ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ, ΣΕΜΦΕ, 2/09/2020

Θέμα 1. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$ και $f(0,0) = 0$.

(α) Δείξτε ότι για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$ η παράγωγος $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$ της f στο $(0,0)$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ υπάρχει. (1,25 μον)

(β) Είναι η f διαφορίσιμη στο $(0,0)$? (1,25 μον)

Λύση :

(α) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$. Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\mathbf{u}) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3u_1^3 + t^3u_2^3}{t^2u_1^2+t^2u_2^2}}{t} = \frac{u_1^3+u_2^3}{u_1^2+u_2^2} = u_1^3 + u_2^3.$$

αφού $\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 = 1$ ($\mathbf{u}$ μοναδιαίο).

(β) Απο το (α) για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1,0)$,

$$f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(0,0) = 1,$$

και αντίστοιχα για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0,1)$,

$$f_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(0,0) = 1.$$

Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ με δύο τρόπους.

1ος τρόπος: Γνωρίζουμε (βλ. Πόρισμα 3.13 στις *Πρόχειρες Σημειώσεις Ανάλυσης ΙΙ*) ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ αν και μόνο αν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

ισοδύναμα,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y + xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

Αλλά τότε αν $x = y = t$ θα πρέπει

$$\lim_{t\to 0} \frac{2t^3}{\sqrt{2}|t|^3} = 0 \text{ ή } \lim_{t\to 0} \frac{t}{|t|} = 0,$$

που βέβαια δεν ισχύει.

2ος τρόπος: Γνωρίζουμε (βλ. Πρόταση 3.14 στις *Πρόχειρες Σημειώσεις Ανάλυσης ΙΙ*) ότι αν η f ήταν διαφορίσιμη στο $(0,0)$ τότε θα έπρεπε

(1)
$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = f_x(x_0,y_0)u_1 + f_y(x_0,y_0)u_2 = u_1 + u_2.$$

για κάθε κατευθύνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

Όμως απο το (α) έχουμε ότι $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = u_1^3 + u_2^3$. Άρα θα έπρεπε $u_1^3 + u_2^3 = u_1 + u_2$, για όλα τα $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$ που προφανώς δεν ισχύει.

Θέμα 2. Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor της $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ τάξης 2 με κέντρο το $(1,0)$ και εξετάστε αν υπάρχει το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(x^2+y^2)}{(x-1)^2+y^2}$. (2,5 μον)

Λύση : Έχουμε

$$\begin{aligned}
f_x(x,y)&=\frac{2x}{x^2+y^2},\quad f_y(x,y)=\frac{2y}{x^2+y^2}\\
f_{xx}(x,y)&=\frac{2(x^2+y^2)-2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}\\
f_{yy}(x,y)&=\frac{2(x^2+y^2)-2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\\
f_{xy}(x,y)&=(f_x)_y=\frac{-2x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

Άρα

$$f_x(1,0)=2,\quad f_y(1,0)=0,\quad f_{xx}(1,0)=-2,\quad f_{yy}(1,0)=2,\quad f_{xy}(1,0)=0$$

οπότε το πολυώνυμο Taylor της $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ τάξης 2 με κέντρο το $(1,0)$ είναι το

$$\begin{aligned}
T_2(x,y)&=f(1,0)+f_x(1,0)(x-1)+f_y(1,0)y+\frac{1}{2}\left(f_{xx}(1,0)(x-1)^2+2f_{xy}(1,0)(x-1)y+f_{yy}(1,0)y^2\right)\\
&=2(x-1)-(x-1)^2+y^2
\end{aligned}$$

Απο το Θεώρημα Taylor (βλ. Θεώρημα 5.16 στις *Πρόχειρες Σημειώσεις Ανάλυσης ΙΙ*) έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(x^2+y^2)-\left(2(x-1)-(x-1)^2+y^2\right)}{(x-1)^2+y^2}=0$$

Άρα αν υπήρχε το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(x^2+y^2)}{(x-1)^2+y^2}$, τότε θα υπήρχε και το

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{2(x-1)-(x-1)^2+y^2}{(x-1)^2+y^2}$$

και θα ήταν ίσα. Όμως το παραπάνω όριο δεν υπάρχει αφού για $x=1+u$ με $u\neq 0$, $u\to 0$ και $y=0$ το όριο ισούται με

$$\lim_{u\to 0}\frac{2u-u^2}{u^2}=\lim_{u\to 0}\left(\frac{2}{u}\right)-1$$

το οποίο δεν υπάρχει. Άρα το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(x^2+y^2)}{(x-1)^2+y^2}$ δεν υπάρχει.

Θέμα 3. Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$. (2,5 μον.)

Λύση : Η f είναι C^2 συνάρτηση (ως πολυωνυμική) και άρα για να βρούμε τα τοπικά ακρότατά της θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο δεύτερης παραγώγου (βλ. Θεώρημα 6.7 στις *Πρόχειρες Σημειώσεις Ανάλυσης ΙΙ*). Έχουμε

$$f_x(x,y) = 6x^2 - 6x, \quad f_y(x,y) = 6y^2 + 6y$$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λ΄σεις του συστήματος

$$6x^2 - 6x = 0$$
$$6y^2 + 6y = 0$$

Απο την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $x = 0, 1$ και απο την δεύτερη $y = 0, -1$. Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα εξής:

$$(0,0), \quad (0,-1), \quad (1,0) \text{ και } (1,-1)$$

Υπολογίζουμε τώρα τις παραγώγους δεύτερης τάξης της f:

$$f_{xx}(x,y) = 12x - 6, \quad f_{yy}(x,y) = 12y + 6, \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0$$

Άρα

$$\Delta(x,y) = (12x - 6)(12y + 6)$$

Οπότε

(1) Για το $(0,0)$ είναι $\Delta = -36 < 0$ και συνεπώς το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.
(2) Για το $(0,-1)$ είναι $\Delta = 36 > 0$, $f_{xx}(0,-1) = -6 < 0$ και συνεπώς στο $(0,-1)$ η f έχει τοπικό μέγιστο.
(3) Για το $(1,0)$ είναι $\Delta = 36 > 0$, $f_{xx}(0,-1) = 6 > 0$ και συνεπώς στο $(1,0)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.
(4) Για το $(1,-1)$ είναι $\Delta = -36 < 0$ και συνεπώς το $(1,-1)$ είναι σαγματικό σημείο.

Θέμα 4. Δείξτε ότι υπάρχει μια παραγωγίσιμη συνάρτηση μιας μεταβλητής $f : U \to \mathbb{R}$, όπου U περιοχή του 0, που να ικανοποιεί τις σχέσεις

$$x^2 e^{f(x)} + f(x) = 1, f(0) = 1 \text{ και } f'(0) = 0.$$

(2,5 μον)

Λύση : Ορίζουμε την συνάρτηση δύο μεταβλητών

$$F(x,y) = x^2 e^y + y - 1, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Η F είναι C^1 συνάρτηση με

$$F_x(x,y) = 2xe^y, \quad F_y(x,y) = x^2 e^y + 1$$

Επειδή $F_y(x,y) \neq 0$ για όλα τα $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ απο το Θεώρημα της Πεπλεγμένης Συνάρτησης (βλ. Θεώρημα 7.1 στις *Πρόχειρες Σημειώσεις Ανάλυσης ΙΙ*) έχουμε ότι η εξίσωση $F(x,y) = 0$ λύνεται τοπικά γύρω απο κάθε λύση της. Για $x = 0$ η εξίσωση $F(0,y) = 0$ δίνει $y = 1$ και άρα το σημείο $(0,1)$ είναι λύση της εξίσωσης $F(0,y) = 0$. Οπότε απο το Θεώρημα της Πεπλεγμένης Συνάρτησης για κατάλληλες περιοχές (ανοικτά διαστήματα) U του 0 και V του 1 θα υπάρχει μια (μοναδική) παραγωγίσιμη συνάρτηση μιας μεταβλητής $f : U \to V$, με τις ιδιότητες

$$F(x, f(x)) = 0 \Leftrightarrow x^2 e^{f(x)} + f(x) = 1, \text{ για κάθε } x \in U$$

και

$$f_x(0) = -\frac{F_x(0,1)}{F_y(0,1)} = -\frac{0}{1} = 0.$$