# ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ, 13/06/2019

**Θέμα 1.** (α) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Πότε λέμε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{a}$; (0,5 μον).

(β) Εξετάστε αν η συνάρτηση $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$. (1 μον).

(γ) Ομοίως για την συνάρτηση $f(x, y, z) = \sqrt{|xyz|}$ στο $(0, 0, 0)$. (1 μον)

**Θέμα 2.** Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$F(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

(2,5 μον)

**Θέμα 3.** (α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2$$

έχει ένα μοναδικό τοπικό ακρότατο που είναι τοπικό ελάχιστο. (1 μον)

(β) Δείξτε τα εξής: (i) Για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$, $\dfrac{|x + y + z|}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (*Υπόδειξη: Ανισότητα Cauchy–Schwarz*). (0,5 μον)

(ii) Το τοπικό ελάχιστο της $F$ στο ερώτημα (α) είναι ολικό ελάχιστο. (0,5 μον)

(γ) Με βάση τα παραπάνω ποιό είναι το σημείο του επιπέδου $x+y+z = 1$ με την μικρότερη απόσταση απο το $(0, 0, 0)$. (0,5 μον)

**Θέμα 4.** Δίνεται η συνάρτηση $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3 + z^2 + z + 1.$$

(α) Βρείτε το μοναδικό $z_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $F(0, 0, z_0) = 0$ και δείξτε ότι η εξίσωση $F(x, y, z) = 0$ ορίζει μια μοναδική συνάρτηση $z = z(x, y) : U \to \mathbb{R}$ κλάσης $C^2$ σε μια περιοχή $U$ του σημείου $(0, 0)$ με $z(0, 0) = z_0$ και $F(x, y, z(x, y)) = 0$, για κάθε $(x, y) \in U$. (0,5 μον)

(β) Υπολογίστε τις πρώτης και δεύτερης τάξης μερικές παραγώγους της $z = z(x, y)$ και γράψτε το πολυώνυμο Taylor $T_2(x, y)$ της $z = z(x, y)$ δεύτερης τάξης στο $(0, 0)$. (1 μον)

(γ) Υπολογίστε τα όρια $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x, y) + 1}{x^2 + y^2}$ και $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x, y) + 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. (1 μον)

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ $\mathbf{2,5}$ ΩΡΕΣ