<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u> (19/05/2021)

<u>Φυλλάδιο 4</u>

2 Έστω $f : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη όπου U ανοικτό κ'

$$U \supset \Delta = \{ z \in \mathbb{C} : \quad 1 \leq |z| \leq 3 \}.$$

Υποθέτουμε ότι

- $|f(z)| \leq 1$, για $|z| = 1$
- $|f(z)| \leq 9$, για $|z| = 3$

Να δ.ο. $|f(z)| \leq |z|^2$, $\forall\, z \in \Delta$.

<u>Απόδ:</u> Θέτουμε $g(z) = \dfrac{f(z)}{z^2}$, $z \in \Delta$.

Η g είναι ολόμορφη στο πεδίο

$$V=\{ z\in\mathbb{C} : 1<|z|<3 \} \subset \overline{V} = \Delta \subset U$$

κ' συνεχής στο $\overline{V}$ κ' V φραγμένο πεδίο.

Από Αρχή Μεγίστου ($2^{\underline{\eta}}$ εκδοχή) έχουμε

$$\max_{z\in\overline{V}} |g(z)| = \max_{z\in\partial V} |g(z)|$$

$$\Longrightarrow \max_{z\in\Delta} |g(z)| = \max\left\{ \max_{|z|=1} |g(z)| , \max_{|z|=3} |g(z)| \right\}.$$

• Για $|z|=1$, $|g(z)| = \left| \dfrac{f(z)}{z^2} \right| = |f(z)| \leq 1$

$$\Rightarrow \max_{|z|=1} |g| \leq 1$$

• Για $|z|=3$,

$$|g(z)| = \left| \frac{f(z)}{z^2} \right| = \frac{|f(z)|}{9} \leq 1$$

$$\Longrightarrow \quad \max_{|z|=3} |g| \leq 1$$

Τελικά, $\displaystyle \max_{z\in\Delta} |g(z)| \leq 1$

$$\Longrightarrow \quad \forall z\in\Delta, \quad |g(z)| \leq 1 \iff |f(z)| \leq |z|^2.$$

$\boxtimes$

③ Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο κ' $f: U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, μη σταθερή ώστε $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$, $\forall z \in U$. Να δ.ο.

$$\operatorname{Re} f(z) > 0, \quad \forall z \in U.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(z) = e^{f(z)}$, $z \in U$.

Η g είναι ολόμορφη στο U κ' $g(z) \neq 0$, $\forall z \in U$.

Υποθέτουμε με αντίθεση ότι $\operatorname{Re} f(z_0) = 0$, για κάποιο $z_0 \in U$.

Τότε, $|g(z_0)| = e^{\operatorname{Re} f(z_0)} = 1$ κ' $\forall z \in U$,

$$|g(z)| = e^{\operatorname{Re} f(z)} \geq e^0 = 1 = |g(z_0)|$$

$$\Longrightarrow \min_{z \in U} |g(z)| = |g(z_0)|$$ κ' g μη σταθερή

(Άτοπο!), λόγω Αρχής Ελαχίστου (1^{η} εισδοχή). $\boxtimes$

① **(ii)** $f(z) = e^{z^2}$

K = κλειστό κ' φραγμένο τρίγωνο με κορυφές

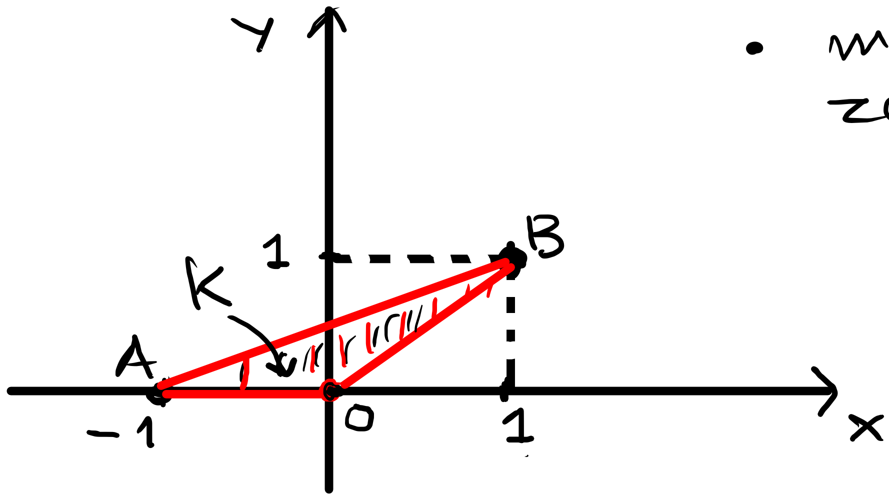
$0, \quad -1, \quad 1+i.$

Να βρείτε τα $\max\limits_{K} |f|$, $\min\limits_{K} |f|$.

Λύση: $|f(z)| = e^{\mathrm{Re}(z^2)}$, $\forall z \in K$.

Αρχή Μεγίστου - Ελαχ. $\Rightarrow$ $\max\limits_{K} |f| = \max\limits_{\partial K} |f|$

(όμοια και το min)



• $\max\limits_{z\in OA} e^{Re(z^2)} = \max\limits_{x\in[-1,0]} e^{x^2} = \underline{\underline{e}}$

• $\max\limits_{z\in OB} e^{Re(z^2)} = ?$

$OB = \{\underbrace{x+ix}_{z} \mid x\in[0,1]\}$

Για $z = x+ix$, $x\in[0,1]$, $z^2 = x^2(1+i)^2 = 2ix^2$

$\Rightarrow Re(z^2) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\max\limits_{z\in OB} e^{Re(z^2)} = 1}}$

$$\underline{AB} \doteq \{(1-t)\cdot(-1) + t\cdot(1+i) \mid t\in[0,1]\}$$

$$= \{-1+t+t+it \mid t\in[0,1]\}$$

$$= \{\underbrace{(2t-1)+it}_{z} \mid t\in[0,1]\}$$

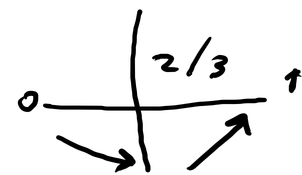
Για $z=(2t-1)+it$, $t\in[0,1]$, έχουμε

$$z^2=(2t-1)^2-t^2+2t(2t-1)i$$

$$\mathrm{Re}(z^2)=3t^2-4t+1,\quad t\in[0,1]$$

$$=\varphi(t)$$

$$\varphi'(t)=6t-4$$



$$\min\varphi=\varphi(2/3)=\dots$$

$$\varphi(t) = 3t^2 - 4t + 1 = 3t^2 - 2t - 2t + 1$$

$$= t(3t-2) - 2t + 1$$

$$\varphi(2/3) = -\frac{4}{3} + 1 = -1/3$$

$$\underline{\varphi(0) = 1}, \quad \underline{\varphi(1) = 0}$$

$$\Longrightarrow \underline{\max_{t \in [0,1]} \varphi(t) =} \ 1$$

$$\Longrightarrow \max_{z \in AB} e^{Re(z^2)} = e$$

Τελικά,

$$\max_{z \in K} |e^{z^2}| = e$$

Άσκηση (τέλος φυλλαδίου)

Έστω $f, g : \overline{U} \to \mathbb{C}$ συνεχείς, f, g ολόμορφες στο $U =$ φραγμένο πεδίο με $f|_{\partial U} = g|_{\partial U}$.

Τότε, $f|_{\overline{U}} = g|_{\overline{U}}$.

Απόδ.: $h = f - g \xRightarrow{\text{Αρχή Μεγίστου}}$

$$\max_{\overline{U}} |h| = \max_{\partial U} |h| = 0$$

$\Rightarrow h = 0$ στο $\overline{U}$ $\Rightarrow f = g$ στο $\overline{U}$.