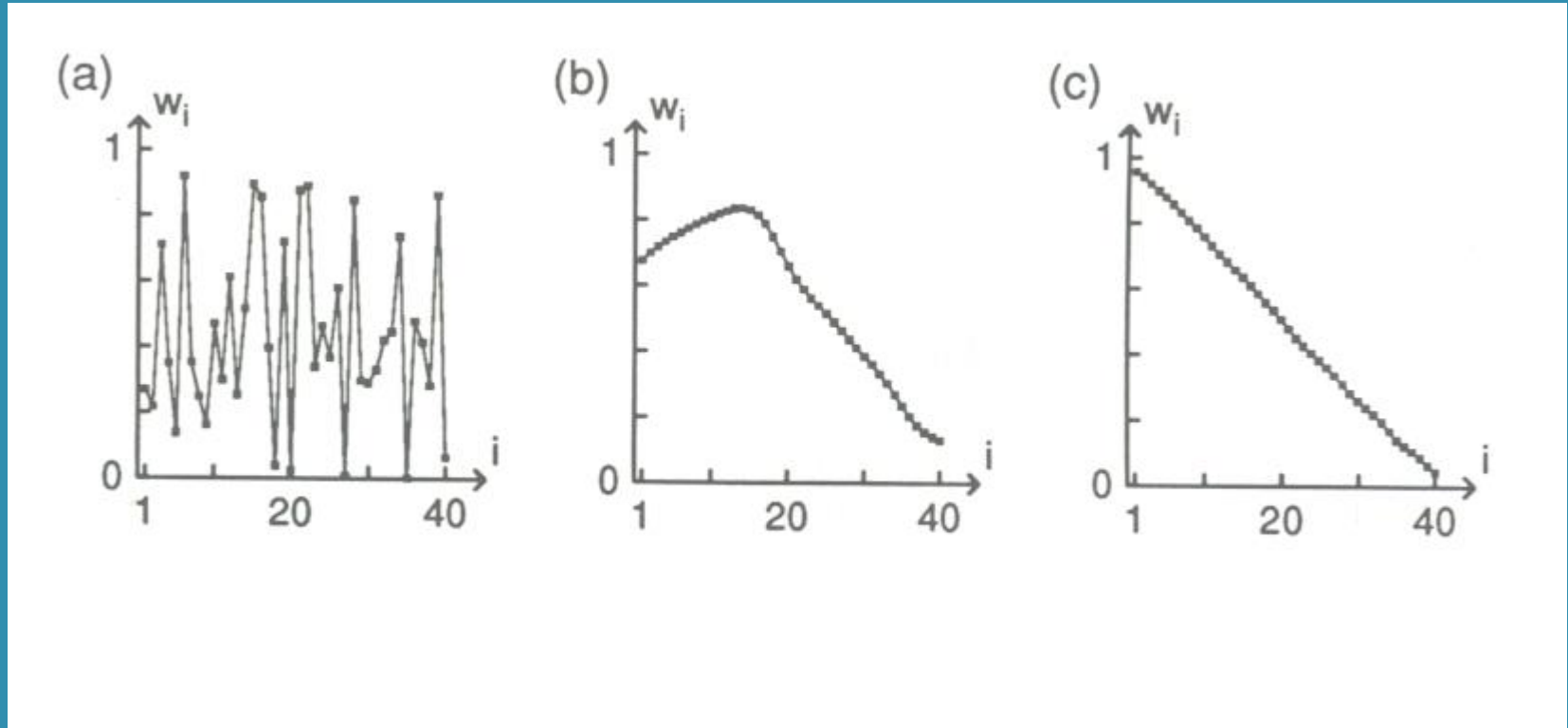
Πυκνότητα κόμβων εξόδου \approx (Πυκνότητα πιθανότητας
εισόδου)^{2/3}

$$\left| \frac{dz}{dx} \right| \propto p(x)^{2/3}$$

z : χώρος πλέγματος

x : χώρος εισόδου

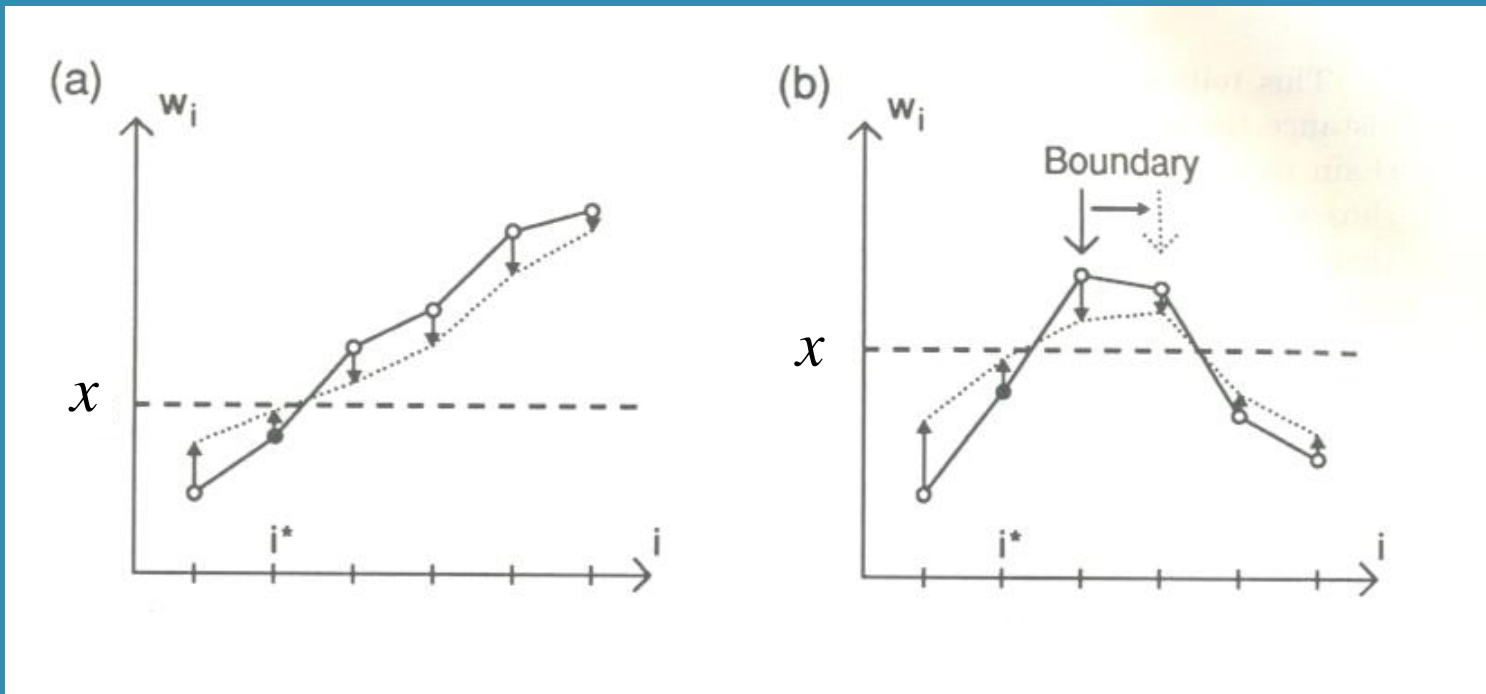
- Πλέγμα εξόδου 1×40
- Πρότυπα εισόδου ομοιόμορφα κατανεμημένα σε μονοδιάστατο διάστημα



Γραμμική διάταξη βαρών (αύξουσα ή φθίνουσα)

Μονοδιάστατο πλέγμα: Εκτύλιξη

- (a) Κάθε μονότονη περιοχή βαρών παραμένει μονότονη μετά την ενημέρωση.
- (b) Το όριο μεταξύ δύο μονότονων περιοχών μπορεί να μετακινηθεί κατά ένα βήμα (προς τη μία ή την άλλη πλευρά) ανά ενημέρωση.
- (c) Τα όρια εξαφανίζονται στα άκρα. Δεν δημιουργούνται νέα όρια.



Μονοδιάστατο πλέγμα: μονότονη διάταξη βαρών

Ενημέρωση

$$w_j^{(t+1)} = w_j^{(t)} + \eta(t) h_{j,i}(t) [x - w_j^{(t)}], \quad \forall j$$

$$[w_j - x]^{(t+1)} = (1 - \eta(t) h_{j,i}(t)) [w_j - x]^{(t)}, \quad \forall j$$

i : νικητής νευρώνας (x)

Η κατακόρυφη απόσταση $w_j - x$ πολλαπλασιάζεται με έναν παράγοντα που πλησιάζει το 1 καθώς απομακρυνόμαστε από τον νικητή. Η μονότονη διάταξη δεν μεταβάλλεται.

Μονοδιάστατο πλέγμα

Χρόνος εκτύλιξης

Η «καμπή» (kink) μεταξύ δύο μονότονων περιοχών διαχέεται στο ένα από τα δύο άκρα.

Η κίνηση πραγματοποιείται όταν η είσοδος είναι κοντά στην καμπή (πιθανότητα τάξεως $1/N$ για N κόμβους) με ίση πιθανότητα προς τη μία ή την άλλη κατεύθυνση.

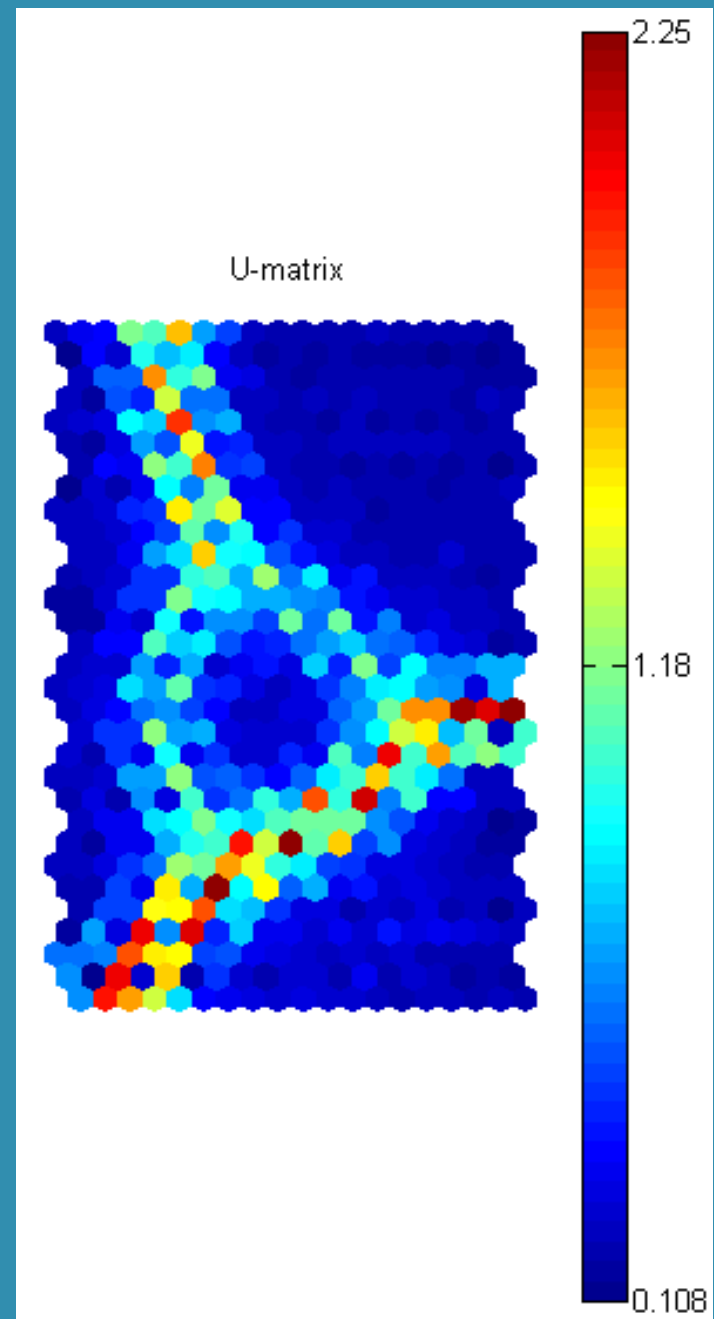
Τυχαίος περίπατος: $O(N^2)$ βήματα για μετακίνηση σε ένα άκρο.

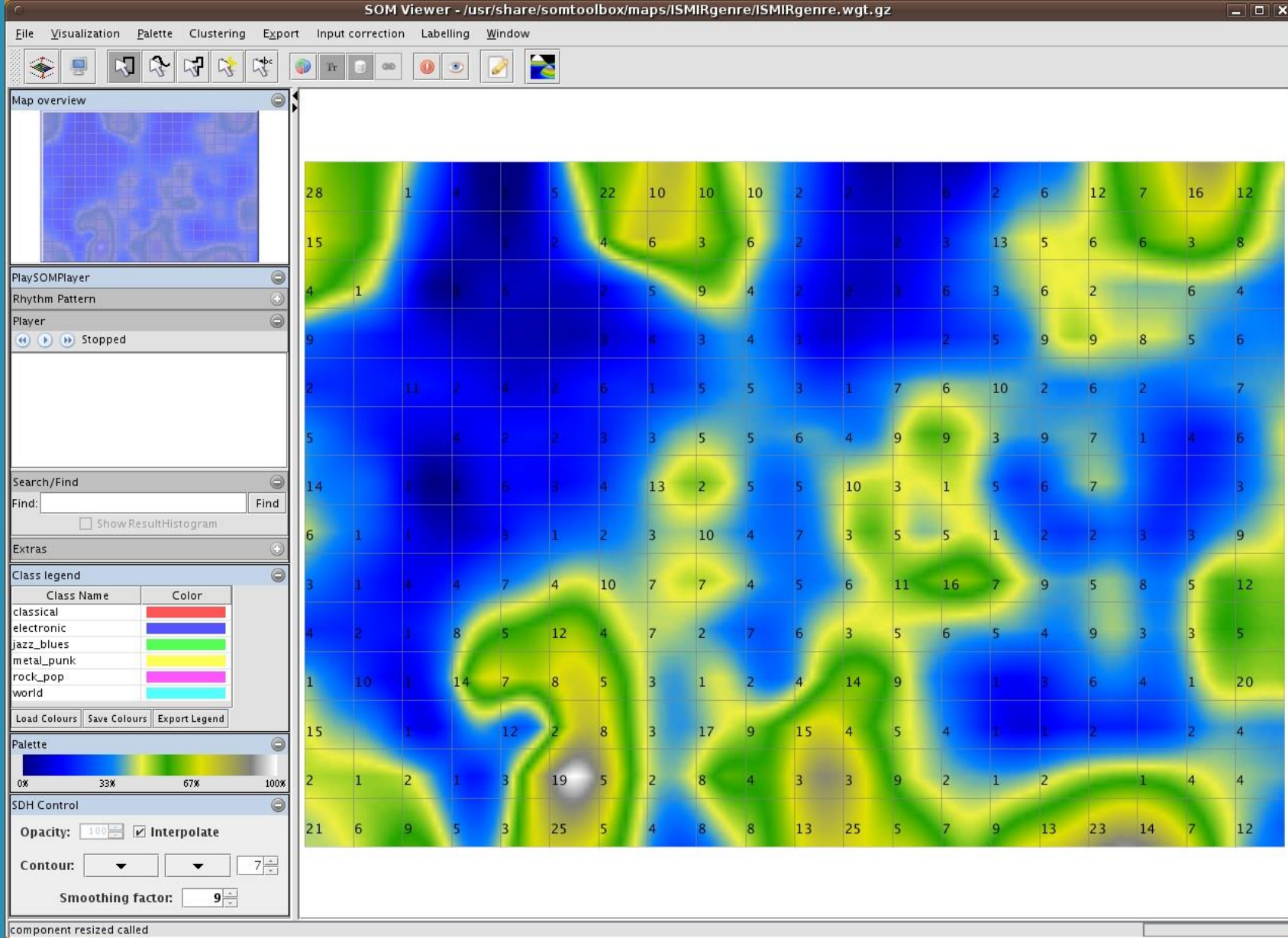
Εκτύλιξη: $O(N^3)$ βήματα συνολικά.

Μπορεί να μειωθεί σε $O(N^2)$ αν η συνάρτηση γειτονιάς δεν είναι συμμετρική.

Αυτο- οργανούμενοι χάρτες

Unified distance
matrix
(U-matrix)





SOM Viewer - Java SOMToolbox

Vienna University of Technology

Δίκτυο SOM

- Επεκτάσεις
- Παραδείγματα

<http://www.demogng.de>