ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ, 15/09/2017

Θέμα 1. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) = \dfrac{2x^3 - 3y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$.

(i) Δείξτε ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$. (1,5 μον)

(ii) Αν $\vec{v} = (v_1, v_2)$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα του επιπέδου, να βρεθεί η παράγωγος της f στο $(0,0)$ κατά την κατεύθυνση $\vec{v}$. (1 μον)

ΘΕΜΑ 2. (β) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = e^{3x+5y}$.

(i) Δείξτε ότι η f διαφορίσιμη και βρείτε πολυώνυμο 1ου βαθμού $P_1(x,y)$ τέτοιο ώστε $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{3x+5y} - P_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$ (1 μον)

(iii) Βρείτε πολυώνυμο 2ου βαθμού $P_2(x,y)$ τέτοιο ώστε $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{3x+5y} - P_2(x,y)}{x^2+y^2} = 0.$ (1,5 μον)

Θέμα 3. (i) Έστω $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη και $\vec{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ λεία καμπύλη. Αν $F(\vec{r}(0)) = F(\vec{r}(1))$ δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ με $\nabla F\big(\vec{r}(\xi)\big) \perp \vec{r}\,'(\xi)$. (1 μον)

(ii) Δίνεται η συνάρτηση $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$. Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα της F. (1,5 μον)

Θέμα 4. Δίνεται η συνάρτηση $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(x,y,z) = z^3 + z + 2x^2 + 2y^2$.

(i) Δείξτε ότι η F είναι κλάσης C^2 και ότι η εξίσωση $F(x,y,z) = 0$ ορίζει μια μοναδική συνάρτηση $z = z(x,y) : U \to \mathbb{R}$ σε μια περιοχή $U \subseteq \mathbb{R}^2$ του σημείου $(0,0)$ με $z(0,0) = 0$. (0,5 μον)

(ii) Δείξτε ότι το $(0,0)$ είναι τοπικό ακρότατο της $z = z(x,y)$ και προσδιορείστε το είδος του. (1 μον)

(iii) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor της $z = z(x,y)$ δεύτερης τάξης στο $(0,0)$ και υπολογίστε το όριο $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y)}{x^2+y^2}$. (1 μον)

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ $\mathbf{2,5}$ ΩΡΕΣ