ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ -ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
07/09/2022
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 Ω

ΘΕΜΑ 1: (1,5 μ.) Δίνεται η συνάρτηση $u(x,y) = e^{-y}\cos x + 3x^2y - y^3$, $x, y \in \mathbb{R}$. Να βρείτε ολόμορφη συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ώστε $\text{Re}f = u$, $f(0) = 1 - i$.

ΘΕΜΑ 2: (1,5 μ.) Να αναπτύξετε σε σειρά Laurent γύρω από το σημείο $z_0 = 1$ τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3-z},$$

στο δακτύλιο $\Delta = \{ z \in \mathbb{C} : 1 < |z-1| < 2 \}$.

ΘΕΜΑ 3: (i) (1 μ.) Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και $z_0 \in \mathbb{C}$ με $f(z_0) = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$f(z) = (z - z_0)\varphi(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \varphi(z_0) = f'(z_0), \quad \varphi'(z_0) = f''(z_0)/2.$$

(ii)(2 μ.) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_\gamma \frac{z}{(e^z - e^{-z})^2} dz$, όπου $\gamma(t) = 4e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

ΘΕΜΑ 4 : (1,5 μ.) Με αποκλειστική χρήση Μιγαδικής Ανάλυσης να δείξετε ότι

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2 + \cos t)^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

ΘΕΜΑ 5 : (i)(1,5 μ.) Έστω f ολόμορφη και *φραγμένη* στον *τρυπημένο* ανοικτό δίσκο $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 < r \leq \infty$. Να δείξετε ότι το z_0 είναι αιρόμενο ανώμαλο σημείο της f. [*Υπόδειξη:* Να χρησιμοποιήσετε τους ολοκληρωτικούς τύπους για τους συντελεστές του αναπτύγματος Laurent.]

(ii)(1 μ.) Έστω $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη τέτοια ώστε

$$|f(z)| \geq \frac{1}{|z|}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad f(1) = 1.$$

Να δείξετε ότι $f(z) = \dfrac{1}{z}$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Θ.1 Έστω $f = u + iv$ η ζητούμενη συνάρτηση. Τότε,

$$v_y \overset{[C-R]}{=} u_x = -e^{-y}\sin x + 6xy$$

$$\Rightarrow \underline{v = e^{-y}\sin x + 3xy^2 + c(x).} \quad (1)$$

Επιπλέον, $v_x \overset{[C-R]}{=} -u_y$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} e^{-y}\cos x + 3y^2 + c'(x) = -\left(-e^{-y}\cos x + 3x^2 - 3y^2\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{e^{-y}\cos x} + \cancel{3y^2} + c'(x) = \cancel{e^{-y}\cos x} - 3x^2 + \cancel{3y^2}$$

$$\Rightarrow c'(x) = -3x^2 \Rightarrow \underline{c(x) = -x^3 + c_1}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \underline{v = e^{-y}\sin x + 3xy^2 - x^3 + c_1} \quad (2)$$

$$1 - i = f(0) = u(0,0) + iv(0,0) = 1 + i\,c_1$$

$$\Rightarrow c_1 = -1$$

$$\Rightarrow \underline{v = e^{-y}\sin x + 3xy^2 - x^3 - 1.}$$

Θ.2: Έστω $z \in \Delta$.

- Θέτουμε $w = \frac{z-1}{2} \Rightarrow [z = 1 + 2w$ κ' $|w| < 1]$

$$\Rightarrow \frac{1}{3-z} = \frac{1}{3-1-2w} = \frac{1}{2(1-w)} \overset{(|w|<1)}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}.$$

- Θέτουμε $w = \frac{1}{z-1} \Rightarrow \begin{cases} z = 1 + \frac{1}{w} = \frac{1+w}{w} \\ |w| < 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{z^2} = w^2 \frac{1}{(1+w)^2} = -w^2 \left(\frac{1}{1+w}\right)'$$

$$= -w^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^{n+2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} / (z-1)^{n+2}.$$

Άρα, $\forall z \in \Delta$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(z-1)^{n+2}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}.$$

Θ.3: (i) Από Θ. Taylor

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,\ \forall z\in\mathbb{C}$$

$$\overset{[f(z_0)=0]}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

$$=(z-z_0)\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-1}}_{\varphi(z)}$$

Η φ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ γιατί αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά στο $\mathbb{C}$. Επιπλέον,

$$\varphi(z)=f'(z_0)+\frac{f''(z_0)}{2}(z-z_0)+\cdots$$

$$\Rightarrow \varphi(z_0)=f'(z_0),\quad \varphi'(z_0)=\frac{f''(z_0)}{2}.$$

(ii) Τα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης

$$g(z)=\frac{z}{f(z)^2},\quad f(z)=e^z-e^{-z}$$

είναι οι ρίζες της εξίσωσης $e^z=e^{-z}$ κτλ.

$$e^{2z}=1 \Leftrightarrow 2z=2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow z=k\pi i\ \ k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow z=0,\ \pm\pi i,\ \pm 2\pi i,\ \dots$$

Μόνο τα $0, \pm\pi i \in \mathrm{int}\, \gamma^*$

Έχουμε $f(0)=f(\pm\pi i)=0,$

$$f'(0)=2,\ f'(\pm\pi i)=-2,$$
$$f''(\pm\pi i)=0$$

(i)

$\Rightarrow \forall z_0 \in \{\pm\pi i\},$

$$f(z)=(z-z_0)\varphi(z),\ \varphi(z_0)=f'(z_0)=-2,$$
$$\varphi'(z_0)=f''(z_0)/2=0$$

$$\Rightarrow g(z)=\frac{z}{(z-z_0)^2\varphi(z)^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to z_0}(z-z_0)^2 g(z)=\frac{z_0}{\varphi(z_0)^2}\neq 0$$

$\Rightarrow z_0$ διπλός πόλος της g

$$\Rightarrow \mathrm{Res}(g,z_0)=\left[\frac{z}{\varphi(z)^2}\right]'\Bigg|_{z=z_0}=\frac{\varphi(z_0)^2-2z_0\varphi'(z_0)\varphi(z_0)}{\varphi(z_0)^4}$$

$=$

$$= \frac{1}{6(z_0)^2} = 1/4 .$$

Επιπλέον, $\lim_{z\to 0} [z g(z)] =$

$$= \lim_{z\to 0}\left[\frac{z}{f(z)}\right]^2 = \lim_{z\to 0}\left[\frac{z-0}{f(z)-f(0)}\right]^2$$

$$= \frac{1}{f'(0)^2} = 1/4 .$$

Άρα, $\int_\gamma g(z)\,dz = 2\pi i\left(1/4 + 1/4 + 1/4\right) = \boxed{\frac{3\pi}{2} i}$

Θ.4: Το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int_\gamma \frac{\frac{dz}{iz}}{\left(2+\frac{z^2+1}{2z}\right)^2} = \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{\frac{dz}{z}}{\frac{(z^2+4z+1)^2}{4z^2}}$$

$$= \frac{4}{i}\int_\gamma \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}\,dz ,$$

$$\gamma(t) = e^{it}, \quad t\in[0, 2\pi].$$

Ρίζες του z^2+4z+1:

$$\alpha = -2+\sqrt{3}, \quad \beta = -2-\sqrt{3}$$

$$|\alpha| < 1 < |\beta|$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left[\frac{z}{(z^2+4z+1)^2}, \alpha\right]$$

$$= 2\pi i \left[\frac{\cancel{(z-\alpha)^2}\, z}{\cancel{(z-\alpha)^2}(z-\beta)^2}\right]' \Bigg|_{z=\alpha}$$

$$= 2\pi i \, \frac{(z-\beta)^2 - 2z(z-\beta)}{(z-\beta)^4}\Bigg|_{z=\alpha}$$

$$= -2\pi i \,\frac{\alpha+\beta}{(\alpha-\beta)^3} = -2\pi i \,\frac{(-4)}{(2\sqrt{3})^3} = \frac{8\pi i}{8\cdot 3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\pi i}{3\sqrt{3}}.$$

Το αρχικό ολοκλ. $= \dfrac{4}{i}\,\dfrac{\pi i}{3\sqrt{3}} = \boxed{\dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}}.$

Θ.5 (i) Από Θ. Laurent,

$\exists ! (a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ ώστε

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k, \quad 0<|z-z_0|<r.} \quad (3)$$

Επιπλέον, λόγω της υπόθεσης, $\exists M>0 /$

$$\boxed{|f(z)| \leq M, \quad 0<|z-z_0|<r.} \quad (4)$$

Έστω $0<\delta<r$ και

$$\gamma_\delta(t) = z_0 + \delta e^{it}, \quad t\in[0,2\pi].$$

Τότε, $\forall k\in\mathbb{Z}$,

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz.$$

Αλλά, $\forall z\in\gamma_\delta^*$, $\forall k\in\mathbb{Z}$,

$$\left|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\right| \overset{(4)}{\leq} \frac{M}{\delta^{k+1}}$$

$$\Rightarrow |a_k| \overset{[ML-\text{ανισ.}]}{\leq} \frac{1}{2\pi}\, 2\pi\delta \frac{M}{\delta^{k+1}}$$

$$\Rightarrow \quad |a_k| \leq \frac{M}{\delta^k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Η τελευταία όμως ισχύει $\forall \delta \in (0,r)$, οπότε για $k<0$, έχουμε

$$|a_k| \leq M\delta^{-k} \xrightarrow{\delta \downarrow 0^+} 0$$

$$\Rightarrow \quad a_k = 0, \quad \forall k<0$$

$\overset{(3)}{\Rightarrow}$ το ζητούμενο.

(ii) Θέτουμε $g = 1/f$. Η g είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ αφού $f(z) \neq 0, \forall z \neq 0$ κ' $g(1) = 1$.

Επιπλέον, $|g(z)| \leq |z|, \forall z \neq 0$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{g(z)}{z}\right| \leq 1, \quad \forall z \neq 0.$$

Επομένως, η $h(z) = g(z)/z$ είναι ολόμορφη κ' φραγμένη στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

(i)
$\Rightarrow$ το 0 είναι αιρόμενο ανώμαλο σημείο

$\Rightarrow$ η h επεκτείνεται σε μια ολόμορφη συνάρτηση $\tilde{h} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Προφανώς $|\tilde{h}(z)| \leq 1, \ \forall z \in \mathbb{C}$

[Θ. Liouville]
$\Rightarrow$ $\tilde{h} = c =$ σταθερή

$\Rightarrow$ $g(z) = cz, \ \forall z \neq 0$

$\Rightarrow$ $f(z) = c/z, \ \forall z \neq 0$

[$f(1)=1$]
$\Rightarrow$ $f(z) = 1/z, \ \forall z \neq 0.$