ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ ΣΕΜΦΕ
4/9/2019

Θέμα 1. (α) Εξετάστε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια

$$\text{(i)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} y \cdot \sin\frac{1}{x} \quad (0,5\,\text{μον.}) \qquad \text{(ii)} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} \quad (0,5\,\text{μον.}).$$

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Έχει η f μερικές παραγώγους στο $(0,0)$; (0,5 μον.)

(γ) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα για κάθε $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x_0+h,y_0) = f(x_0,y_0+h) = f(x_0,y_0)$, για όλα τα $h \in (-\delta,\delta)$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση. (1 μον)

Θέμα 2. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$.

(i) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,0)$. (0,5 μον)

(ii) Αν $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα του επιπέδου, να βρεθεί η παράγωγος της f στο $(0,0)$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{v}$. (*Υπόδειξη*: Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό της παραγώγου κατά κατεύθυνση) (1 μον)

(iii) Δείξτε ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$. (1 μον)

Θέμα 3. Δίνεται η συνάρτηση $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(x,y,z) = z^5 + z - x^2 - y^2$.

(i) Εξηγείστε γιατί η εξίσωση $F(x,y,z) = 0$ ορίζει μια μοναδική συνάρτηση $z = z(x,y) : U \to \mathbb{R}$ σε μια περιοχή U του σημείου $(0,0)$ με $z(0,0) = 0$. (0,5 μον)

(ii) Υπολογίστε τις πρώτης και δεύτερης τάξης μερικές παραγώγους της $z = z(x,y)$ στο σημείο $(0,0)$ και δείξτε ότι η $z = z(x,y)$ έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $(0,0)$. (1 μον)

(iii) Δώστε το πολυώνυμο Taylor της $z = z(x,y)$ δεύτερης τάξης στο $(0,0)$ και βρείτε το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y)}{x^2+y^2}$. (1 μον)

Θέμα 4.

(α) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = x^3 + y^3 - 18xy$. Βρείτε και ταξινομείστε τα τοπικά ακρότατα της f. (1,5 μον.)

(β) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη και $\mathbf{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ λεία καμπύλη. Αν $f(\mathbf{r}(0)) = f(\mathbf{r}(1))$ δείξτε ότι υπάρχει $t_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε τα διανύσματα $\nabla f(\mathbf{r}(t_0))$ και $\mathbf{r}'(t_0)$ είναι κάθετα μεταξύ τους. (1 μον)

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ $\mathbf{2,5}$ ΩΡΕΣ