ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΠΙ ΠΤΥΧΙΩ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ, 31/01/2020

Θέμα 1. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) = \dfrac{2x^3 + 3y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$.

(i) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,0)$. (0,5 μον)

(ii) Δείξτε ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$. (1 μον)

(iii) Αν $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα του επιπέδου εξετάστε αν υπάρχει η παράγωγος της f στο $(0,0)$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$. (1 μον)

Θέμα 2. Έστω $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμες συναρτήσεις και $\mathbf{a} \neq \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε $f_1(\mathbf{a}) = f_1(\mathbf{b})$ και $f_2(\mathbf{a}) = f_2(\mathbf{b})$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(\boldsymbol{\xi}_1) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y}(\boldsymbol{\xi}_2) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(\boldsymbol{\xi}_1) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}(\boldsymbol{\xi}_2).$$

(2 μον)

Θέμα 3. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$F(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$ (2 μον)

Θέμα 4. Δίνεται η συνάρτηση $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο $F(x,y,z) = z^5 + z + x^2 + y^2$.

(i) Δείξτε ότι η εξίσωση $F(x,y,z) = 0$ ορίζει μια μοναδική C^2-συνάρτηση $z = f(x,y) : U \to \mathbb{R}$ σε μια περιοχή U του σημείου $(0,0)$. (0,5 μον)

(ii) Υπολογίστε τις πρώτης και δεύτερης τάξης μερικές παραγώγους της $f(x,y)$ στο σημείο $(0,0)$ και δείξτε ότι η $f(x,y)$ έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $(0,0)$. (1,5 μον)

(iii) Δώστε τα πολυώνυμα Taylor της $f(x,y)$ πρώτης και δεύτερης τάξης στο $(0,0)$ και βρείτε τα όρια $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ και $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$. (1,5 μον)

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ **2,5** ΩΡΕΣ