

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ, 1/07/2020

Θέμα 1. Εξετάστε αν η συνάρτηση

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

αν $(x, y) \neq (0, 0)$ και $f(0, 0) = 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$. (2,5 μον)

Θέμα 2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης. Έστω ότι το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο της f με $f(0, 0) = 0$, $f_{xx}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = 2$ και $f_{xy}(0, 0) = 0$. Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor της f τάξης 2 με κέντρο το $(0, 0)$ και στην συνέχεια βρείτε τα όρια

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{και} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}.$$

(2,5 μον)

Θέμα 3. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x, y) = x^4 - 2x^2 - y^2 + 5.$$

(2,5 μον)

Θέμα 4. Δείξτε ότι υπάρχει μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση μιας μεταβλητής $f : U \rightarrow V$ όπου $U, V \subseteq (0, +\infty)$ περιοχές του 1 που να ικανοποιεί τις σχέσεις

$$x^{f(x)} + f(x)^x = 2, f(1) = 1 \text{ και } f'(1) = -1.$$

(2,5 μον)

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΘΕΜΑΤΑ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 1 ΩΡΑ ΚΑΙ 20'