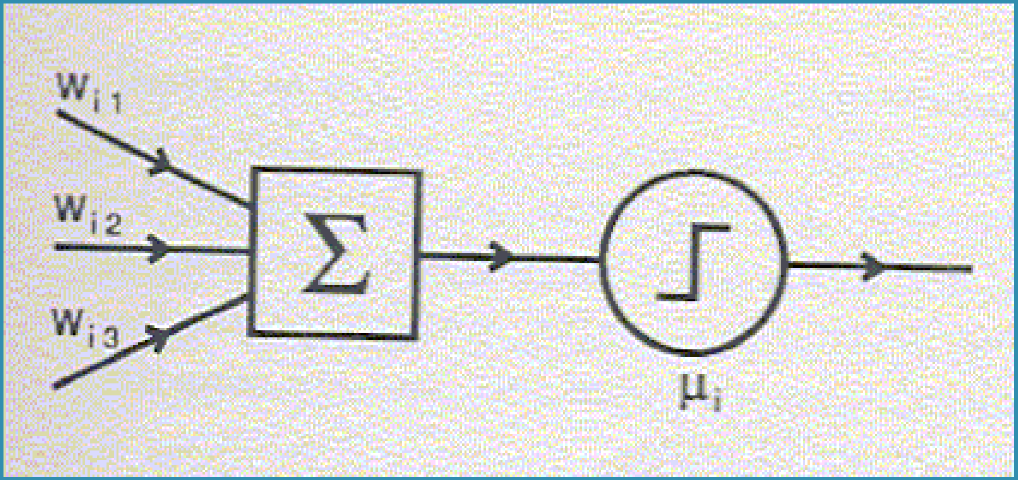
Αναδρομικά δίκτυα

Δίκτυα HOPFIELD

Αυτοσυσχετιστική μνήμη
Συνδυαστική βελτιστοποίηση

Μονάδα λογικής κατωφλίου



McCulloch & Pitts (1943) - TLU

Rosenblatt (1962) - perceptron

Αναδρομικά δίκτυα

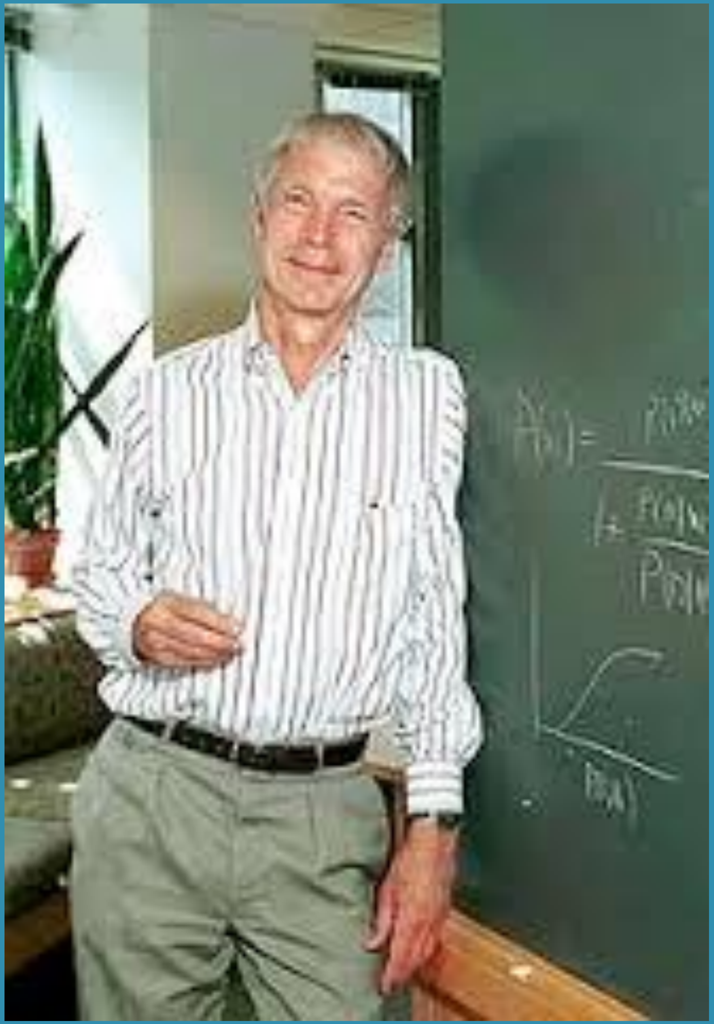
Δυναμικά συστήματα
Σύγκλιση και ευστάθεια
Μάθηση

Νευροδυναμική

Συσχετιστική μνήμη
Συνδυαστική βελτιστοποίηση

Η συμβολή της Φυσικής

John J. Hopfield
1933-



Albert Einstein World Award of Science (2005)

Proc. Natl. Acad. Sci. USA
Vol. 79, pp. 2554–2558, April 1982
Biophysics

Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities

(associative memory/parallel processing/categorization/content-addressable memory/fail-soft devices)

J. J. HOPFIELD

Division of Chemistry and Biology, California Institute of Technology, Pasadena, California 91125; and Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey 07974

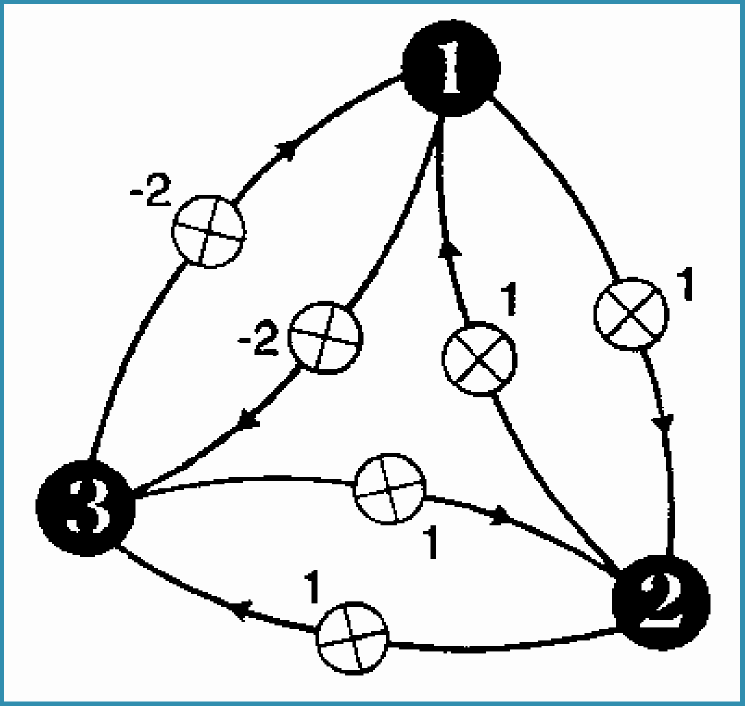
Contributed by John J. Hopfield, January 15, 1982

Συμμετρικά Αναδρομικά δίκτυα
Δίκτυο Hopfield (1982)

- **Μονοστρωματική (single-layer)**
- **Αναδρομική (recurrent)**
  αρχιτεκτονική

$w_{ij}=w_{ji}, i,j=1,\ldots,N$

$w_{ii}=0, i=1,\ldots,N$



Διακριτό δίκτυο Hopfield

– Διακριτός χρόνος
– Δυαδικές / διπολικές τιμές κόμβων

Λειτουργία (Δυναμική συμπεριφορά)

$$u_i(t+1) = \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_j(t) + \theta_i$$

$$y_i(t+1) = f\left(u_i(t+1)\right)$$

f: step / signum

Ενημέρωση: ασύγχρονη
σύγχρονη

Αναλογικό (συνεχές) δίκτυο Hopfield

– Συνεχής χρόνος
– Συνεχείς τιμές κόμβων ($\in [0,1]$ ή $[-1,1]$)

Λειτουργία (Δυναμική συμπεριφορά)

$$\dot{u}_i = \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_j - u_i + \theta_i$$

$$y_i = f\left(u_i\right)$$

f: sigmoid / tanh

Ευστάθεια – Διακριτό μοντέλο

Συνάρτηση ενέργειας (Lyapunov)

$$E(\vec{y}) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_i y_j - \sum_{i=1}^{N} \theta_i y_{\mathrm{i}}$$

Τοπικά ελάχιστα $\Rightarrow$ Ευσταθείς καταστάσεις

Η ευστάθεια είναι εγγυημένη για *συμμετρικά* δίκτυα ($w_{ij}=w_{ji}$, $i,j=1,\ldots,N$) με *ασύγχρονη* λειτουργία.

Απόδειξη ευστάθειας – Διακριτό μοντέλο

Διπολικές τιμές y_i

$$y_i' = \operatorname{sgn}\left(\sum_{j \neq i} w_{ij} y_j + \theta_i \right)$$

$$y_i' = y_i \Rightarrow \Delta E = E' - E = 0$$

$$y_i' = -y_i \Rightarrow \Delta E = -\sum_{j \neq i} w_{ij} y_i' y_j + \sum_{j \neq i} w_{ij} y_i y_j$$

$$- y_i' \vartheta_i + y_i \vartheta_i = 2 y_i \left(\sum_{j \neq i} w_{ij} y_j + \vartheta_i \right) < 0$$

Ευστάθεια – Αναλογικό μοντέλο

Συνάρτηση ενέργειας (Lyapunov)

$$E(\vec{y}) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_i y_j + \sum_{i=1}^{N}\int_0^{y_i} f^{-1}(y)\,dy - \sum_{i=1}^{N}\theta_i y_{\mathrm{i}}$$

Τοπικά ελάχιστα $\Rightarrow$ Ευσταθείς καταστάσεις

Η ευστάθεια είναι εγγυημένη για *συμμετρικά* δίκτυα ($w_{ij}=w_{ji}$, $i,j=1,\ldots,N$).

(Ειδική περίπτωση θεωρήματος Cohen-Grossberg)

Απόδειξη ευστάθειας – Αναλογικό μοντέλο

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2}\sum_i \sum_j w_{ij} \frac{dy_i}{dt} y_j - \frac{1}{2}\sum_i \sum_j w_{ij} y_i \frac{dy_j}{dt}$$

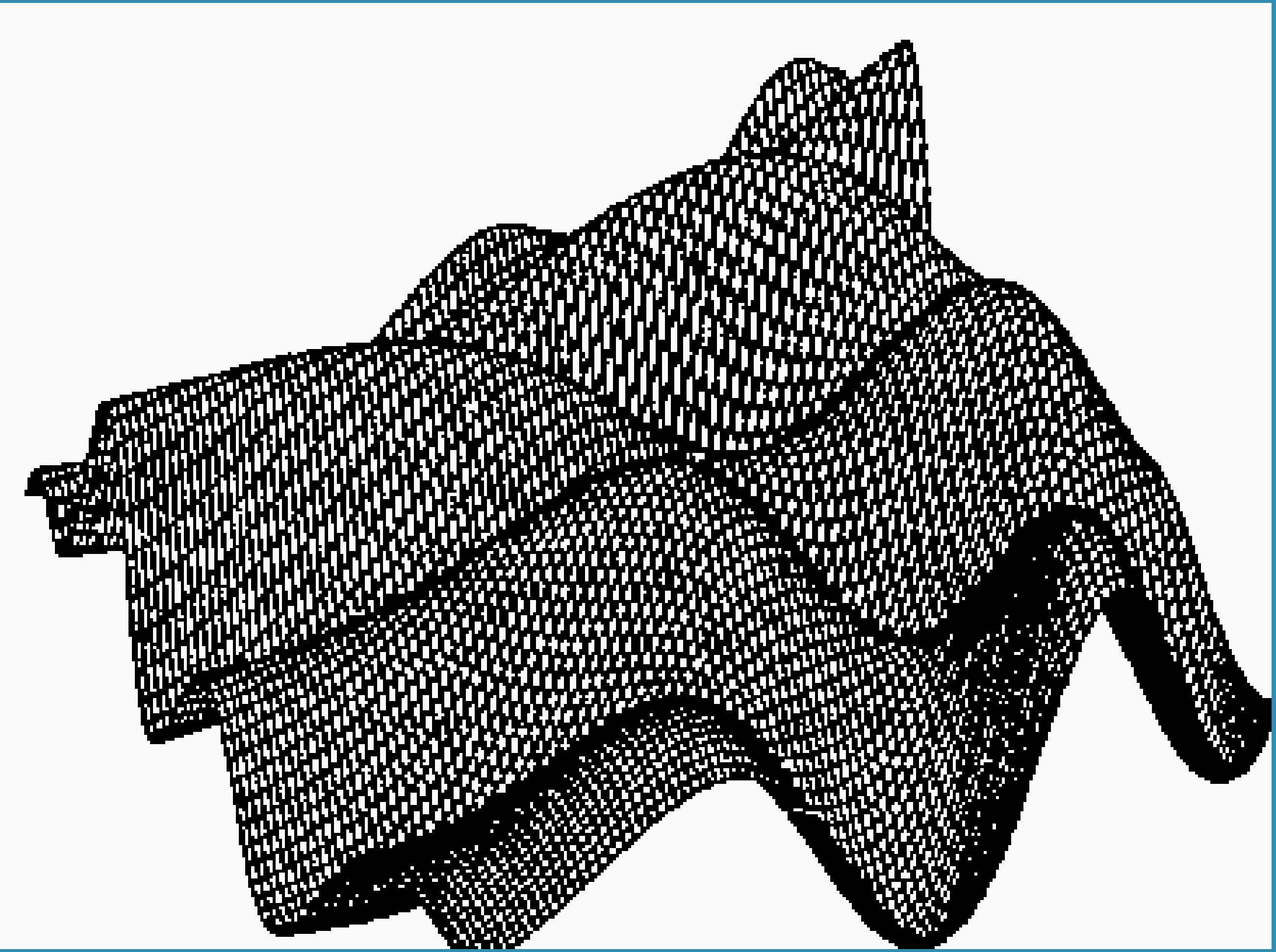
$$+\sum_i f^{-1}(y_i)\frac{dy_i}{dt} - \sum_i \frac{dy_i}{dt}\theta_i$$

$$= -\sum_i \frac{dy_i}{dt}\left(\sum_j w_{ij} y_j - u_i + \theta_i\right) = -\sum_i \frac{dy_i}{dt}\frac{du_i}{dt}$$

$$= -\sum_i f^{'}(u_i)\left(\frac{du_i}{dt}\right)^2 \leq 0$$

(μονοτονία της f)

Το τοπίο της ενέργειας



Αναδυόμενη συλλογική συμπεριφορά

Συσχετιστική μνήμη (Associative memory)

Κλειδί ⇒ Ανάμνηση

- Αυτοσυσχετιστική ανάκληση
- Ετεροσυσχετιστική ανάκληση

Μη γραμμικά συσχετιστικά δίκτυα

- Δίκτυο Hopfield (J. Hopfield, 1982)

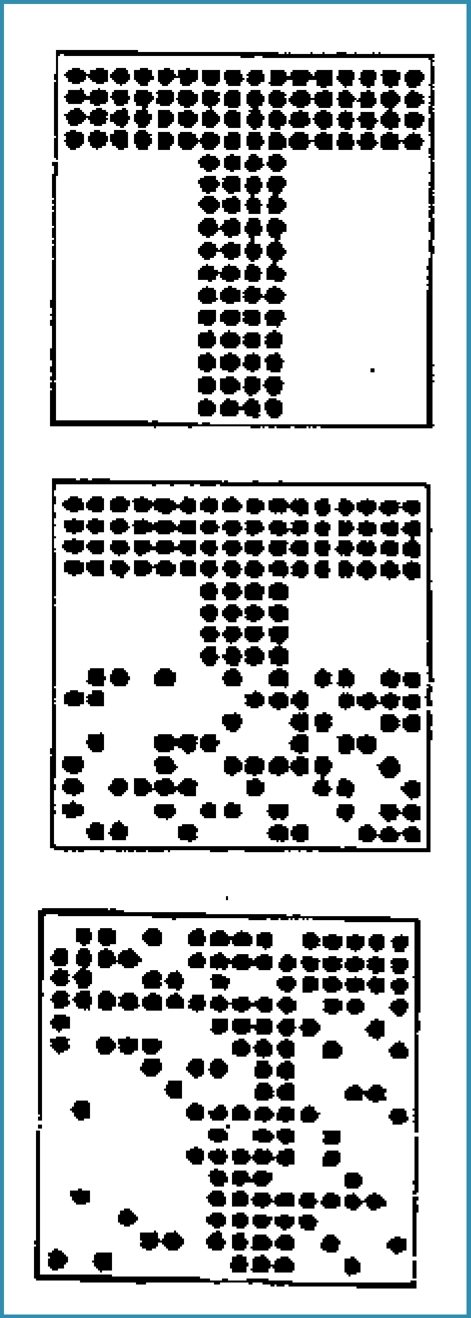
  Αυτοσυσχετιστική μνήμη
- Bidirectional Associative Memory – BAM (B. Kosko, 1988)

  Ετεροσυσχετιστική μνήμη

Αυτοσυσχετιστική μνήμη

Ανάκληση με βάση το περιεχόμενο

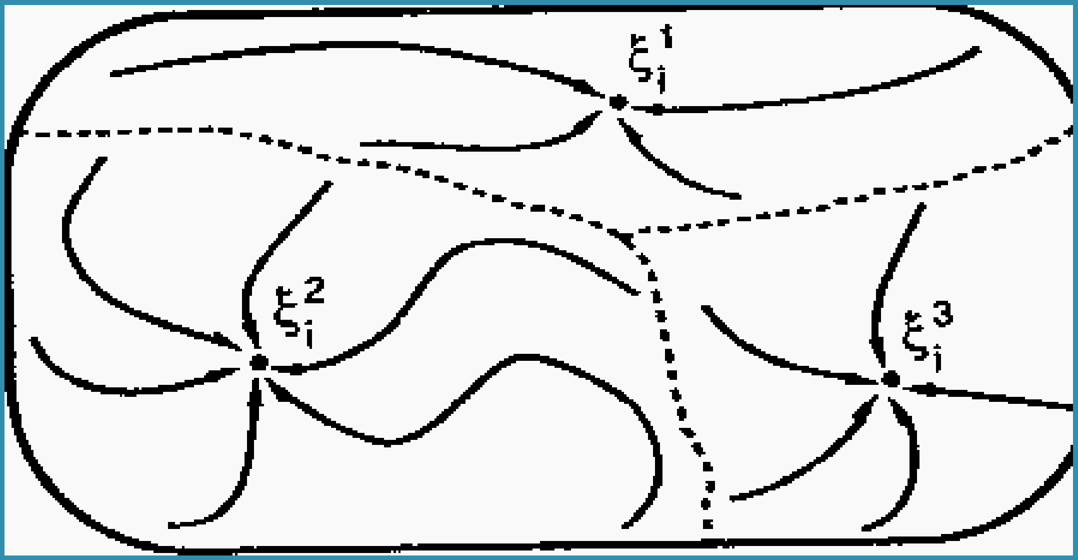
(Content-addressable memory)

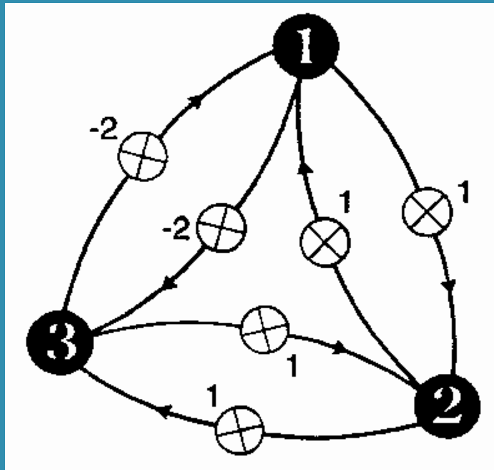


Αυτοσυσχετιστική μνήμη

Δυναμική συμπεριφορά

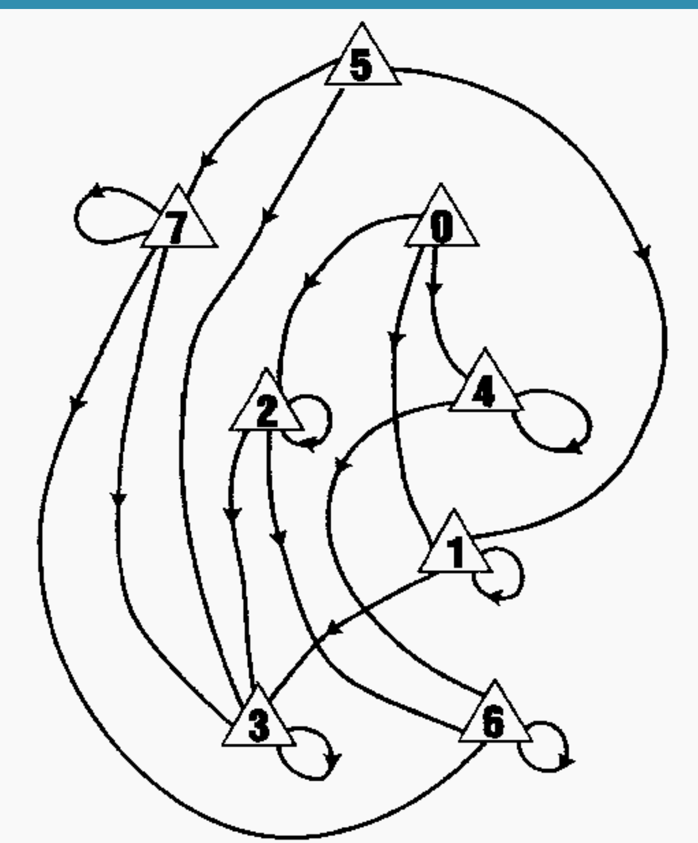
Διάταξη ελκυστών





Πίνακας / διάγραμμα δυνατών μεταβάσεων

Παράδειγμα με δυαδικές τιμές



Κατάσταση				Νέα κατάσταση (μετά την ενεργοποίηση)		
Αριθμός	Διάνυσμα					
	x_1	x_2	x_3	Κόμβος 1	Κόμβος 2	Κόμβος 3
0	0	0	0	4	2	1
1	0	0	1	1	3	1
2	0	1	0	6	2	3
3	0	1	1	3	3	3
4	1	0	0	4	6	4
5	1	0	1	1	7	3
6	1	1	0	6	6	6
7	1	1	1	3	7	6

Η συμβολή της Ψυχολογίας

Donald O. Hebb

1904-1985

Ψυχολογία και Βιολογία

Σύνδεση της βιολογικής λειτουργίας του εγκεφάλου με τη υψηλή λειτουργία του νού

Το αίτημα του Hebb (1949)

“When an axon of cell A is near enough to excite cell B and repeatedly or persistently takes part in firing it, some growth process or metabolic change takes place in one or both cells such that A's efficiency, as one of the cells firing B, is increased.”

Χεμπιανή μάθηση

Αποθήκευση p N-διάστατων προτύπων ξ^k

Ο Χεμπιανός κανόνας (D. Hebb)

$$w_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{P}\xi_i^k \xi_j^k, \quad i, j = 1, \ldots, N$$

(διπολικά πρότυπα)

$$w_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{P}(2\xi_i^k - 1)(2\xi_j^k - 1), \quad i, j = 1, \ldots, N$$

(δυαδικά πρότυπα)

$$w_{ii} = 0, \quad i = 1, \ldots, N$$

Χεμπιανός κανόνας

Κατασκευή εξωτερικού γινομένου:

$$W = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{P} \boldsymbol{\xi}^{k} \boldsymbol{\xi}^{k\,\mathrm{T}}$$

Αυξητικός (χωρίς μνήμη) – τοπικός κανόνας:

$$W[k] = W[k-1] + g(\boldsymbol{\xi}^{k})$$

Υλοποίηση - Off-line

- On-line

$$\Delta w_{ij} = a\,\xi_i^k \xi_j^k, \quad 0 < a < 1$$

Μάθηση – Χεμπιανός κανόνας

Περίπτωση ενός προτύπου ξ

Συνθήκη ευστάθειας

$$\operatorname{sgn}\left(\sum_j w_{ij}\xi_j\right) = \xi_i, \quad i = 1, \ldots, N$$

Ισχύει αν $w_{ij} \propto \xi_i \xi_j$

Λειτουργία ελκυσμού αν η πλειψηφία των bits του αρχικού προτύπου είναι σωστά.

Περίπτωση πολλών προτύπων

Συνθήκη ευστάθειας για ένα πρότυπο ξ^m

$$\operatorname{sgn}\left(\sum_j w_{ij}\xi_j^m\right) = \xi_i^m, \quad i = 1,\ldots,N$$

$$\sum_j w_{ij}\,\xi_j^m$$

$$= \frac{1}{N}\sum_j \sum_k \xi_i^k \xi_j^k \xi_j^m$$

$$= \xi_i^m + \frac{1}{N}\sum_j \sum_{k\neq m} \xi_i^k \xi_j^k \xi_j^m$$

Όρος διαφωνίας (crosstalk).

Μπορεί να προκαλέσει αστάθεια.

Χεμπιανή μάθηση
Χωρητικότητα

$P \leq 0{,}15N$ (Hopfield)

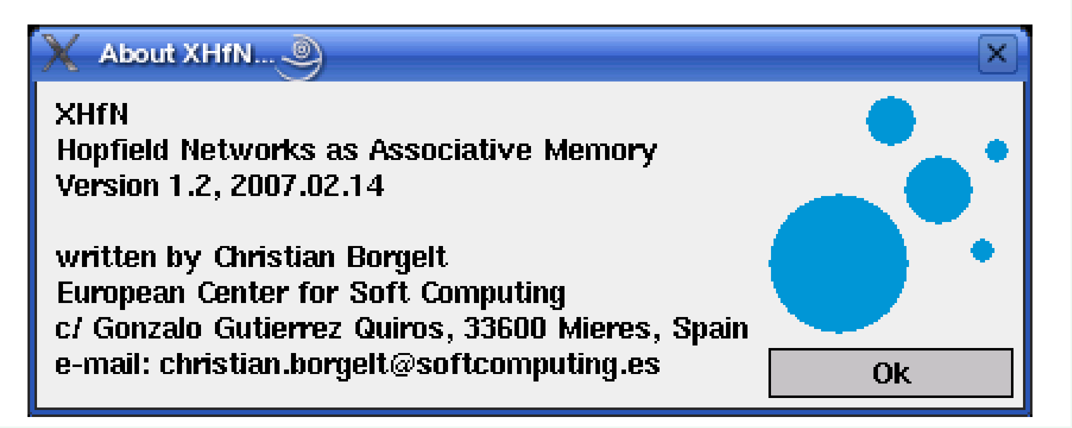
$P = O(N/\log N)$ (McEliece et al.)

Επεκτάσεις

Εφαρμογές

Προσομοιωτής Δικτύου Hopfield

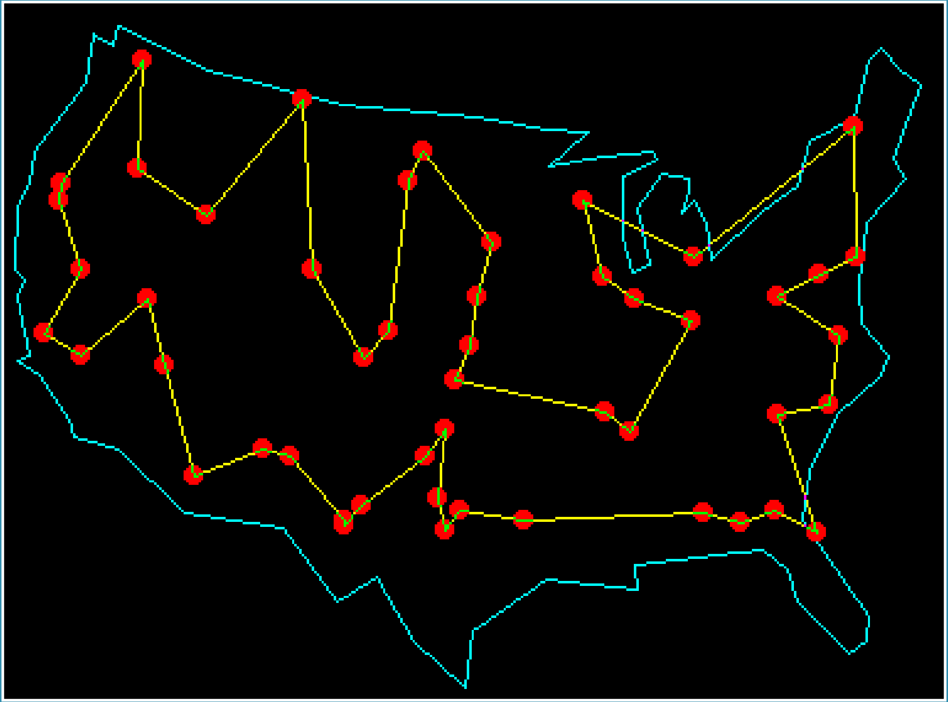
XHfN



http://www.borgelt.net/doc/hfnd/hfnd.html

European Center for Soft Computing

Επίλυση προβλημάτων συνδυαστικής βελτιστοποίησης



Διακριτό δίκτυο Hopfield

Ενημέρωση

$$u_i(t+1) = \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_j(t) + \theta_i$$

$$y_i(t+1) = \begin{cases} 1 & u_i(t+1) > 0 \\ y_i(t) & u_i(t+1) = 0 \\ 0 & u_i(t+1) < 0 \end{cases}$$

$w_{ij}=w_{ji}$, $w_{ii}=0$, $i,j=1,\dots,N$

Διακριτό δίκτυο Hopfield

Συνάρτηση ενέργειας

$$E(\vec{y}) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_i y_j - \sum_{i=1}^{N} \theta_i y_\mathrm{i}$$

Ασύγχρονη ενημέρωση (δυαδικές τιμές)

$$\Delta E_i = (2y_i - 1)\left(\sum_{j \neq i} w_{ij} y_j + \theta_i\right)$$

Διακριτό δίκτυο Hopfield

Αν $\Delta E_i<0$ η ενημέρωση γίνεται δεκτή,
αλλιώς απορρίπτεται.

$\Rightarrow$ Σύγκλιση σε κατάσταση ισορροπίας
με $\Delta E_i \geq 0$ για κάθε i
(τοπικό ή ολικό ελάχιστο)

Πρόβλημα εγκλωβισμού σε τοπικά ελάχιστα

$\Rightarrow$ *Simulated Annealing*

Αναλογικό δίκτυο Hopfield (Hopfield & Tank, 1985)

$$\dot{u}_i = \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_j + \theta_i$$

$w_{ij}=w_{ji}$, $w_{ii}=0$, $i,j=1,\ldots,N$

$$y_i = f(u_i)$$

f: sigmoid / tanh

(μονοτονία)

Αναλογικό δίκτυο Hopfield

Συνάρτηση ενέργειας

$$E(\vec{y}) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_i y_j - \sum_{i=1}^{N} \theta_i y_{\mathrm{i}}$$

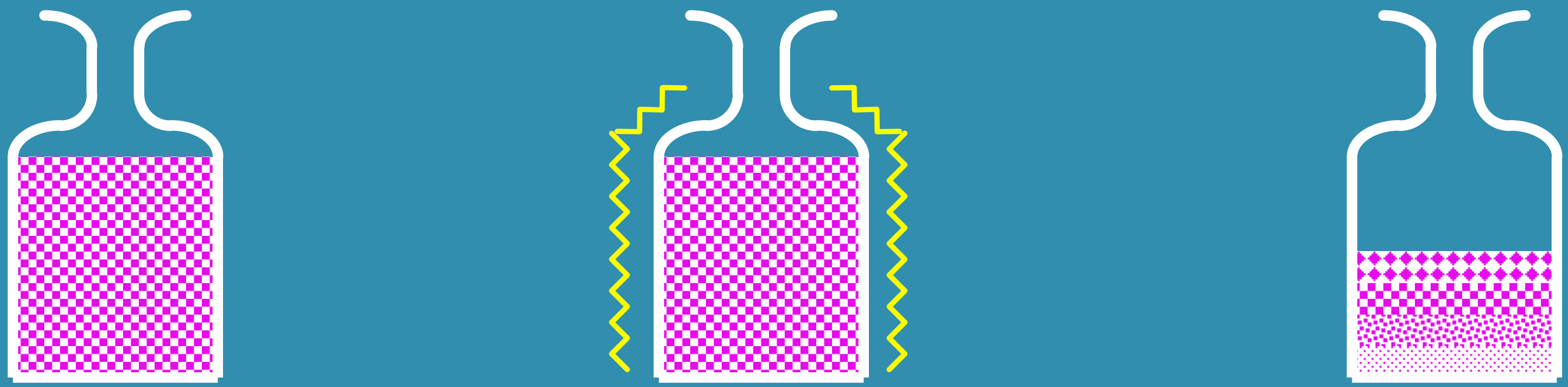
Σύγκλιση σε κατάσταση ισορροπίας

$$\begin{cases} y_i = 1, & \dfrac{du_i}{dt} \geq 0 \\ 0 < y_i < 1, & \dfrac{du_i}{dt} = 0 \\ y_i = 0, & \dfrac{du_i}{dt} \leq 0 \end{cases}$$

Πρόβλημα εγκλωβισμού σε τοπικά ελάχιστα

$\Rightarrow$ *Επεκτάσεις*

Προσομοιωμένη ανόπτηση
Simulated Annealing



Kirkpatrick, Gelatt, & Vecchi (1983)

- Αντικειμενική συνάρτηση *E*
- Επιλογή νέου σημείου (neighborhood / move set)
- Κριτήριο αποδοχής *p(ΔE, T)* του νέου σημείου

  T: παράμετρος θερμοκρασίας
- Πρόγραμμα μείωσης θερμοκρασίας (annealing /cooling schedule)
- Σύγκλιση στο ελάχιστο καθώς $T \to 0$

Από τις ιδιότητες των ατόμων
στις ιδιότητες της ύλης

Στατιστική μηχανική

Ludvig Boltzmann
1844-1906

Θερμική ισορροπία

Κατανομή Boltzmann-Gibbs

$$P_x \approx \exp(-E_x/k_B T)$$

k_B: σταθερά Boltzmann

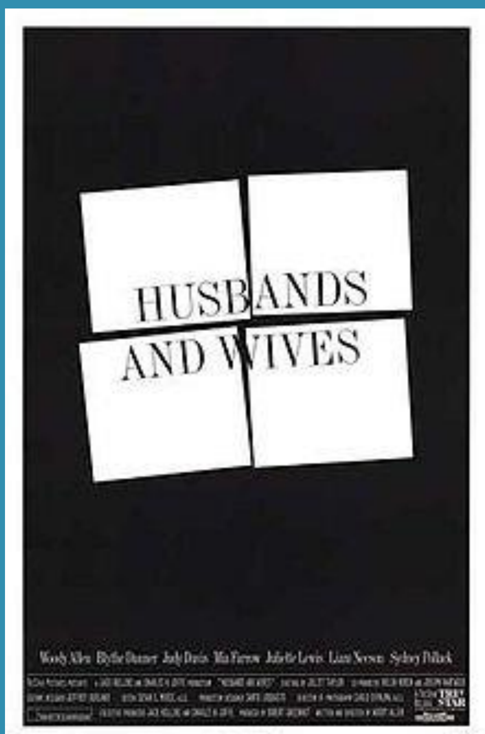
T: θερμοκρασία (Kelvin)

Στοχαστική κατάβαση κλίσης

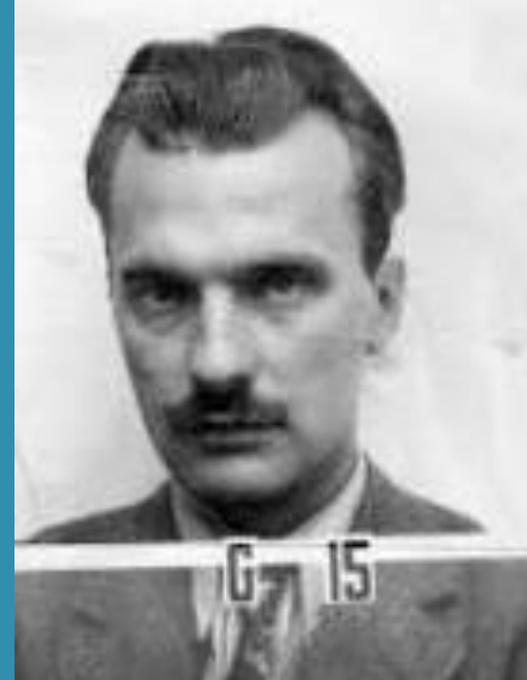
$$P_x/P_y = \exp[-(E_x-E_y)/T]$$
$$= \exp[-(\Delta E)/T]$$

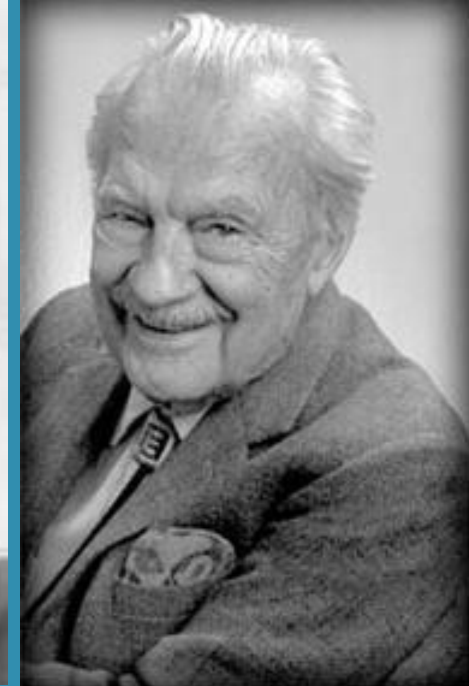
Αλγόριθμος Metropolis (1953)

Η συμβολή της Φυσικής II



Woody Allen, 1992





Nicholas C. Metropolis
(Νικόλαος Κ. Μητρόπουλος)
1915-1999

Computer Pioneer Award (1984)

Η μέθοδος Monte-Carlo

Στοχαστικό δίκτυο Hopfield
Διακριτό Hopfield + Simulated Annealing

- Αν $\Delta E_i < 0$ η ενημέρωση γίνεται δεκτή
- Αν $\Delta E_i \geq 0$ η ενημέρωση γίνεται δεκτή
  με πιθανότητα $p(\Delta E, T) = \exp(-\Delta E_i/(T))$

Μείωση θερμοκρασίας

Διακριτό Hopfield για $T \rightarrow 0$

Ασυμπτωτική σύγκλιση στο σύνολο των βέλτιστων λύσεων.

aka $\Longrightarrow$ Μηχανή Boltzmann

Προβλήματα (διακριτής) συνδυαστικής βελτιστοποίησης
Απεικόνιση σε νευρωνικά δίκτυα

Πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης:

- Σύνολο περιορισμών
- Συνάρτηση κόστους (αντικειμενική) ***J***

Νευρωνικό δίκτυο τύπου Hopfield:

- Συνάρτηση ενέργειας ***E***

Προσδιορισμός των παραμέτρων του δικτύου ώστε η ενέργεια ***E*** του δικτύου να εκφράζει ένα *μέτρο* του κόστους ***J*** της λύσης του προβλήματος

Απεικόνιση προβλημάτων σε νευρωνικά δίκτυα

Άμεση απεικόνιση:

- Ενσωμάτωση των περιορισμών στο κόστος ***J*** μέσω όρων ποινής (penalty terms)
- Ταύτιση των συναρτήσεων ***E*** και ***J*** (ταύτιση των συντελεστών ομοβάθμιων όρων)

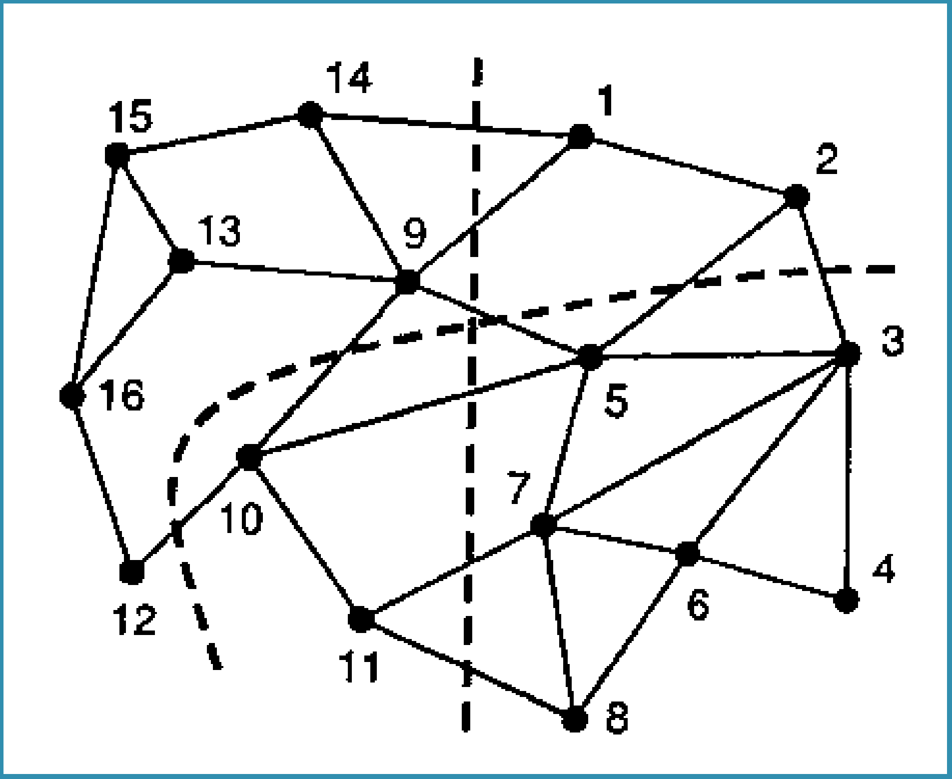
Έμμεση απεικόνιση:

- Κάθε τοπικό ελάχιστο της ενέργειας ***E*** αντιστοιχεί σε *εφικτή* λύση – ικανοποίηση περιορισμών (feasibility).
- Όσο χαμηλότερο ένα τοπικό ελάχιστο της ενέργειας ***E***, τόσο καλύτερο το κόστος της ***J*** αντίστοιχης λύσης (order preservation).

Διαμερισμός γράφου

Graph bipartitioning

Διαμερισμός των κορυφών του γράφου σε δύο σύνολα ίσου μεγέθους, ώστε να ελαχιστοποιείται ο αριθμός των ακμών που συνδέουν τα δύο σύνολα κορυφών.



Διαμερισμός γράφου

$y_i \in \{-1,+1\}$ (συμμετοχή στα δύο σύνολα)

a_{ij}: πίνακας διπλανών κορυφών

Ελαχιστοποίηση πλήθους ακμών:
$$L = -\frac{1}{2}\sum_i \sum_j a_{ij} y_i y_j$$

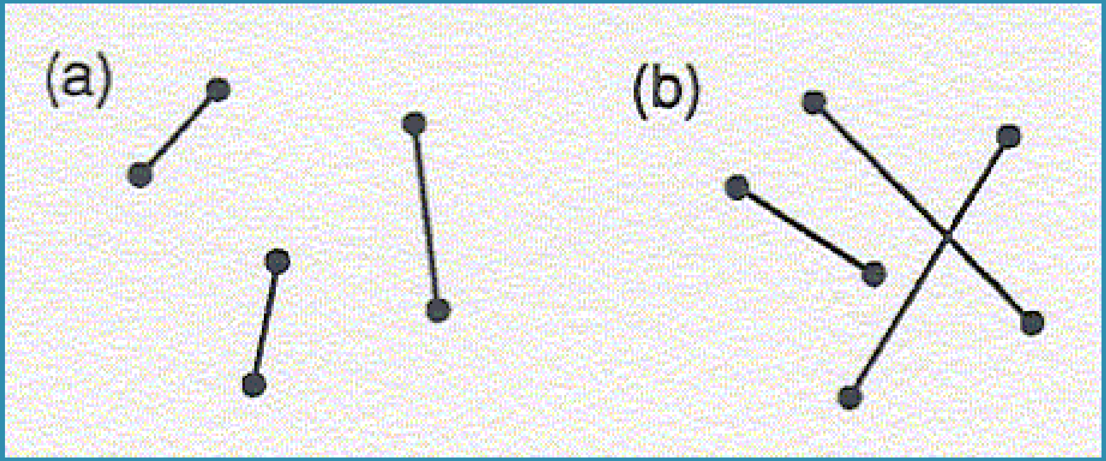
Περιορισμός: $\sum_i y_i = 0$ $\Rightarrow$ όροι ποινής

Συνάρτηση κόστους:
$$J = L + \mu \left(\sum_i y_i \right)^2$$

Άμεση απεικόνιση $\Rightarrow$ $w_{ij} = a_{ij} - 2\mu$

Πρόβλημα αντιστοίχισης
Weighted matching problem

Δίνονται N σημεία. Να συνδεθούν ανά δύο, ώστε κάθε σημείο να συνδέεται με ένα και μόνο ένα άλλο και να ελαχιστοποιείται το συνολικό μήκος των συνδέσμων.



(a) καλή λύση
(b) κακή λύση

Πρόβλημα αντιστοίχισης

$y_{ij} \in \{0,1\}$ ($N(N-1)/2$ ζεύγη σημείων)

d_{ij}: απόσταση σημείων

Συνολικό μήκος συνδέσμων: $$L = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j d_{ij} y_{ij}$$

Περιορισμός: $$\sum_j y_{ij} = 1, \quad \forall i$$

Συνάρτηση κόστους: $$J = L + \frac{\gamma}{2}\sum_i \left(1 - \sum_j y_{ij}\right)^2$$

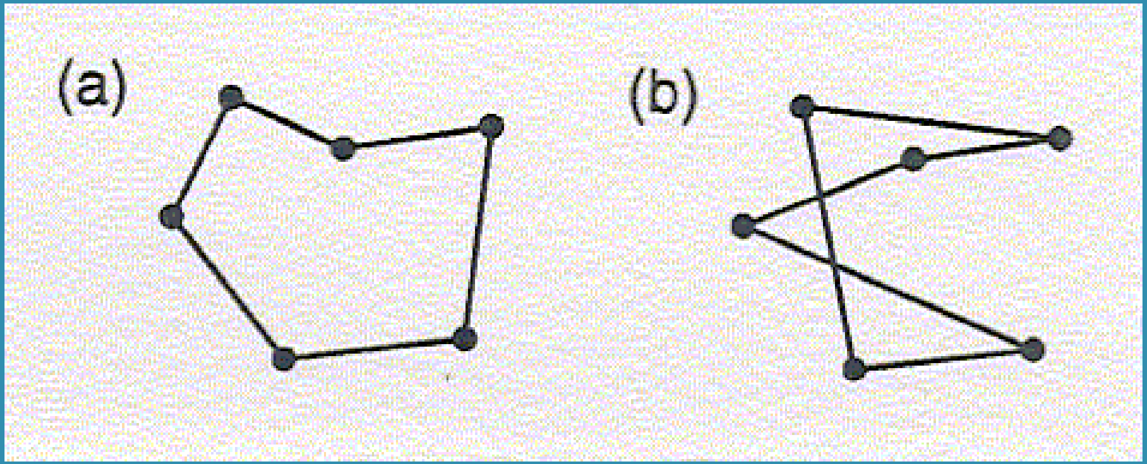
Άμεση απεικόνιση $\Rightarrow$

$w_{ij,kl} = -\gamma$ (ζεύγη με κοινούς δείκτες), $\theta_{ij} = -d_{ij} + \gamma$

Πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή
Traveling Salesperson Problem (TSP)

Δίνονται N σημεία (πόλεις). Ζητείται η ελάχιστη κλειστή διαδρομή που επισκέπτεται κάθε πόλη μια φορά και επιστρέφει στο αρχικό σημείο (Hamiltonian circuit).

N!/2N διαδρομές



(a) καλή λύση
(b) κακή λύση

Πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή

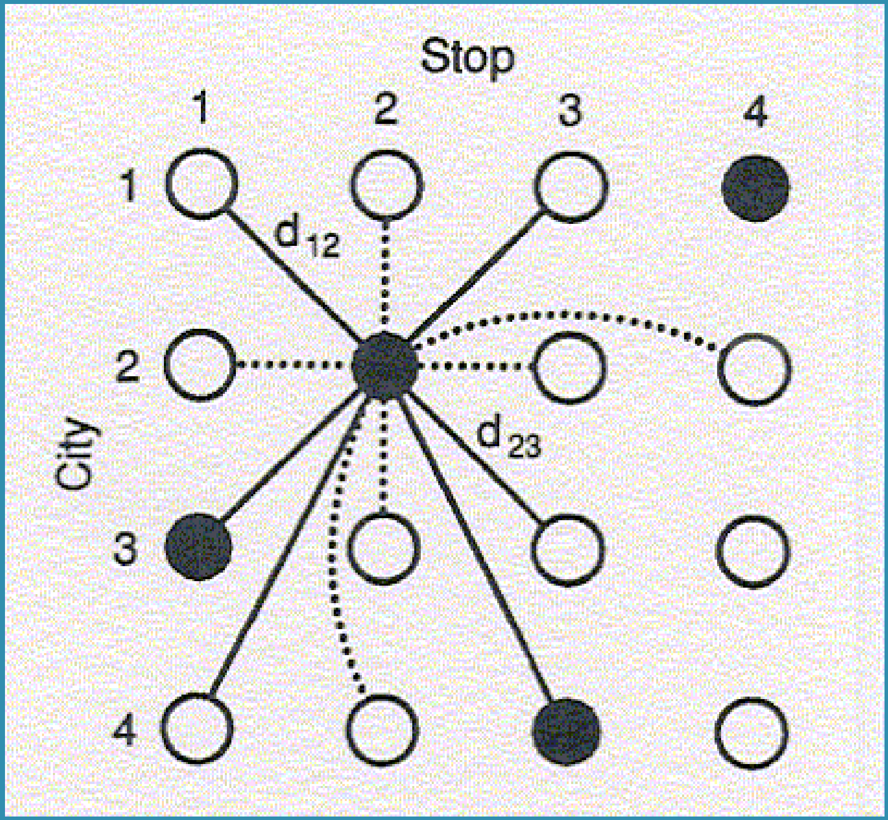
Διδιάστατη απεικόνιση

$y_{ai} \in \{0,1\}$ (η πόλη a στην i θέση της διαδρομής)

d_{ab}: απόσταση σημείων

Περιοδικές οριακές συνθήκες:

$i \pm 1 = (i \pm 1) \bmod N$



- $O(N^3)$ συνδέσεις
- permutation matrix

Πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή

Περιορισμοί: $\sum_a y_{ai} = 1, \forall i, \qquad \sum_i y_{ai} = 1, \forall a$

Μήκος διαδρομής:

$$L = \frac{1}{2} \sum_a \sum_i y_{ai} \sum_{\substack{b \\ b \neq a}} d_{ab} \left(y_{b,i-1} + y_{b,i+1} \right)$$

Συνάρτηση κόστους:

$$J = L + \frac{\gamma}{2} \left(\sum_i \left(1 - \sum_a y_{ai} \right)^2 + \sum_a \left(1 - \sum_i y_{ai} \right)^2 \right)$$

Πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή

Άμεση απεικόνιση $\Rightarrow$ Συνδέσεις:

- $-d_{ab}$ μεταξύ νευρώνων διπλανών στηλών
- $-\gamma$ μεταξύ νευρώνων της ίδιας γραμμής ή στήλης
- θετικές πολώσεις θ

Αρχική διατύπωση (αναλογικό δίκτυο):

Hopfield & Tank (1985), Wilson & Pawley (1988)

Πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή

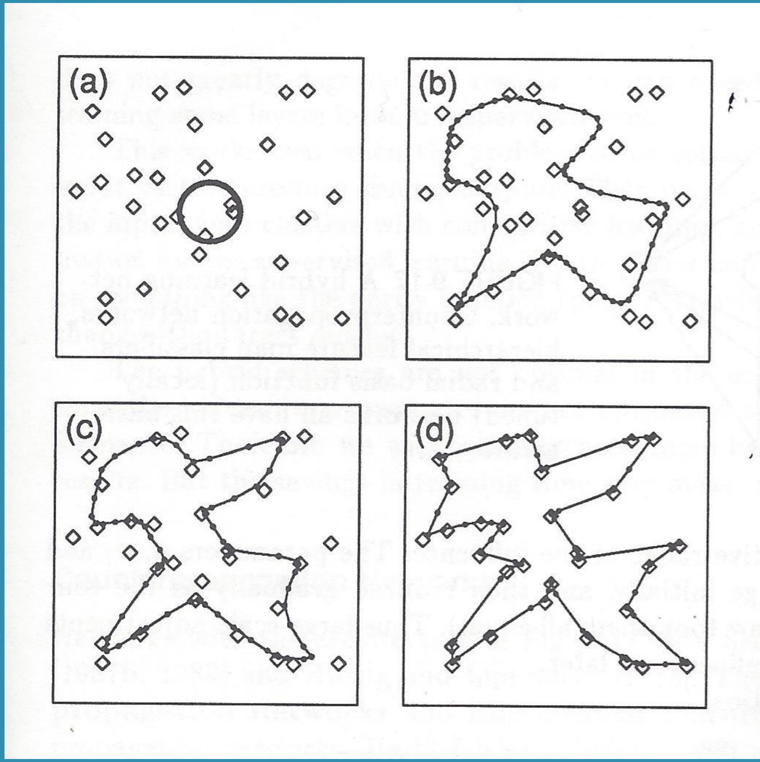
(*Ad hoc*) Λύση SOM

Ν πόλεις: διδιάστατο επίπεδο

Διαδρομή: δακτύλιος

Συντεταγμένες: εκπαιδευτικά δεδομένα

Βελτιστοποίηση κατά την εκπαίδευση



➢ *Angeniol et al., 1988*

Προβλήματα ικανοποίησης περιορισμών (Constraint Satisfaction Problems – CSP)

Δυαδικοί περιορισμοί

- Σύνολο μεταβλητών v_i, $i=1,\ldots,N$, με τιμές από τα πεδία D_i
- Σύνολο περιορισμών $(d_{ij}, d_{kl}) \in C$
- Αναζήτηση μιας ανάθεσης τιμών που ικανοποιεί τους περιορισμούς

Παραδείγματα: N-Queens, Graph coloring

Προβλήματα ικανοποίησης περιορισμών

Διδιάστατη αναπαράσταση (jagged matrix):
ο νευρώνας (*i*,*j*) αντιστοιχεί στην *j* τιμή της *i* μεταβλητής

Έμμεση απεικόνιση $\Rightarrow$ Συνδέσεις:

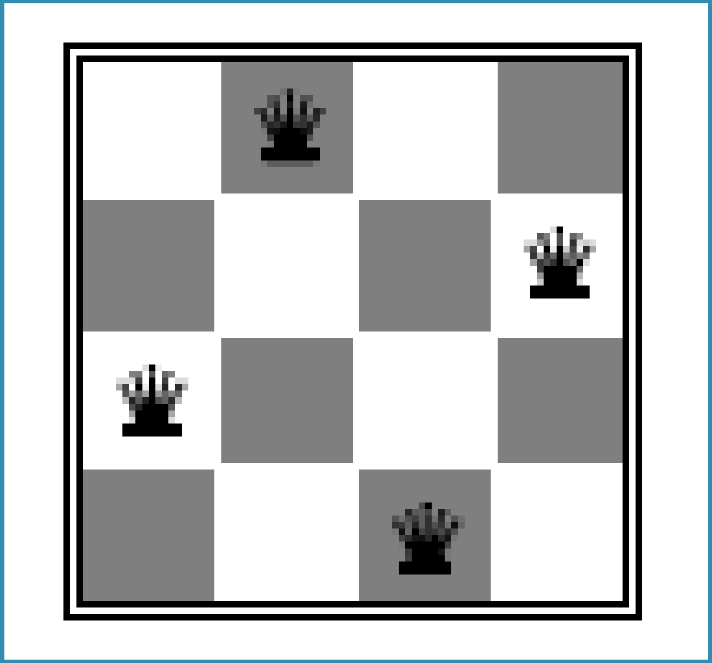
$$w_{ij,ij} = 0$$

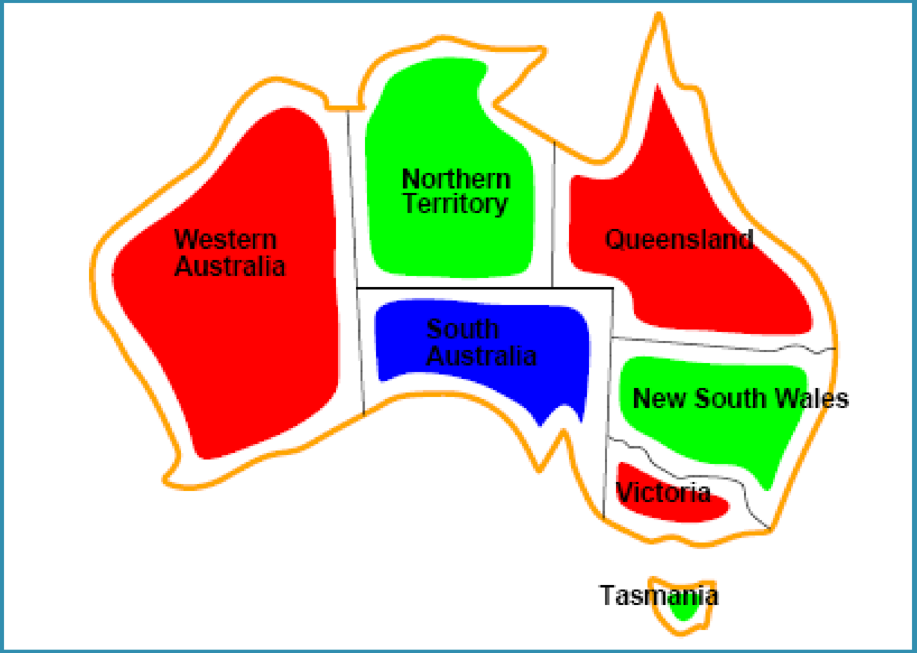
$$\vartheta_{ij} = b$$

$$w_{ij,mn} = \begin{cases} -a & \text{αν } (d_{ij}, d_{mn}) \in C \\ -e & \text{αν } i = m,\ j \neq n \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ικανοποίηση απαιτήσεων

a>b, e>b
(a, b, e >0)




Northern Territory
Western Australia
Queensland
South Australia
New South Wales
Victoria
Tasmania