ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ ΣΕΜΦΕ, 09/06/2016

Θέμα 1. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^d$ μη κενό.

(1) Πότε ένα σημείο $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ καλείται *σημείο συσσώρευσης* του A;

(2) Αν $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ σημείο συσσώρευσης του A και $\ell \in \mathbb{R}$ πότε λέμε ότι η f *έχει στο σημείο* $\mathbf{x}_0$ *όριο τον πραγματικό αριθμό* ℓ ;

(3) Εξετάστε αν υπάρχει το όριο $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (1) Ένα σημείο $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^d$ καλείται σημείο συσσώρευσης του A αν σε κάθε ανοικτή σφαίρα κέντρου $\mathbf{x}_0$ υπάρχει σημείο του A διαφορετικό του $\mathbf{x}_0$, ισοδύναμα αν για κάθε $\delta > 0$ έχουμε $B^*(\mathbf{x}_0,\delta) \cap A \neq \emptyset$, όπου $B^*(\mathbf{x}_0,\delta) = B(\mathbf{x}_0,\delta) \setminus \{\mathbf{x}_0\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0\}$.

(2) Λέμε ότι η f έχει στο σημείο $\mathbf{x}_0$ όριο τον πραγματικό αριθμό ℓ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $\mathbf{x} \in A$ με $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ και $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ ισχύει ότι $|f(\mathbf{x}) - \ell| < \epsilon$.

(3) Καταρχάς παρατηρούμε ότι για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ έχουμε

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \cdot |x| + \left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right| \cdot |y| \leq |x| + |y|$$

Άρα αν θέσουμε $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, για κάθε ακολουθία (x_n,y_n), με $(x_n,y_n) \neq (0,0)$ έχουμε $|f(x_n,y_n)| \leq |x_n| + |y_n|$ που σημαίνει ότι αν επιπλέον $(x_n,y_n) \to (0,0)$, τότε $f(x_n,y_n) \to 0$ (Πράγματι, αφού $(x_n,y_n) \to (0,0)$ έχουμε ότι $x_n \to 0$ και $y_n \to 0$. Άρα η ακολουθία $\big(f(x_n)\big)$ φράσσεται απολύτως απο μία μηδενική ακολουθία και άρα (πχ. απο Θεώρημα Ισοσυγκλινουσών) είναι και αυτή μηδενική). Συνεπώς για κάθε ακολουθία $(x_n,y_n) \to (0,0)$ με $(x_n,y_n) \neq (0,0)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $f(x_n,y_n) \to 0$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.
(*Σημείωση*: Το θέμα μπορεί να λυθεί και με πολικές συντεταγμένες).

Θέμα 2. (α) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Πότε η f καλείται διαφορίσιμη στο σημείο $\mathbf{x}_0$;

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

και $f(0,0) = 0$. Δείξτε τα εξής.

(1) Η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(2) Οι πρώτης τάξης μερικές παράγωγοι της f στο $(0,0)$ είναι και οι δύο μηδέν.

(3) Η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ αν υπάρχει $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε να ισχύει

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Αποδεικνύεται ότι αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε η f είναι και μερικώς διαφορίσιμη και η γραμμική απεικόνιση T είναι μοναδική και δίνεται απο τον τύπο

$$T(\mathbf{x}) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x}\rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)\cdot x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\cdot x_n.$$

Η μοναδική αυτή γραμμική απεικόνιση T καλείται το *διαφορικό της* f *στο σημείο* $\mathbf{x}_0$.

(β1) Παρατηρούμε ότι

$$|f(x,y)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot|y| \le |y|$$

Εργαζόμενοι τώρα όπως στο Θέμα 1(3) έχουμε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ και άρα η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(β2) Έχουμε

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

(β3) Απο το ερώτημα (β2) έχουμε ότι $\nabla f(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0)) = (0,0)$. Άρα αν η f ήταν διαφορίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (0,0)$ τότε (δες και ερώτημα (α)) θα έπρεπε το διαφορικό της f στο $(0,0)$ να ήταν η σταθερή μηδενική συνάρτηση, $T(\mathbf{x}) = 0$, $\forall$ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Άρα, αφού $T = 0$ και $f(0,0) = 0$, θα είχαμε

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} - 0 - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{h^2+k^2} = 0.$$

Όμως το όριο αυτό δεν υπάρχει. Πράγματι, για την ακολουθία $(h_n,k_n) = (1/n, 1/n) \to (0,0)$ είναι $f(1/n,1/n) = 1/2 \ \forall\ n\in\mathbb{N}$ και άρα και $\lim f(h_n,k_n) = 1/2$ ενώ για την $(h_n,k_n) = (1/n,0)\to(0,0)$ είναι $f(1/n,0) = 0\ \forall\ n\in\mathbb{N}$ και άρα και $\lim f(h_n,k_n) = 0$.

Θέμα 3. (α) Δείξτε ότι η εξίσωση $F(x,y) = x^2e^y + y - 2 = 0$ ορίζει πεπλεγμένα σε μια περιοχή του σημείου $(0,2)$ μια μοναδική παραγωγίσιμη συνάρτηση $y = f(x)$. Δώστε τον τύπο της $f'(x)$ και εξηγείστε γιατί η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x = 0$.

(β) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $F(x,y,z) = x+y+z+e^{xyz}-1 = 0$ ορίζει πεπλεγμένα μια μοναδική συνάρτηση $z = f(x,y)$ σε μια περιοχή του σημείου $(0,0,0)$. Υπολογίστε τις $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ καθώς και την εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου της επιφάνειας $F(x,y,z) = 0$ στο $(0,0,0)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α) Η συνάρτηση F είναι C^1. Πράγματι, η F είναι συνεχής, $F_x(x,y) = 2xe^y$ συνεχής και $F_y(x,y) = x^2e^y + 1$, συνεχής. (Σημείωση: Βασικά η συνέχεια της F προκύπτει απο την παραγωγισιμότητά της λόγω συνέχειας των μερικών παραγώγων). Επίσης $F(0,2) = 0$ και $F_y(0,2) = 1 \neq 0$. Αρα ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος των Πεπλεγμένων Συναρτήσεων (για $F : \mathbb{R}^{1+1} \to \mathbb{R}^1$) και συνεπώς υπάρχουν ανοικτές περιοχές U του 0 και και V του 2 στο $\mathbb{R}$ και διαφορίσιμη συνάρτηση $f : U \to V$ ώστε για κάθε (x,y) με $x \in U$ και $y \in V$

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x).$$

Απο τον τύπο της f' έχουμε

$$f'(x) = -\frac{F_y(x,y)}{F_x(x,y)} = -\frac{2xe^y}{x^2e^y + 1},$$

για κάθε $x \in U$ (όπου $y = f(x)$). Απο τον τύπο βλέπουμε ότι $f'(0) = 0$ (άρα το 0 είναι κρίσιμο σημείο για την f) και αν $x \in U$ και $x < 0$ (αντ. $x > 0$) τότε $f'(x) > 0$ (αντ. $f'(x) < 0$). Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα αριστερά του 0 και γνησίως φθίνουσα δεξιά του 0. Συνεπώς, το 0 είναι θέση ολικού μεγίστου.

(β) Η συνάρτηση F είναι C^1. Πράγματι, η F είναι συνεχής, $F_x(x,y,z) = 1 + yze^{xyz}$ συνεχής, $F_y(x,y,z) = 1 + xze^{xyz}$ συνεχής και $F_z(x,y,z) = 1 + xye^{xyz}$ συνεχής. (Σημείωση: Ισχύει η ίδια παρατήρηση με παραπάνω για την συνέχεια της F). Επίσης $F(0,0,0) = 0$, και $F_z(0,0,0) = 1 \neq 0$. Άρα ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος των Πεπλεγμένων Συναρτήσεων (για $F : \mathbb{R}^{2+1} \to \mathbb{R}^1$) και συνεπώς υπάρχουν μία ανοικτή περιοχή U του $(0,0)$ στο $\mathbb{R}^2$, μια ανοικτή περιοχή V του 0 στο $\mathbb{R}$ και μία διαφορίσιμη συνάρτηση $f : U \to V$ ώστε για κάθε $(x,y) \in U$ και κάθε $z \in V$

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow z = f(x,y).$$

Επιπλέον οι μερικές παράγωγοι της f στο $(0,0,0)$ δίνονται απο τους τύπους

$$f_x(0,0) = -\frac{F_x(0,0,0)}{F_z(0,0,0)} = -1, \ f_y(0,0) = -\frac{F_y(0,0,0)}{F_z(0,0,0)} = -1.$$

Τέλος, το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας $F(x,y,z) = 0$ στο $(0,0,0)$ έχει τύπο

$$\begin{aligned} &\langle \nabla F(0,0,0), (x-0, y-0, z-0) \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow &\langle (F_x(0,0,0), F_y(0,0,0), F_z(0,0,0)), (x,y,z) \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow &\langle (1,1,1), (x,y,z) \rangle = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0. \end{aligned}$$

Θέμα 4. (α) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη και $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ λεία καμπύλη. Αν $f(\gamma(0)) = f(\gamma(1))$ δείξτε ότι υπάρχει $t_0 \in (0,1)$ με $\nabla f(\gamma(t_0)) \perp \gamma'(t_0)$.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$. Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα της F.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: (α) Θέτουμε $F = f \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$. Τότε

$$F(0) = F(1).$$

Επισης από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε ότι η F είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και ισχύει ότι

$$F'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t), \gamma'(t) \rangle$$

για κάθε $t \in (0,1)$. Τώρα απο το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής) έχουμε ότι υπάρχει $t_0 \in (0,1)$ με

$$F(1) - F(0) = F'(t_0)(1-0) \Leftrightarrow 0 = \langle \nabla f(\gamma(t_0), \gamma'(t_0) \rangle$$

που εξόρισμού σημαίνει ότι $\nabla f(\gamma(t_0) \perp \gamma'(t_0)$.

(β) Η F είναι C^2. Πράγματι, $F_x(x,y) = 4x^3 - 4(x-y) = 4x^3 - 4x + 4y$, $F_y(x,y) = 4y^3 + 4(x-y) = 4y^3 + 4x - 4y$, $F_{xx}(x,y) = 12x^2 - 4$, $F_{yy}(x,y) = 4y^2 - 4$ και $F_{xy}(x,y) = F_{yx}(x,y) = 4$ όλες συνεχείς. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία. Το σύστημα $F_x(x,y) = F_y(x,y) = 0$ δίνει ότι $x^3 = -y^3$ ισοδύναμα $x = -y$. Αντικαθιστώντας βρίσκουμε ότι τα πιθανά τοπικά ακρότατα είναι τα εξής σημεία $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ και $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Τώρα (για $\Delta = F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2$) έχουμε $\Delta(0,0) = 0$ και άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε απο αυτό για το αν το $(0,0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Όμως παρατηρούμε ότι (α) $F(0,0) = 0$, (β) για κάθε $0 < \eta \leq 1$, είναι $F(\eta, 0) = \eta^4 - 2\eta^2 < 0$ και (β) για κάθε $\eta \neq 0$ είναι $F(\eta,\eta) = 2\eta^4 > 0$. Αυτά δείχνουν ότι *όσο κοντά θέλουμε* στο $(0,0)$ μπορούμε να βρούμε δύο σημεία που η τιμή της F στο ένα να είναι μικρότερη του $F(0,0)$ ενώ η τιμή στο άλλο να είναι μεγαλύτερη του $F(0,0)$, πράγμα που σημαίνει ότι η F δεν έχει τοπικό ακρότατο στο $(0,0)$. Πιο συγκεκριμένα, έστω ένα οποιοδήποτε $\delta > 0$ και έστω $\eta = \min\{1, \delta/2\}$. Τότε $\|(\eta, 0)\| = \sqrt{\eta^2 + 0} = \eta < \delta$ και όμοια $\|(\eta,\eta)\| = \sqrt{2\eta^2} = \sqrt{2}\eta < \delta$. Άρα και τα δύο σημεία $(\eta,0), (\eta,\eta)$ περιέχονται στην ανοικτή σφαίρα $B(\mathbf{0}, \delta)$ και όπως είδαμε $F(\eta, 0) < F(0,0) < F(\eta,\eta)$. Άρα το $(0,0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο.

Τέλος όπως εύκολα ελέγχουμε $\Delta(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \Delta(\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$ και $F_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = F_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) > 0$ οπότε και τα δύο αυτά σημεία είναι τοπικά ελάχιστα για την F.

Άρα η F έχει ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα που είναι και τα δύο τοπικά ελάχιστα.