Μιχάλης Παπαδημητράκης

Μιγαδική Ανάλυση

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Οι μιγαδικοί αριθμοί.

1.1 Οι μιγαδικοί αριθμοί.

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών θεωρείται γνωστό. Κάθε μιγαδικός z γράφεται

$$z = (x, y) = x + iy \qquad \text{με } \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Με τα γράμματα $x, y, u, v, \xi, \eta, a, b, \alpha, \beta$ θα συμβολίζουμε, συνήθως, πραγματικούς αριθμούς ενώ με τα z, w θα συμβολίζουμε, συνήθως, μιγαδικούς αριθμούς: $z = x + iy$, $w = u + iv$.

Στο $\mathbb{C}$ ορίζονται οι γνωστές πράξεις, η **πρόσθεση** και ο **πολλαπλασιασμός**, με τύπους

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Από εδώ προκύπτει η γνωστή ιδιότητα του αριθμού i :

$$i^2 = -1.$$

Με άλλα λόγια, ο i είναι λύση της αλγεβρικής εξίσωσης $z^2 + 1 = 0$. Γνωρίζουμε, φυσικά, ότι η εξίσωση αυτή δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{R}$.

Γνωρίζουμε ότι *δεν είναι δυνατό να ορίσουμε ανισοτικές σχέσεις στο* $\mathbb{C}$ με ιδιότητες παρόμοιες με τις ιδιότητες που έχουν οι γνωστές ανισοτικές σχέσεις στο $\mathbb{R}$. *Όταν γράφουμε $z < w$ ή $z \leq w$ θα εννοούμε ότι οι αριθμοί z, w είναι πραγματικοί και ότι οι σχέσεις $<$ και $\leq$ είναι οι γνωστές ανισοτικές σχέσεις στο* $\mathbb{R}$.

Ο **συζυγής** του $z = x + iy$ είναι ο

$$\overline{z} = x - iy.$$

Το **πραγματικό μέρος** και το **φανταστικό μέρος** του $z = x + iy$ είναι, αντιστοίχως, οι

$$\mathrm{Re}\, z = x, \qquad \mathrm{Im}\, z = y.$$

Τέλος, το **μέτρο** ή **απόλυτη τιμή** του $z = x + iy$ είναι ο αριθμός

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Καταγράφουμε μερικές χρήσιμες σχέσεις:

$$\overline{\overline{z}} = z, \qquad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}, \qquad \overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2},$$

$$\mathrm{Re}\, z = (z + \overline{z})/2, \qquad \mathrm{Im}\, z = (z - \overline{z})/(2i),$$

$$\mathrm{Re}\,(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}\, z_1 + \mathrm{Re}\, z_2, \qquad \mathrm{Im}\,(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}\, z_1 + \mathrm{Im}\, z_2,$$

$$|z| \geq 0, \qquad |z| = 0 \text{ αν και μόνο αν } z = 0,$$
$$|z|^2 = z\overline{z}, \qquad |\overline{z}| = |z|,$$
$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \qquad |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|,$$

Όλες αυτές οι σχέσεις αποδεικνύονται πολύ εύκολα με λίγες πράξεις. Γράφουμε μερικές ακόμη χρήσιμες και απλές σχέσεις:

$$|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|, \qquad |\mathrm{Im}\, z| \leq |z|, \qquad |z| \leq |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|,$$
$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2.$$

Η τελευταία ισότητα γενικεύει την γνωστή ισότητα $|x_1+x_2|^2 = |x_1|^2 + 2x_1x_2 + |x_2|^2$ που ισχύει για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Τέλος, έχουμε την **τριγωνική ανισότητα**:

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Τώρα, έστω οποιοσδήποτε μιγαδικός $z = x + iy \neq 0$. Θέτοντας

$$r = |z| > 0,$$

γνωρίζουμε ότι υπάρχει ακριβώς ένας

$$\theta_0 \in (-\pi, \pi]$$

ώστε να ισχύει

$$\cos\theta_0 = \tfrac{x}{r}, \qquad \sin\theta_0 = \tfrac{y}{r}.$$

Τότε το σύνολο των θ που ικανοποιούν τις

$$\cos\theta = \tfrac{x}{r}, \qquad \sin\theta = \tfrac{y}{r}$$

αποτελείται από τους αριθμούς

$$\theta = \theta_0 + k2\pi \qquad \text{με } k \in \mathbb{Z}$$

και μόνο από αυτούς. Ο θ_0 ονομάζεται **πρωτεύον όρισμα** του z και κάθε $\theta = \theta_0 + k2\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$ ονομάζεται **όρισμα** του z. Άρα *ο z έχει άπειρα ορίσματα, τους όρους μιας αριθμητικής προόδου (δυο κατευθύνσεων) με βήμα 2π. Από τα ορίσματα του z ακριβώς ένα είναι το πρωτεύον όρισμα, εκείνο που περιέχεται στο $(-\pi, \pi]$.* Συμβολίζουμε $\mathrm{Arg}\, z$ το πρωτεύον όρισμα θ_0 του z και $\arg z$ κάθε όρισμα του z:

$$\mathrm{Arg}\, z = \theta_0, \qquad \arg z = \theta_0 + k2\pi = \mathrm{Arg}\, z + k2\pi \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}.$$

Σύμφωνα με όσα είπαμε, αν $z \neq 0$ και $\theta \in \mathbb{R}$, τότε ο θ είναι τιμή του $\arg z$ αν και μόνο αν

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

όπου $r = |z| > 0$. Η γραφή $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ονομάζεται **πολική αναπαράσταση** του z. Επομένως, κάθε $z \neq 0$ έχει άπειρες πολικές αναπαραστάσεις.

Στον $z = 0$ δεν αντιστοιχίζουμε κανένα όρισμα. Επίσης, ο $z = 0$ δεν έχει πολική αναπαράσταση.

Παράδειγμα 1.1.1. Κάθε $z = x > 0$ έχει πρωτεύον όρισμα $\text{Arg}\, z = 0$ και ορίσματα $\arg z = k2\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.
Κάθε $z = x < 0$ έχει πρωτεύον όρισμα $\text{Arg}\, z = \pi$ και ορίσματα $\arg z = \pi + k2\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.
Κάθε $z = iy$ με $y > 0$ έχει πρωτεύον όρισμα $\text{Arg}\, z = \frac{\pi}{2}$ και ορίσματα $\arg z = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.
Κάθε $z = iy$ με $y < 0$ έχει πρωτεύον όρισμα $\text{Arg}\, z = -\frac{\pi}{2}$ και ορίσματα $\arg z = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.
Αν ο $z = x + iy$ είναι στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου (δηλαδή, αν $x, y > 0$), τότε έχει πρωτεύον όρισμα $\text{Arg}\, z$ στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$.
Αν ο $z = x + iy$ είναι στο δεύτερο τεταρτημόριο του επιπέδου (δηλαδή, αν $x < 0$, $y > 0$), τότε έχει πρωτεύον όρισμα $\text{Arg}\, z$ στο διάστημα $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.
Αν ο $z = x + iy$ είναι στο τρίτο τεταρτημόριο του επιπέδου (δηλαδή, αν $x < 0$, $y < 0$), τότε έχει πρωτεύον όρισμα $\text{Arg}\, z$ στο διάστημα $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$.
Αν ο $z = x + iy$ είναι στο τέταρτο τεταρτημόριο του επιπέδου (δηλαδή, αν $x > 0$, $y < 0$), τότε έχει πρωτεύον όρισμα $\text{Arg}\, z$ στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, 0)$.

Από τους γνωστούς τύπους των τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος γωνιών βρίσκουμε με λίγες πράξεις ότι

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Με αυτήν την ισότητα και με την αρχή της επαγωγής αποδεικνύεται ο γνωστός **τύπος του de Moivre**:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Τέλος, γνωρίζουμε ότι για κάθε $z_1, z_2 \neq 0$ ισχύει

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \tag{1.1}$$

με την εξής έννοια: για κάθε τιμή θ_1 του $\arg z_1$ και κάθε τιμή θ_2 του $\arg z_2$, ο $\theta = \theta_1 + \theta_2$ είναι τιμή του $\arg(z_1 z_2)$ και, αντιστρόφως, για κάθε τιμή θ του $\arg(z_1 z_2)$ υπάρχει τιμή θ_1 του $\arg z_1$ και τιμή θ_2 του $\arg z_2$ ώστε $\theta = \theta_1 + \theta_2$.

Όμως, *δεν είναι σωστό* ότι η ισότητα (1.1) με τις πρωτεύουσες τιμές των ορισμάτων, δηλαδή η $\text{Arg}\,(z_1 z_2) = \text{Arg}\, z_1 + \text{Arg}\, z_2$, ισχύει για κάθε $z_1, z_2 \neq 0$.

Ασκήσεις.

1.1.1. Αποδείξτε ότι $\text{Re}\,(iz) = -\text{Im}\, z$, $\text{Im}\,(iz) = \text{Re}\, z$, $\text{Re}\,(z - \overline{z}) = 0$, $\text{Im}\,(z + \overline{z}) = 0$.

1.1.2. Αποδείξτε ότι ο z είναι πραγματικός αν και μόνο αν $z = \overline{z}$.

1.1.3. Ποιές είναι οι λύσεις της $|z| = z$; της $|z| = iz$;

1.1.4. Έστω $z_1, z_2 \neq 0$. Αποδείξτε ότι $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ αν και μόνο αν υπάρχει $t > 0$ ώστε $z_2 = tz_1$.

1.1.5. Λύστε την εξίσωση $z^2 + z + 1 = 0$, ανάγοντάς την σε δυο εξισώσεις με δυο πραγματικούς αγνώστους.

1.1.6. Αποδείξτε ότι $|\text{Re}\, z| + |\text{Im}\, z| \leq \sqrt{2}|z|$.

1.1.7. Αν $|z_3| \neq |z_4|$, αποδείξτε ότι $\left|\frac{z_1+z_2}{z_3+z_4}\right| \leq \frac{|z_1|+|z_2|}{||z_3|-|z_4||}$.

1.1.8. Αν $|z| < 1$, αποδείξτε ότι $|\text{Im}\,(1 - \overline{z} + z^2)| < 3$.

1.1.9. Ποιά είναι η μέγιστη και ποιά η ελάχιστη τιμή του $|z^4 - 4z^2 + 3|$ όταν $|z| = 2$; όταν $|z| \leq 2$;

1.1.10. Αποδείξτε ότι $|z \pm w|^2 \leq (1 + |z|^2)(1 + |w|^2)$.

1.1.11. [α] Αποδείξτε ότι $|z - w| = |1 - \overline{w}z|$ αν και μόνο αν $|z| = 1$ ή $|w| = 1$.
[β] Αποδείξτε ότι $|z - w| < |1 - \overline{w}z|$ αν και μόνο αν $|z|, |w| < 1$ ή $|z|, |w| > 1$.

1.1.12. [α] Αποδείξτε ότι $|z - w| = |z - \overline{w}|$ αν και μόνο αν $\mathrm{Im}\, z = 0$ ή $\mathrm{Im}\, w = 0$.
[β] Αποδείξτε ότι $|z - w| < |z - \overline{w}|$ αν και μόνο αν $\mathrm{Im}\, z, \mathrm{Im}\, w < 0$ ή $\mathrm{Im}\, z, \mathrm{Im}\, w > 0$.

1.1.13. Ποιός είναι ο περιορισμός για τον w ώστε η εξίσωση $z + \overline{z} = w$ να έχει λύση; Ίδια ερώτηση για την εξίσωση $z - \overline{z} = w$.

1.1.14. Ποιά είναι τα ορίσματα και το πρωτεύον όρισμα καθενός από τους $\pm(\sqrt{3} \pm i)$, $\pm(1 \pm \sqrt{3}i)$;

1.1.15. Ποιοί είναι γεωμετρικά οι z ώστε ο $\frac{\pi}{4}$ ή ο $-\frac{\pi}{4}$ να είναι τιμή του $\arg z$;

1.1.16. Ποιοί είναι γεωμετρικά οι z ώστε ο π να είναι τιμή του $\arg(z^2)$; του $\arg(z^3)$; του $\arg(z^4)$;

1.1.17. Βρείτε ένα διάστημα J του $\mathbb{R}$ τα στοιχεία του οποίου είναι τιμές του $\arg z$ για κάθε z με την ιδιότητα $\mathrm{Re}\, z > 0$. Πόσα τέτοια J υπάρχουν και ποιά είναι αυτά; Κάντε το ίδιο για τις $\mathrm{Im}\, z < 0$, $\mathrm{Im}\, z > 0$, $\mathrm{Re}\, z < 0$ αντί της $\mathrm{Re}\, z > 0$.

1.1.18. Αποδείξτε ότι:
[α] $\mathrm{Arg}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2$ αν $-\pi < \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 \leq \pi$.
[β] $\mathrm{Arg}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 + 2\pi$ αν $-2\pi < \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 \leq -\pi$.
[γ] $\mathrm{Arg}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 - 2\pi$ αν $\pi < \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 \leq 2\pi$.

1.1.19. Έστω $z_1, z_2 \neq 0$. Αποδείξτε ότι $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$ και εξηγήστε.

1.1.20. Με τον τύπο του de Moivre αποδείξτε ότι $\cos(3\theta) = 4(\cos\theta)^3 - 3\cos\theta$ και $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4(\sin\theta)^3$.

1.1.21. Με την ισότητα $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \begin{cases} \frac{z^{n+1}-1}{z-1}, & \text{αν } z \neq 1 \\ n+1, & \text{αν } z = 1 \end{cases}$ βρείτε τύπους για τα αθροίσματα $1 + r\cos\theta + r^2\cos(2\theta) + \cdots + r^n\cos(n\theta)$ και $r\sin\theta + r^2\sin(2\theta) + \cdots + r^n\sin(n\theta)$ με $r \geq 0$.

1.1.22. Υπάρχει μια ευθεία l ώστε, για κάθε z, τα σημεία z, $\overline{z}$ να είναι συμμετρικά ως προς την l. Ποιά είναι η l; Ίδια ερώτηση για τα z, $-\overline{z}$, για τα z, $i\overline{z}$ και για τα z, $-i\overline{z}$.

1.1.23. Περιγράψτε τα σύνολα $\{z : |z| < 1, |z - i| < 1\}$, $\{z : |z| < 1, \mathrm{Im}\, z > 0, |z - i| > 1\}$.

1.1.24. Για καθεμιά από τις παρακάτω σχέσεις περιγράψτε το σύνολο των z που την ικανοποιούν: $z + \overline{z} = 1$, $i(z - \overline{z}) \leq 2$, $2i(\overline{z} - z) + |z|^2 + 1 \leq 0$, $(2 - i)z + (2 + i)\overline{z} = -2$, $|z^2 - 1| = 1$, $|z| + \mathrm{Re}\, z \leq 1$.

1.1.25. Αν $z, w \neq 0$, αποδείξτε ότι τα διανύσματα z, w είναι κάθετα αν και μόνο αν $\mathrm{Re}\,(\overline{w}z) = 0$.

1.1.26. [α] Γνωρίζουμε ότι η οποιαδήποτε ευθεία στο επίπεδο έχει εξίσωση $ax + by = c$, όπου οι a, b δεν είναι και οι δυο ίσοι με 0. Εξηγήστε γιατί η εξίσωση της οποιασδήποτε ευθείας στο επίπεδο μπορεί να γραφτεί στη μορφή $\mathrm{Re}\,(\overline{w}z) = c$, όπου ο (μιγαδικός) w δεν είναι ίσος με 0 (και ο c είναι πραγματικός).
[β] Αν $w \neq 0$, σε ποιό από τα ημιεπίπεδα που περιγράφονται από τις $\mathrm{Re}\,(\overline{w}z) \leq 0$ και $\mathrm{Re}\,(\overline{w}z) \geq 0$ ανήκει ο w και σε ποιό ο $-w$;
[γ] Αν $w \neq 0$, αποδείξτε ότι το διάνυσμα w είναι κάθετο στην ευθεία με εξίσωση $\mathrm{Re}\,(\overline{w}z) = c$. Πώς μεταβάλλεται αυτή η ευθεία όταν ο c αυξάνεται στο $(-\infty, +\infty)$;
[δ] Αν $w \neq 0$ και $c_1 \leq c_2$, περιγράψτε το σύνολο των z για τους οποίους ισχύει $c_1 \leq \mathrm{Re}\,(\overline{w}z) \leq c_2$.

[ε] Αν $w, w' \neq 0$, αποδείξτε ότι οι $\mathrm{Re}\,(\overline{w}z) = c$, $\mathrm{Re}\,(\overline{w'}z) = c'$ είναι εξισώσεις της ίδιας ευθείας αν και μόνο αν υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ ώστε $w' = tw$, $c' = tc$.

[στ] Αν $w, w' \neq 0$, αποδείξτε ότι οι $\mathrm{Re}\,(\overline{w}z) = c$, $\mathrm{Re}\,(\overline{w'}z) = c'$ είναι εξισώσεις παράλληλων ευθειών αν και μόνο αν υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ ώστε $w' = tw$.

[ζ] Αν $w, w' \neq 0$, θεωρήστε την ευθεία με εξίσωση $\mathrm{Re}\,(\overline{w}z) = c$ και το ημιεπίπεδο που περιγράφεται από την $\mathrm{Re}\,(\overline{w'}z) \geq c'$. Ποιά είναι η (ικανή και αναγκαία) συνθήκη ώστε η ευθεία να είναι υποσύνολο του ημιεπιπέδου;

1.1.27. Για κάθε $\alpha > 0$, περιγράψτε το σύνολο των z με την ιδιότητα $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = \alpha$. Πώς μεταβάλλεται αυτό το σύνολο όταν ο α αυξάνεται στο $(0, +\infty)$;

1.1.28. Για κάθε α, περιγράψτε το σύνολο των z με την ιδιότητα $\mathrm{Re}\,(z^2) = \alpha$. Πώς μεταβάλλεται αυτό το σύνολο όταν ο α αυξάνεται στο $(-\infty, +\infty)$; Ίδια ερώτηση για τη σχέση $\mathrm{Im}\,(z^2) = \alpha$.

1.1.29. [α] Αποδείξτε ότι τρία διαφορετικά σημεία z_1, z_2, z_3 ανήκουν στην ίδια ευθεία αν και μόνο αν ο $\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$ είναι πραγματικός.

[β] Αποδείξτε ότι τέσσερα διαφορετικά σημεία z_1, z_2, z_3, z_4 ανήκουν στην ίδια ευθεία ή στον ίδιο κύκλο αν και μόνο αν ο $\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}\frac{z_4-z_3}{z_4-z_2}$ είναι πραγματικός.

1.1.30. Έστω $w = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Βρείτε ένα διάστημα J του $\mathbb{R}$ τα στοιχεία του οποίου είναι τιμές του $\arg z$ για κάθε z στην ευθεία με εξίσωση $\mathrm{Re}\,(\overline{w}z) = 3$. Πόσα τέτοια J υπάρχουν και ποιά είναι αυτά; Κάντε το ίδιο για την $\mathrm{Re}\,(\overline{w}z) = -3$ αντί της $\mathrm{Re}\,(\overline{w}z) = 3$. Μπορεί να γίνει το ίδιο για την $\mathrm{Re}\,(\overline{w}z) = -3$;

1.1.31. Βρείτε ένα διάστημα J του $\mathbb{R}$ τα στοιχεία του οποίου είναι τιμές του $\arg z$ για κάθε z στον κύκλο με εξίσωση $|z-1| = \frac{1}{2}$. Πόσα τέτοια J υπάρχουν και ποια είναι αυτά; Κάντε το ίδιο για τους κύκλους με εξισώσεις $|z-i| = \frac{1}{2}$, $|z+i| = \frac{1}{2}$, $|z+1| = \frac{1}{2}$.

1.1.32. Αν ισχύει $\mathrm{Re}\,(z^n) \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι ο z είναι μη-αρνητικός πραγματικός.

1.2 Το $\widehat{\mathbb{C}}$, η στερεογραφική προβολή και η σφαίρα του Riemann.

Στο σύνολο $\mathbb{C}$ επισυνάπτουμε ένα ακόμη στοιχείο, όχι μιγαδικό αριθμό, το ∞, το οποίο ονομάζεται **άπειρο**, και σχηματίζουμε το σύνολο

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Το $\widehat{\mathbb{C}}$ ονομάζεται **επεκτεταμένο** $\mathbb{C}$.

Μπορούμε να πούμε ότι το ∞ συμβολίζει το νοητό σημείο προς το οποίο κινείται ένα μεταβλητό σημείο z επί του μιγαδικού επιπέδου που απομακρύνεται απεριόριστα από οποιοδήποτε σταθερό σημείο (το 0, για παράδειγμα) του επιπέδου. *Προσέξτε τη διαφορά με τα $\pm\infty$ που επισυνάπτουμε στο $\mathbb{R}$.* Ένα μεταβλητό σημείο x επί της πραγματικής ευθείας απομακρύνεται απεριόριστα από τον 0 προς ακριβώς δυο συγκεκριμένες κατευθύνσεις: είτε προς τα δεξιά, οπότε λέμε ότι κινείται *προς το* $+\infty$, είτε προς τα αριστερά, οπότε λέμε ότι κινείται *προς το* $-\infty$. Όμως, στο επίπεδο δεν υπάρχουν δυο συγκεκριμένες κατευθύνσεις. Ένα σημείο μπορεί να απομακρύνεται είτε πάνω σε ημιευθείες (δηλαδή, προς άπειρες κατευθύνσεις) είτε κάνοντας οποιαδήποτε "σπειροειδή κίνηση" είτε με οποιονδήποτε άλλο αυθαίρετο τρόπο. Γι αυτό, απλώς, λέμε ότι το σημείο κινείται *προς το άπειρο*.

Κατόπιν, ορίζουμε επιπλέον πράξεις στο $\widehat{\mathbb{C}}$ ως εξής:

1. Άθροισμα: $z + \infty = \infty$ και $\infty + z = \infty$.

2. Αντίθετο στοιχείο: $-\infty = \infty$.

3. Διαφορά: $z - \infty = \infty$ και $\infty - z = \infty$.

4. Γινόμενο: $z \cdot \infty = \infty$ και $\infty \cdot z = \infty$ αν $z \neq 0$. Επίσης, $\infty \cdot \infty = \infty$.

5. Αντίστροφο: $\frac{1}{\infty} = 0$ και $\frac{1}{0} = \infty$.

6. Λόγος: $\frac{z}{\infty} = 0$ και $\frac{\infty}{z} = \infty$.

7. Συζυγές: $\overline{\infty} = \infty$.

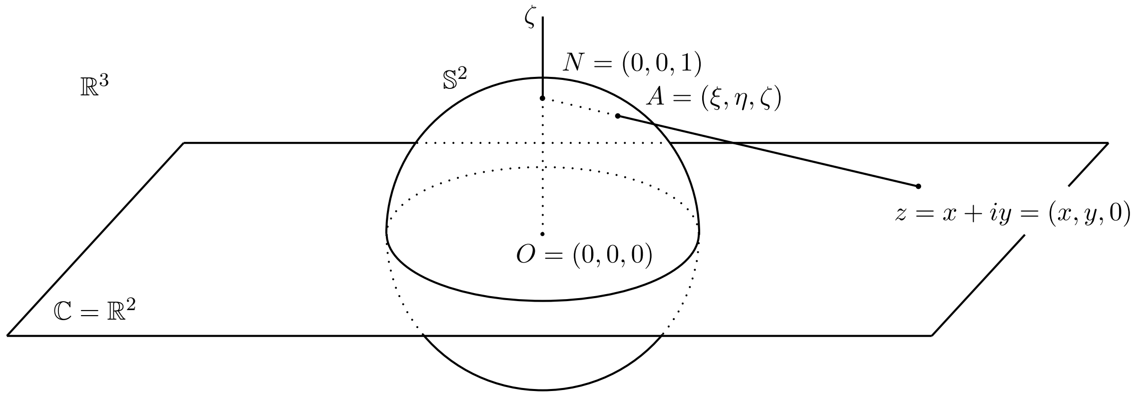
8. Μέτρο: $|\infty| = +\infty$.

Δεν ορίζονται αποτελέσματα για τις παραστάσεις

$$\infty + \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}$$

και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές**.

Προσέξτε ιδιαιτέρως την περίπτωση του $\frac{1}{0} = \infty$. Στο $\mathbb{R}$ η παράσταση $\frac{1}{0}$ είναι απροσδιόριστη μορφή, διότι όταν ο πραγματικός αριθμός x είναι μικρός και > 0 τότε ο $\frac{1}{x}$ είναι μεγάλος και > 0, οπότε ο $\frac{1}{x}$ κινείται προς το $+\infty$, και όταν ο πραγματικός αριθμός x είναι μικρός και < 0 τότε ο $\frac{1}{x}$ είναι μεγάλος και < 0, οπότε ο $\frac{1}{x}$ κινείται προς το $-\infty$. Όμως, στο $\mathbb{C}$ το πρόσημο δεν παίζει τον ίδιο ρόλο που παίζει στο $\mathbb{R}$. Στο $\mathbb{C}$ μόνο το μέτρο του αριθμού $\frac{1}{z}$ παίζει ρόλο και βλέπουμε ότι όταν ο z είναι πολύ μικρός, δηλαδή όταν το $|z|$ είναι πολύ μικρό (και αναγκαστικά > 0), τότε ο $\frac{1}{z}$ είναι πολύ μεγάλος, δηλαδή το $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ είναι πολύ μεγάλο και θετικό, και, επομένως, ο $\frac{1}{z}$ πλησιάζει το ∞. Γι αυτό ορίζουμε $\frac{1}{0} = \infty$.



Σχήμα 1

Θεωρούμε τον τριδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$ και μέσα σ' αυτόν το διδιάστατο επίπεδο $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ (δείτε το Σχήμα 1). Συμβολίζουμε $A = (\xi, \eta, \zeta)$ τα σημεία του $\mathbb{R}^3$ και $z = x + iy = (x, y) = (x, y, 0)$ τα σημεία του $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Σιωπηρά, ταυτίζουμε τον ξ-άξονα με τον x-άξονα και τον η-άξονα με τον y-άξονα, ενώ ο ζ-άξονας είναι κατακόρυφος και κάθετος στο $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Θεωρούμε, επίσης την μοναδιαία σφαίρα

$$\mathbb{S}^2 = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\}$$

του $\mathbb{R}^3$. Ένα χαρακτηριστικό σημείο της σφαίρας $\mathbb{S}^2$ είναι ο "βόρειος πόλος"

$$N = (0, 0, 1).$$

Παίρνουμε οποιοδήποτε σημείο $z = x + iy$ του $\mathbb{C}$ και θεωρούμε την ευθεία Nz που περιέχει το N και το z. Η ευθεία αυτή τέμνει την $\mathbb{S}^2$ στο σημείο N. Αυτό είναι προφανές. Τώρα θα δούμε ότι υπάρχει και δεύτερο σημείο τομής $A = (\xi, \eta, \zeta)$ της ευθείας Nz με την $\mathbb{S}^2$. Το ότι το $A = (\xi, \eta, \zeta)$ βρίσκεται στην εν λόγω ευθεία εκφράζεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\overrightarrow{AN} = t \cdot \overrightarrow{zN} \qquad \text{με } \ t \in \mathbb{R}.$$

Γράφοντας αυτήν την ισότητα σε συντεταγμένες, έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} \xi - 0 &= t(x - 0) \\ \eta - 0 &= t(y - 0) \\ \zeta - 1 &= t(0 - 1) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Το ότι το $A = (\xi, \eta, \zeta)$ βρίσκεται στην σφαίρα $\mathbb{S}^2$ εκφράζεται σε συντεταγμένες, ισοδύναμα:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1. \tag{1.3}$$

Το ότι το $A = (\xi, \eta, \zeta)$ είναι σημείο τομής της ευθείας Nz και της σφαίρας $\mathbb{S}^2$ ισοδυναμεί με το ότι η τετράδα (ξ, η, ζ, t) είναι λύση του συστήματος των τεσσάρων εξισώσεων (1.2) και (1.3). Τώρα, από τις (1.2) συνεπάγεται

$$\xi = tx, \quad \eta = ty, \quad \zeta = 1 - t \tag{1.4}$$

και με αυτές τις ισότητες η (1.3) δίνει

$$t^2(x^2 + y^2 + 1) = 2t.$$

Συνεπάγεται

$$t = 0 \quad \text{ή} \quad t = \tfrac{2}{x^2+y^2+1}.$$

Με $t = 0$ οι (1.4) δίνουν το σημείο

$$A = N = (0, 0, 1)$$

και με $t = \frac{2}{x^2+y^2+1}$ οι (1.4) δίνουν το σημείο

$$A = \left(\tfrac{2x}{x^2+y^2+1}, \tfrac{2y}{x^2+y^2+1}, \tfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right). \tag{1.5}$$

Ελέγχουμε ότι, πράγματι, οι δυο τετράδες είναι λύσεις του συστήματος των (1.2) και (1.3) και συμπεραίνουμε ότι το σημείο A, που δίνεται από την (1.5), είναι το δεύτερο σημείο τομής, εκτός του N, της ευθείας Nz με την $\mathbb{S}^2$.

Έτσι έχουμε την απεικόνιση

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy \quad \longmapsto \quad A = (\xi, \eta, \zeta) = \left(\tfrac{2x}{x^2+y^2+1}, \tfrac{2y}{x^2+y^2+1}, \tfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$$

από το $\mathbb{C}$ στο $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$.

Μπορεί κανείς να ελέγξει εύκολα ότι η απεικόνιση αυτή είναι ένα-προς-ένα και ότι είναι επί του $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ και ότι η αντίστροφη απεικόνιση είναι η

$$\mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \ni A = (\xi, \eta, \zeta) \quad \longmapsto \quad z = x + iy = \tfrac{\xi}{1-\zeta} + i\tfrac{\eta}{1-\zeta} \in \mathbb{C}.$$

Η πρώτη απεικόνιση είναι η **στερεογραφική προβολή από το $\mathbb{C}$ στο** $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ και η δεύτερη απεικόνιση, η αντίστροφη της πρώτης, είναι η **στερεογραφική προβολή από το** $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ **στο** $\mathbb{C}$. Όταν λέμε **στερεογραφική προβολή** εννοούμε οποιαδήποτε από τις δυο αυτές απεικονίσεις και γράφουμε

$$\mathbb{C} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}.$$

Παράδειγμα 1.2.1. Το σημείο $z = 0$ απεικονίζεται μέσω της στερεογραφικής προβολής στον νότιο πόλο $S = (0, 0, -1)$ της $\mathbb{S}^2$ και αντιστρόφως.

Τα σημεία $z = x + iy$ εκτός του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή εκείνα με $|z| > 1$, απεικονίζονται μέσω της στερεογραφικής προβολής στα σημεία $A = (\xi, \eta, \zeta)$ του βόρειου ημισφαιρίου της $\mathbb{S}^2$, δηλαδή σε εκείνα με $0 < \zeta < 1$, και αντιστρόφως. (Παραλείπουμε το $\zeta = 1$ διότι αντιστοιχεί στον βόρειο πόλο N.)

Τα σημεία $z = x + iy$ εντός του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή εκείνα με $|z| < 1$, απεικονίζονται μέσω της στερεογραφικής προβολής στα σημεία $A = (\xi, \eta, \zeta)$ του νότιου ημισφαιρίου της $\mathbb{S}^2$, δηλαδή σε εκείνα με $-1 \leq \zeta < 0$, και αντιστρόφως.

Τέλος, τα σημεία $z = x+iy$ επί του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή εκείνα με $|z| = 1$, απεικονίζονται μέσω της στερεογραφικής προβολής στα σημεία $A = (\xi, \eta, \zeta)$ του ισημερινού της $\mathbb{S}^2$, δηλαδή σε εκείνα με $\zeta = 0$, και αντιστρόφως. Μάλιστα, σ' αυτήν την περίπτωση τα δυο σημεία z και A ταυτίζονται.

Τέλος, θα πούμε μερικά πράγματα για την *συνέχεια* της στερεογραφικής προβολής.

Κατ' αρχάς πρέπει να πούμε ότι στον Ευκλείδειους χώρους $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ (αλλά και σε μεγαλύτερης διάστασης χώρους) ισχύει ότι:

Ένα σημείο συκλίνει σε ένα άλλο σημείο αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του πρώτου σημείου συγκλίνουν στις αντίστοιχες συντεταγμένες του δεύτερου σημείου.

Πράγματι, στην περίπτωση του $\mathbb{R}^2$ αυτό αποδεικνύεται μέσω των ανισοτήτων:

$$0 \leq |x - x_0|, |y - y_0| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq |x - x_0| + |y - y_0|. \tag{1.6}$$

Αν το σημείο (x, y) συγκλίνει στο (x_0, y_0), η απόσταση $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ τείνει στο 0 και από τις αριστερές ανισότητες (1.6) συνεπάγεται ότι οι $|x-x_0|$, $|y-y_0|$ τείνουν στο 0 και, επομένως, ο x συγκλίνει στον x_0 και ο y συγκλίνει στον y_0. Αντιστρόφως, αν ο x συγκλίνει στον x_0 και ο y συγκλίνει στον y_0, τότε οι $|x - x_0|$, $|y - y_0|$ τείνουν στο 0, οπότε από την δεξιά ανισότητα (1.6) συνεπάγεται ότι η απόσταση $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ τείνει στο 0 και, επομένως, το σημείο (x, y) συγκλίνει στο (x_0, y_0).

Η απόδειξη είναι παρόμοια στην περίπτωση του χώρου $\mathbb{R}^3$.

Για τη στερεογραφική προβολή, αν το σημείο $z = x + iy$ συγκλίνει στο σημείο $z_0 = x_0 + iy_0$, τότε $x \to x_0$ και $y \to y_0$, οπότε, λόγω συνέχειας των ρητών συναρτήσεων δυο μεταβλητών,

$$\tfrac{2x}{x^2+y^2+1} \to \tfrac{2x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2+1}, \qquad \tfrac{2y}{x^2+y^2+1} \to \tfrac{2y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2+1}, \qquad \tfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \to \tfrac{{x_0}^2+{y_0}^2-1}{{x_0}^2+{y_0}^2+1}$$

και, επομένως, το σημείο $A = (\xi, \eta, \zeta)$ που αντιστοιχεί στο $z = x + iy$ συγκλίνει στο σημείο $A_0 = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ που αντιστοιχεί στο $z_0 = x_0 + iy_0$.

Αντιστρόφως, αν το σημείο $A = (\xi, \eta, \zeta)$ στο $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ συγκλίνει στο σημείο $A_0 = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ στο $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ (οπότε το A_0 δεν είναι ο βόρειος πόλος N και, επομένως, $\zeta_0 \neq 1$), τότε $\xi \to \xi_0$ και $\eta \to \eta_0$ και $\zeta \to \zeta_0$, οπότε και πάλι λόγω συνέχειας των ρητών συναρτήσεων δυο μεταβλητών,

$$\tfrac{\xi}{1-\zeta} \to \tfrac{\xi_0}{1-\zeta_0}, \qquad \tfrac{\eta}{1-\zeta} \to \tfrac{\eta_0}{1-\zeta_0},$$

οπότε το σημείο $z = x+iy$ που αντιστοιχεί στο $A = (\xi, \eta, \zeta)$ συγκλίνει στο σημείο $z_0 = x_0+iy_0$ που αντιστοιχεί στο $A = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$.

Ας δούμε τώρα τί ισχύει σε σχέση με τον βόρειο πόλο N. Παρατηρούμε ότι, αν το μέτρο του $z = x + iy$ (δηλαδή η απόστασή του από το 0) τείνει στο $+\infty$, δηλαδή $|z| \to +\infty$, τότε

$$\tfrac{2x}{x^2+y^2+1} \to 0, \qquad \tfrac{2y}{x^2+y^2+1} \to 0, \qquad \tfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} \to 1. \tag{1.7}$$

Πράγματι,

$$0 \leq \left|\tfrac{2x}{x^2+y^2+1}\right| = \tfrac{2|x|}{|z|^2+1} \leq \tfrac{2|z|}{|z|^2+1} \to 0, \qquad 0 \leq \left|\tfrac{2y}{x^2+y^2+1}\right| = \tfrac{2|y|}{|z|^2+1} \leq \tfrac{2|z|}{|z|^2+1} \to 0,$$

$$0 \le \left|\tfrac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1} - 1\right| = \tfrac{2}{x^2+y^2+1} = \tfrac{2}{|z|^2+1} \to 0$$

όταν $|z| \to +\infty$.
Από τις (1.7) βλέπουμε ότι το σημείο $A = (\xi, \eta, \zeta)$ που αντιστοιχεί στο $z = x + iy$ συγκλίνει στον βόρειο πόλο $N = (0, 0, 1)$.
Αντιστρόφως, αν το σημείο $A = (\xi, \eta, \zeta)$ στο $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ συγκλίνει στον βόρειο πόλο $N = (0, 0, 1)$, δηλαδή αν $\xi \to 0$ και $\eta \to 0$ και $\zeta \to 1$, τότε

$$x^2 + y^2 = \tfrac{\xi^2}{(1-\zeta)^2} + \tfrac{\eta^2}{(1-\zeta)^2} = \tfrac{\xi^2+\eta^2}{(1-\zeta)^2} = \tfrac{1-\zeta^2}{(1-\zeta)^2} = \tfrac{1+\zeta}{1-\zeta} \to +\infty$$

και, επομένως, το σημείο $z = x + iy$ που αντιστοιχεί στο $A = (\xi, \eta, \zeta)$ έχει την ιδιότητα το μέτρο του να τείνει στο $+\infty$.

Βάσει των προηγουμένων δίνουμε τον εξής ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι*

$$z \to \infty$$

αν $|z| \to +\infty$.

Βάσει αυτού ακριβώς του ορισμού και της προηγηθείσας συζήτησης, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι
Το σημείο z τείνει στο ∞ αν και μόνο αν το αντίστοιχο σημείο $A = (\xi, \eta, \zeta)$ τείνει στον βόρειο πόλο $N = (0, 0, 1)$.

Μετά από όλα τα προηγούμενα, είναι πια "φυσιολογικό" να επεκτείνουμε την στερεογραφική προβολή ώστε να συμπεριλάβουμε τα εξής δυο σημεία: το σημείο ∞ που λείπει από το $\mathbb{C}$ ώστε να συμπληρωθεί το $\widehat{\mathbb{C}}$ και το σημείο N που λείπει από το $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ ώστε να συμπληρωθεί η σφαίρα $\mathbb{S}^2$. Η επέκταση γίνεται ορίζοντας πολύ απλά ότι τα σημεία ∞ του $\widehat{\mathbb{C}}$ και N της $\mathbb{S}^2$ αντιστοιχούν το ένα στο άλλο. Άρα η αρχική στερεογραφική προβολή

$$\mathbb{C} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$$

επεκτείνεται ως στερεογραφική προβολή

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} \quad \longleftrightarrow \quad \big(\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}\big) \cup \{N\}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\widehat{\mathbb{C}} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbb{S}^2.$$

Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι *η στερεογραφική προβολή είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση ανάμεσα στο επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο $\widehat{\mathbb{C}}$ και στην μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^2$ του τριδιάστατου χώρου και ότι είναι συνεχής με την εξής, φυσικά, έννοια: δυο σημεία του $\widehat{\mathbb{C}}$ συγκλίνουν το ένα στο άλλο αν και μόνο αν τα αντίστοιχα σημεία της $\mathbb{S}^2$ συγκλίνουν το ένα στο άλλο.*

Όταν σκεφτόμαστε την σφαίρα $\mathbb{S}^2$ σε τόσο άμεση συνάφεια με το μιγαδικό επίπεδο, τότε την ονομάζουμε **σφαίρα του Riemann**.

Ασκήσεις.

1.2.1. [α] Γνωρίζουμε ότι το οποιοδήποτε επίπεδο στον χώρο $\mathbb{R}^3$ έχει εξίσωση $k\xi + l\eta + m\zeta = n$, όπου οι (πραγματικοί) συντελεστές k, l, m δεν είναι και οι τρεις ίσοι με 0. Ποιά είναι η (ικανή και αναγκαία) συνθήκη για τους k, l, m, n ώστε το επίπεδο να μην τέμνει την σφαίρα $\mathbb{S}^2$; να εφάπτεται της $\mathbb{S}^2$; να τέμνει την $\mathbb{S}^2$ σε περισσότερα από ένα σημεία; Στην τρίτη περίπτωση, αποδείξτε ότι η τομή του επιπέδου με την $\mathbb{S}^2$ είναι κύκλος και βρείτε (συναρτήσει των k, l, m, n) το κέντρο του κύκλου αυτού και την ακτίνα του και πεισθήτε ότι το κέντρο του κύκλου είναι πάνω στο επίπεδο και στο εσωτερικό της $\mathbb{S}^2$.
[β] Για κάθε ευθεία l στο $\mathbb{C}$ το $\widehat{l} = l \cup \{\infty\}$ χαρακτηρίζεται **ευθεία στο** $\widehat{\mathbb{C}}$. Οι **κύκλοι στο** $\widehat{\mathbb{C}}$ είναι,

απλώς, οι κύκλοι στο $\mathbb{C}$. Εξηγήστε γιατί είναι λογικό να επισυνάψουμε σε μια ευθεία του $\mathbb{C}$ το σημείο ∞ ενώ δεν είναι λογικό να κάνουμε κάτι τέτοιο σε έναν κύκλο. Οι κύκλοι και οι ευθείες στο $\widehat{\mathbb{C}}$ χαρακτηρίζονται, από κοινού, **γενικευμένοι κύκλοι στο** $\widehat{\mathbb{C}}$.

Παρατηρήστε ότι οι ευθείες στο $\widehat{\mathbb{C}}$ είναι ακριβώς εκείνοι οι γενικευμένοι κύκλοι στο $\widehat{\mathbb{C}}$ που περιέχουν το ∞.

Πόσα μπορεί να είναι τα κοινά σημεία δυο διαφορετικών γενικευμένων κύκλων στο $\widehat{\mathbb{C}}$; (Να διακρίνετε περιπτώσεις: δυο κύκλοι, ευθεία και κύκλος, δυο ευθείες.)

[γ] Αποδείξτε ότι κάθε ευθεία στο $\widehat{\mathbb{C}}$ απεικονίζεται μέσω στερεογραφικής προβολής σε κύκλο στην $\mathbb{S}^2$ που διέρχεται από τον βόρειο πόλο N και αντιστρόφως. Αποδείξτε ότι κάθε κύκλος στο $\widehat{\mathbb{C}}$ απεικονίζεται μέσω στερεογραφικής προβολής σε κύκλο στην $\mathbb{S}^2$ που δεν διέρχεται από τον βόρειο πόλο N και αντιστρόφως. Δηλαδή, συνολικά, οι γενικευμένοι κύκλοι στο $\widehat{\mathbb{C}}$ απεικονίζονται μέσω στερεογραφικής προβολής σε κύκλους στην $\mathbb{S}^2$.

1.2.2. Βρείτε τις εικόνες στην $\mathbb{S}^2$ μέσω στερεογραφικής προβολής των εξής υποσυνόλων του $\widehat{\mathbb{C}}$:

[α] $\{z \,|\, |z| < 1\}$, $\{z \,|\, |z| = 1\}$, $\{z \,|\, |z| > 1\} \cup \{\infty\}$.

[β] $\{z \,|\, \Re z > 0\}$, $\{z \,|\, \Re z = 0\}$, $\{z \,|\, \Re z < 0\}$, $\{z \,|\, \Im z > 0\}$, $\{z \,|\, \Im z = 0\}$, $\{z \,|\, \Im z < 0\}$.

[γ] Μια ευθεία η οποία διέρχεται από το 0.

[δ] Η οικογένεια των κύκλων με κέντρο το 0. Η οικογένεια των κύκλων με κέντρο ένα σταθερό σημείο $\neq 0$.

[ε] Η οικογένεια των ευθειών που είναι παράλληλες σε μια σταθερή ευθεία.

[στ] Η οικογένεια των ευθειών που διέρχονται από ένα σταθερό σημείο $\neq \infty$.

[ζ] Η οικογένεια των κύκλων που εφάπτονται ενός σταθερού κύκλου σε ένα σταθερό σημείο του.

[η] Η οικογένεια των κύκλων που διέρχονται από δυο σταθερά σημεία.

1.2.3. Θεωρήστε δυο σημεία z, w στο μιγαδικό επίπεδο και τις στερεογραφικές προβολές τους A, B στην $\mathbb{S}^2$.

[α] Αν τα z, w είναι συμμετρικά ως προς κάποια ευθεία l η οποία διέρχεται από το 0, ποιά είναι η σχετική θέση των A, B σε σχέση με την στερεογραφική προβολή της l στην $\mathbb{S}^2$;

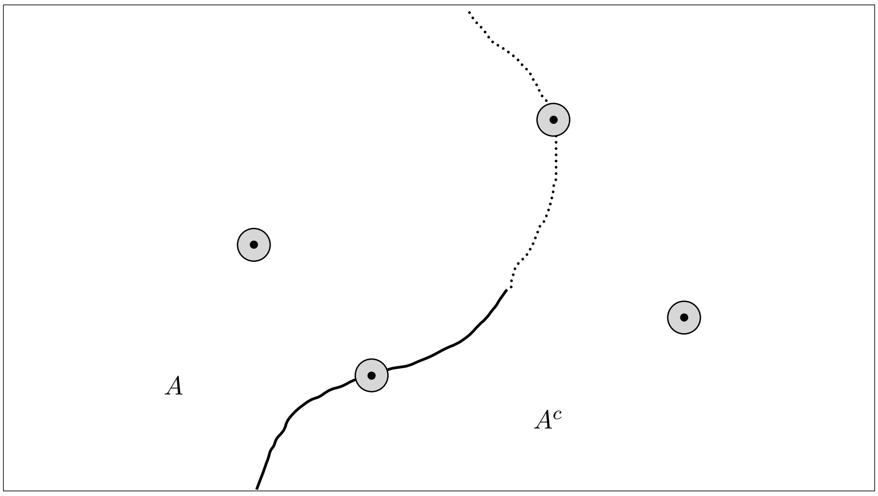
[β] Αν $w = \frac{1}{\bar{z}}$, ποιά είναι η σχετική θέση των A, B στην $\mathbb{S}^2$;

1.2.4. Αν οι ευθείες l, l' σχηματίζουν γωνία θ στο κοινό τους σημείο z, αποδείξτε ότι οι στερεογραφικές προβολές τους, δηλαδή δυο κύκλοι στην $\mathbb{S}^2$ με κοινά σημεία την στερεογραφική προβολή A του z και τον βόρειο πόλο N, σχηματίζουν την ίδια γωνία θ και στο A και στο N.

Κεφάλαιο 2

Η τοπολογία του $\mathbb{C}$.

2.1 Βασικές έννοιες.



Σχήμα 2

Υπενθυμίζουμε τα σύμβολα

$$D(z;r) = \{w \,|\, |w-z| < r\}, \quad C(z;r) = \{w \,|\, |w-z| = r\}, \quad \overline{D}(z;r) = \{w \,|\, |w-z| \le r\}$$

για τον **ανοικτό δίσκο**, για τον **κύκλο** και για τον **κλειστό δίσκο** με κέντρο z και ακτίνα $r > 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ο $D(z;r)$ θα ονομάζεται και r-**περιοχή** του z.*

Έστω σύνολο A. Με A^c συμβολίζουμε το συμπλήρωμα $\mathbb{C} \setminus A$ του A σε σχέση με το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ο z χαρακτηρίζεται **εσωτερικό σημείο** του A αν υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(z;r) \subseteq A$.*
*Ο z χαρακτηρίζεται **εξωτερικό σημείο** του A αν υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(z;r) \subseteq A^c$.*
*Ο z χαρακτηρίζεται **συνοριακό σημείο** του A αν για κάθε $r > 0$ ισχύει $D(z;r) \cap A \neq \emptyset$ και $D(z;r) \cap A^c \neq \emptyset$.*

Από τον ορισμό, τα εξής [α] - [δ] πρέπει να είναι απολύτως σαφή. Φροντίστε να τα κατανοήσετε καθαρά διανοητικά, χωρίς τη βοήθεια κανενός σχήματος. Στη συνέχεια θα δούμε πώς το Σχήμα 2 βοηθά στην κατανόησή τους. Πάντως, αν κατανοήσετε τα [α] - [δ], όλα τα επόμενα θα σας φανούν πολύ απλά.

[α] *Τα εσωτερικά σημεία του A ανήκουν στο A και τα εξωτερικά σημεία του A ανήκουν στο A^c.*

[β] *Τα συνοριακά σημεία του A δεν είναι ούτε εσωτερικά ούτε εξωτερικά σημεία του A και, επίσης, κάθε σημείο του μιγαδικού επιπέδου ανήκει σε μια από τις τρεις κατηγορίες σημείων: εσωτερικό σημείο, εξωτερικό σημείο, συνοριακό σημείο του A. Άρα το $\mathbb{C}$ χωρίζεται σε τρία ξένα μεταξύ τους σύνολα: τα σύνολα των εσωτερικών, των εξωτερικών και των συνοριακών σημείων του A.*

[γ] *Τα εξωτερικά σημεία του A είναι τα ίδια με τα εσωτερικά σημεία του A^c. Τα εσωτερικά σημεία του A είναι τα ίδια με τα εξωτερικά σημεία του A^c. Τα συνοριακά σημεία του A είναι τα ίδια με τα συνοριακά σημεία του A^c.*

[δ] *Αφού τα εσωτερικά σημεία του A ανήκουν στο A και τα εξωτερικά σημεία του A ανήκουν στο A^c, απομένει να δούμε που ανήκουν τα συνοριακά σημεία του A. Αυτό εξαρτάται: κάποια από τα συνοριακά σημεία (μπορεί όλα, μπορεί κανένα) ανήκουν στο A και τα υπόλοιπα (μπορεί κανένα, μπορεί όλα) ανήκουν στο A^c.*

Δείτε το Σχήμα 2 στο οποίο το ορθογώνιο πλαίσιο δεν παίζει κανένα ουσιαστικό ρόλο. Το $\mathbb{C}$ αποτελείται από τα σημεία που είναι μέσα στο πλαίσιο. Το A βρίσκεται αριστερά και το A^c δεξιά της διαχωριστικής γραμμής. Επίσης, το A περιέχει και τα σημεία του συνεχούς τμήματος της διαχωριστικής γραμμής και το A^c περιέχει και τα σημεία του διακεκομμένου τμήματος της διαχωριστικής γραμμής. Τώρα, τα εσωτερικά σημεία του A (και εξωτερικά σημεία του A^c) είναι τα σημεία που βρίσκονται αριστερά της διαχωριστικής γραμμής και τα εξωτερικά σημεία του A (και εσωτερικά σημεία του A^c) είναι τα σημεία που βρίσκονται δεξιά της διαχωριστικής γραμμής. Τα συνοριακά σημεία του A (και του A^c) είναι όλα τα σημεία της διαχωριστικής γραμμής.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ο z χαρακτηρίζεται* **οριακό σημείο** *του A αν για κάθε $r > 0$ ισχύει $D(z; r) \cap A \neq \emptyset$.*

Είναι σαφές ότι:

[ε] *Τα οριακά σημεία του A είναι τα εσωτερικά και τα συνοριακά σημεία του A. Επίσης, κανένα εξωτερικό σημείο του A δεν είναι οριακό σημείο του A.*

Στο Σχήμα 2 τα οριακά σημεία του A είναι τα σημεία αριστερά της διαχωριστικής γραμμής καθώς και τα σημεία της διαχωριστικής γραμμής.

Παράδειγμα 2.1.1. Έστω $A = D(z; r)$ ή $A = \overline{D}(z; r)$. Δηλαδή το A είναι είτε ο ανοικτός είτε ο κλειστός δίσκος με κέντρο z και ακτίνα r. Επίσης, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ως A τον ανοικτό δίσκο $D(z; r)$ μαζί με κάποια σημεία του κύκλου $C(z; r)$, για παράδειγμα μαζί με τα σημεία ενός οποιουδήποτε τόξου του κύκλου.
Σε κάθε περίπτωση:
Τα εσωτερικά σημεία του A είναι τα σημεία του ανοικτού δίσκου $D(z; r)$, τα συνοριακά σημεία του A είναι τα σημεία του κύκλου $C(z; r)$ και τα οριακά σημεία του A είναι τα σημεία του κλειστού δίσκου $\overline{D}(z; r)$. Τα εξωτερικά σημεία του A είναι τα σημεία του $\{w \mid |w - z| > r\}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ορίζουμε*

$$A^o = \{z \mid z \text{ εσωτερικό σημείο του } A\}$$

$$\partial A = \{z \mid z \text{ συνοριακό σημείο του } A\}$$

$$\overline{A} = \{z \mid z \text{ οριακό σημείο του } A\}$$

Το A^o ονομάζεται **εσωτερικό** *του A, το $\overline{A}$ ονομάζεται* **κλειστότητα** *του A και το ∂A ονομάζεται* **σύνορο** *του A.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1. [α] $\partial A = \partial(A^c)$.
[β] $A^o = A \setminus \partial A$.
[γ] $\overline{A} = A \cup \partial A$.
[δ] $(\overline{A})^c = (A^c)^o$.

Απόδειξη. [α] Τα συνοριακά σημεία του A είναι τα ίδια με τα συνοριακά σημεία του A^c.
[β] Αν το z είναι εσωτερικό σημείο του A, τότε ανήκει στο A και δεν είναι συνοριακό σημείο του

A. Άρα $A^o \subseteq A \setminus \partial A$. Επίσης, αν το z ανήκει στο A και δεν είναι συνοριακό σημείο του A, τότε είναι εσωτερικό σημείο του A. Άρα $A^o \supseteq A \setminus \partial A$.

[γ] Αν το z είναι οριακό σημείο του A, τότε είναι είτε εσωτερικό σημείο του A (οπότε ανήκει στο A) είτε συνοριακό σημείο του A. Άρα $\overline{A} \subseteq A \cup \partial A$. Επίσης, αν το z ανήκει στο A ή είναι συνοριακό σημείο του A, τότε είναι είτε εσωτερικό σημείο του A είτε συνοριακό σημείο του A, οπότε είναι οριακό σημείο του A. Άρα $\overline{A} \supseteq A \cup \partial A$.

[δ] Το z δεν είναι οριακό σημείο του A αν και μόνο αν είναι εξωτερικό σημείο του A αν και μόνο αν είναι εσωτερικό σημείο του A^c. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Το A χαρακτηρίζεται* **ανοικτό** *αν αποτελείται μόνο από τα εσωτερικά του σημεία.*
Το A χαρακτηρίζεται **κλειστό** *αν περιέχει όλα τα οριακά του σημεία.*

Στο Σχήμα 2 το A θα είναι ανοικτό αν η διαχωριστική γραμμή είναι ολόκληρη διακεκομμένη και το A θα είναι κλειστό αν η διαχωριστική γραμμή είναι ολόκληρη συνεχής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2. [α] *Το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν $A \cap \partial A = \emptyset$.*
[β] *Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν $\partial A \subseteq A$.*

Απόδειξη. [α] Κάθε σύνολο A περιέχει τα εσωτερικά του σημεία και πιθανόν κάποια από τα συνοριακά του σημεία. Άρα το A είναι ανοικτό αν και μόνο αν δεν περιέχει κανένα συνοριακό του σημείο.

[β] Τα οριακά σημεία του A είναι τα εσωτερικά του σημεία, τα οποία ούτως ή άλλως περιέχονται στο A, και τα συνοριακά του σημεία. Άρα το A είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία. □

Παράδειγμα 2.1.2. Ένας ανοικτός δίσκος είναι ανοικτό σύνολο και ένας κλειστός δίσκος είναι κλειστό σύνολο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.3. *Ένα σύνολο είναι κλειστό αν και μόνο αν το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό.*

Απόδειξη. Έχουμε τις ισοδυναμίες

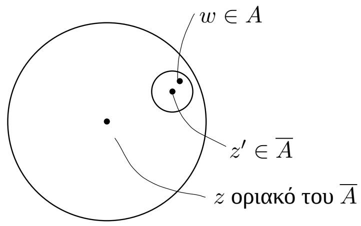
$$\begin{gathered}
\text{Το } A \text{ είναι κλειστό.} \\
\Updownarrow \\
\text{Το } A \text{ περιέχει όλα τα οριακά σημεία του } A. \\
\Updownarrow \\
\text{Το } A^c \text{ δεν περιέχει κανένα οριακό σημείο του } A. \\
\Updownarrow \\
\text{Το } A^c \text{ περιέχει μόνο εξωτερικά σημεία του } A. \\
\Updownarrow \\
\text{Το } A^c \text{ περιέχει μόνο εσωτερικά σημεία του } A^c. \\
\Updownarrow \\
\text{Το } A^c \text{ είναι ανοικτό.}
\end{gathered}$$

□

Επειδή το συμπλήρωμα του συμπληρώματος ενός συνόλου είναι το ίδιο το σύνολο, έχουμε και:
Ένα σύνολο είναι κλειστό αν και μόνο αν το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.4. [α] *Το $\overline{A}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο το οποίο περιέχει το A.*
[β] *Το A^o είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχεται στο A.*

Απόδειξη. [α] Κατ' αρχάς είναι ήδη σαφές ότι $A \subseteq \overline{A}$.
Κατόπιν, θα δούμε ότι το $\overline{A}$ είναι κλειστό.
Έστω z τυχόν οριακό σημείο του $\overline{A}$ και έστω τυχόν $r > 0$ (δείτε το Σχήμα 3).
Επειδή το z είναι οριακό σημείο του $\overline{A}$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $z' \in \overline{A}$ μέσα στον $D(z;r)$. Και, επειδή ο $D(z;r)$ είναι ανοικτός δίσκος, υπάρχει $r' > 0$ ώστε $D(z';r') \subseteq D(z;r)$. Τώρα, επειδή το z' είναι οριακό σημείο του A, υπάρχει τουλάχιστον ένα $w \in A$ μέσα στον $D(z';r')$ και, επομένως, μέσα στον $D(z;r)$.



Σχήμα 3

Άρα για κάθε $r > 0$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $w \in A$ μέσα στον $D(z;r)$. Άρα το z είναι οριακό σημείο του A, δηλαδή $z \in \overline{A}$.
Αποδείξαμε ότι το τυχόν οριακό σημείο του $\overline{A}$ ανήκει στο $\overline{A}$, οπότε το $\overline{A}$ είναι κλειστό.
Τέλος, θα δούμε ότι το $\overline{A}$ είναι το *μικρότερο* κλειστό υπερσύνολο του A.
Έστω κλειστό B με $A \subseteq B$.
Έστω τυχόν $z \in \overline{A}$, δηλαδή οριακό σημείο του A. Τότε για κάθε $r > 0$ ισχύει $D(z;r) \cap A \neq \emptyset$, οπότε, επειδή $A \subseteq B$, ισχύει $D(z;r) \cap B \neq \emptyset$. Άρα το z είναι οριακό σημείο του B και, επειδή το B είναι κλειστό, συνεπάγεται $z \in B$.
Αποδείξαμε ότι για κάθε $z \in \overline{A}$ ισχύει $z \in B$, οπότε $\overline{A} \subseteq B$.
[β] Κατ' αρχάς, είναι προφανές ότι $A^o \subseteq A$.
Τώρα, θα δούμε ότι το A^o είναι ανοικτό.
Έστω $z \in A^o$, δηλαδή εσωτερικό σημείο του A. Τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(z;r) \subseteq A$. Για κάθε $z' \in D(z;r)$ υπάρχει $r' > 0$ ώστε $D(z';r') \subseteq D(z;r)$ και, επομένως, $D(z';r') \subseteq A$ και, επομένως, το z' είναι εσωτερικό σημείο του A. Αποδείξαμε ότι κάθε $z' \in D(z;r)$ είναι εσωτερικό σημείο του A, δηλαδή $z' \in A^o$. Άρα $D(z;r) \subseteq A^o$, οπότε το z είναι εσωτερικό σημείο του A^o.
Αποδείξαμε ότι κάθε $z \in A^o$ είναι εσωτερικό σημείο του A^o, οπότε το A^o είναι ανοικτό.
Τέλος, θα δούμε ότι το A^o είναι το *μεγαλύτερο* ανοικτό υποσύνολο του A.
Έστω ανοικτό B με $B \subseteq A$.
Έστω τυχόν $z \in B$. Επειδή το B είναι ανοικτό, το z είναι εσωτερικό σημείο του B, οπότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(z;r) \subseteq B$ και, επομένως, $D(z;r) \subseteq A$. Άρα το z είναι εσωτερικό σημείο του A, δηλαδή $z \in A^o$.
Αποδείξαμε ότι για κάθε $z \in B$ ισχύει $z \in A^o$, οπότε $B \subseteq A^o$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.5. *Αν το A είναι φραγμένο, τότε και το $\overline{A}$ είναι φραγμένο.*

Απόδειξη. Έστω ότι το A είναι φραγμένο, οπότε το A περιέχεται σε κάποιον κλειστό δίσκο $\overline{D}(z;r)$. Επειδή το $\overline{A}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το A και επειδή ο $\overline{D}(z;r)$ είναι κλειστό σύνολο και περιέχει το A, συνεπάγεται ότι $\overline{A} \subseteq \overline{D}(z;r)$, οπότε το $\overline{A}$ είναι φραγμένο. □

Τώρα θα επεκταθούμε λίγο και στην περίπτωση του σημείου ∞.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Θα ονομάζουμε r-**περιοχή** του ∞ στο $\widehat{\mathbb{C}}$ το σύνολο*

$$D(\infty;r) = \{w \,|\, |w| > \tfrac{1}{r}\} \cup \{\infty\}$$

δηλαδή το εξωτερικό του δίσκου με κέντρο 0 και ακτίνα $\frac{1}{r}$ μαζί με το σημείο ∞.

Παρατηρήστε ότι όταν το r μικραίνει (και είναι, φυσικά, θετικό) η r-περιοχή $D(\infty; r)$ του ∞ μικραίνει, όπως κάνουν και οι r-περιοχές $D(z; r)$ των σημείων z του μιγαδικού επιπέδου. Μάλιστα, όταν το r τείνει στο $0+$ η $D(\infty; r)$ τείνει να εκφυλιστεί στο μονοσύνολο $\{\infty\}$.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα *μη-φραγμένο* σύνολο A. Είναι προφανές ότι για κάθε $r > 0$ η r-περιοχή $D(\infty; r)$ του ∞ περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A, οπότε *μπορούμε να θεωρήσουμε το ∞ ως ένα επιπλέον οριακό και συνοριακό σημείο του A στο $\widehat{\mathbb{C}}$*. Μπορούμε, επίσης, να θεωρήσουμε ότι το σύνορο του A στο $\widehat{\mathbb{C}}$ αποτελείται από το σύνορο του A στο $\mathbb{C}$ μαζί με το σημείο ∞ και ότι η κλειστότητα του A στο $\widehat{\mathbb{C}}$ αποτελείται από την κλειστότητα του A στο $\mathbb{C}$ μαζί με το σημείο ∞. Αυτό το γράφουμε

$$\partial^{\widehat{\mathbb{C}}} A = \partial A \cup \{\infty\}, \qquad \overline{A}^{\widehat{\mathbb{C}}} = \overline{A} \cup \{\infty\} \qquad \text{αν } A \text{ μη-φραγμένο.}$$

Από την άλλη μεριά, αν θεωρήσουμε ένα *φραγμένο* A, τότε το A περιέχεται σε κάποιον δίσκο $\overline{D}(0, r)$, οπότε η $\frac{1}{r}$-περιοχή $D(\infty; \frac{1}{r})$ του ∞ δεν περιέχει κανένα σημείο του A. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε το ∞ ως εξωτερικό σημείο του A και σ' αυτήν την περίπτωση το σύνορο του A στο $\widehat{\mathbb{C}}$ αποτελείται μόνο από το σύνορο του A στο $\mathbb{C}$ και η κλειστότητα του A στο $\widehat{\mathbb{C}}$ αποτελείται μόνο από την κλειστότητα του A στο $\mathbb{C}$. Αυτό το γράφουμε

$$\partial^{\widehat{\mathbb{C}}} A = \partial A, \qquad \overline{A}^{\widehat{\mathbb{C}}} = \overline{A} \qquad \text{αν } A \text{ φραγμένο.}$$

Ασκήσεις.

2.1.1. [α] Αποδείξτε ότι το $\emptyset$ και το $\mathbb{C}$ είναι ανοικτά και κλειστά σύνολα.

[β] Αποδείξτε ότι τα ανοικτά τρίγωνα, τα ανοικτά παραλληλόγραμμα, οι ανοικτοί δακτύλιοι και τα ανοικτά ημιεπίπεδα είναι ανοικτά σύνολα.

[γ] Αποδείξτε ότι τα πεπερασμένα σύνολα $\{z_1, \dots, z_n\}$, οι ευθείες, τα ευθύγραμμα τμήματα (με τα άκρα τους), οι πολυγωνικές γραμμές (με τα άκρα τους), οι κύκλοι, τα κλειστά τρίγωνα, τα κλειστά παραλληλόγραμμα, οι κλειστοί δακτύλιοι και τα κλειστά ημιεπίπεδα είναι κλειστά σύνολα.

2.1.2. [α] Είναι το ανοικτό διάστημα $(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < z < 1\}$ ανοικτό ή κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{C}$; Βρείτε τα εσωτερικά σημεία, τα συνοριακά σημεία, τα εξωτερικά σημεία και τα οριακά σημεία του $(0, 1)$.

[β] Ομοίως για το κλειστό διάστημα $[0, 1] = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 \leq z \leq 1\}$.

[γ] Ομοίως για το $\{x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{Q}\}$.

[δ] Ομοίως για τα $\{\frac{1}{n} + iy \,|\, n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1\}$ και $\{\frac{1}{n} + iy : n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{iy \,|\, 0 \leq y \leq 1\}$.

2.1.3. [α] Ο $z \in A$ χαρακτηρίζεται **μεμονωμένο σημείο** του A αν υπάρχει $r > 0$ ώστε $A \cap D(z; r) = \{z\}$. Αποδείξτε ότι ένα μεμονωμένο σημείο του A είναι συνοριακό σημείο του A.

[β] Ο z χαρακτηρίζεται **σημείο συσσώρευσης** του A αν για κάθε $r > 0$ ισχύει $(A \setminus \{z\}) \cap D(z; r) \neq \emptyset$. Αποδείξτε ότι, αν $z \notin A$, τότε ο z είναι συνοριακό σημείο του A αν και μόνο αν είναι οριακό σημείο του A αν και μόνο αν είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αποδείξτε ότι, αν $z \in A$, τότε ο z είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν δεν είναι μεμονωμένο σημείο του A.

2.1.4. [α] Αποδείξτε ότι η ένωση οποιωνδήποτε ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο. Αποδείξτε ότι η τομή οποιωνδήποτε πεπερασμένου πλήθους ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.

[β] Αποδείξτε ότι η τομή οποιωνδήποτε κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο. Αποδείξτε ότι η ένωση οποιωνδήποτε πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

2.1.5. Ορίζουμε $\operatorname{diam} A = \sup\{|z - w| \,|\, z, w \in A\}$ και το $\operatorname{diam} A$ ονομάζεται **διάμετρος** του μη-κενού συνόλου A.

[α] Αν $A \subseteq B$, αποδείξτε ότι $\operatorname{diam} A \leq \operatorname{diam} B$.

[β] Αποδείξτε ότι $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \overline{A}$.

[γ] Αποδείξτε ότι το A είναι φραγμένο αν και μόνο αν $\operatorname{diam} A < +\infty$.

2.1.6. Ορίζουμε $d(z,A) = \inf\{|z-w| \mid w \in A\}$ και το $d(z,A)$ ονομάζεται **απόσταση** του z από το μη-κενό σύνολο A. Αποδείξτε ότι:
[α] $d(z,A) = d(z,\overline{A})$.
[β] $d(z,A) = 0 \Leftrightarrow z \in \overline{A}$.
[γ] $|d(z',A) - d(z'',A)| \leq |z'-z''|$.

2.1.7. Αν το A είναι ανοικτό ή κλειστό σύνολο, αποδείξτε ότι $(\partial A)^o = \emptyset$. Βρείτε σύνολο A ώστε $(\partial A)^o = \mathbb{C}$.

2.2 Ακολουθίες.

Θα θυμηθούμε κάποια πράγματα για μιγαδικές ακολουθίες (z_n).

Λέμε ότι η (z_n) **συγκλίνει** στον z και γράφουμε $z_n \to z$ αν *για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* n_0 *ώστε για κάθε* $n \geq n_0$ *να ισχύει* $|z_n - z| < \epsilon$ *ή, ισοδύναμα,* $z_n \in D(z;\epsilon)$. Με άλλα λόγια η (z_n) συγκλίνει στον z αν για κάθε περιοχή $D(z;\epsilon)$ του z οι όροι της (z_n) βρίσκονται τελικά μέσα σ' αυτήν.

Ομοίως, λέμε ότι η (z_n) αποκλίνει στο ∞ και γράφουμε $z_n \to \infty$ αν *για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει* n_0 *ώστε για κάθε* $n \geq n_0$ *να ισχύει* $|z_n| > \frac{1}{\epsilon}$ *ή, ισοδύναμα,* $z_n \in D(\infty;\epsilon)$. Με άλλα λόγια η (z_n) συγκλίνει στο ∞ αν για κάθε περιοχή $D(\infty;\epsilon)$ του ∞ οι όροι της (z_n) βρίσκονται τελικά μέσα σ' αυτήν.

Παράδειγμα 2.2.1. Ας δούμε την ακολουθία $\big((-2)^n\big)$.
Η ακολουθία αυτή ως πραγματική ακολουθία στο $\mathbb{R}$ δεν έχει όριο διότι οι δυο υποακολουθίες των άρτιων και των περιττών δεικτών έχουν διαφορετικά όρια: $(-2)^{2k} = 2^{2k} \to +\infty$ και $(-2)^{2k-1} = -2^{2k-1} \to -\infty$.
Όμως, η ίδια ακολουθία ως μιγαδική ακολουθία έχει όριο ∞, διότι $\big|(-2)^n\big| = 2^n \to +\infty$.

Παράδειγμα 2.2.2. Θεωρούμε την **γεωμετρική πρόοδο** (z^n).
Αν $|z| < 1$, τότε $|z^n - 0| = |z|^n \to 0$, οπότε $z^n \to 0$.
Αν $|z| > 1$, τότε $|z^n| = |z|^n \to +\infty$, οπότε $z^n \to \infty$.
Αν $z = 1$, τότε $z^n = 1 \to 1$.
Τέλος, έστω $|z| = 1$ και $z \neq 1$ και ας υποθέσουμε ότι $z^n \to w$. Επειδή $|z^n| = |z|^n = 1$ για κάθε n, συνεπάγεται ότι ο w δεν είναι ∞ και ότι $|w| = 1$. Επειδή $z^n \to w$, συνεπάγεται $z^{n+1} \to w$, οπότε $\frac{z^{n+1}}{z^n} \to \frac{w}{w} = 1$. Όμως, ισχύει $\frac{z^{n+1}}{z^n} = z$ για κάθε n, οπότε $z = 1$ και καταλήγουμε σε άτοπο.
Συνοψίζουμε:

$$z^n \begin{cases} \to 0, & \text{αν } |z| < 1 \\ \to 1, & \text{αν } z = 1 \\ \to \infty, & \text{αν } |z| > 1 \\ \text{δεν έχει όριο}, & \text{αν } |z| = 1, z \neq 1 \end{cases}$$

Έχει ενδιαφέρον να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των διαδοχικών όρων της (z^n).
Αν $z = 0$ ή $z = 1$, τότε η (z^n) είναι σταθερή.
Έστω $0 < r = |z| < 1$ και $\theta = \operatorname{Arg} z$, οπότε $-\pi < \theta \leq \pi$ και $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Τότε ισχύει $z^n = r^n\big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big)$ και $z^{n+1} = r^{n+1}\big(\cos(n\theta+\theta) + i\sin(n\theta+\theta)\big)$ για κάθε n. Επομένως, τα μέτρα των διαδοχικών z^n φθίνουν γνησίως και συγκλίνουν στον 0 και οι διαδοχικοί z^n περιστρέφονται κάθε φορά κατά γωνία σταθερού μέτρου $|\theta|$ με τη θετική φορά περιστροφής, αν $\theta > 0$, ή με την αρνητική φορά περιστροφής, αν $\theta < 0$. Αν $\theta = 0$, τότε δεν υφίσταται περιστροφή. Με άλλα λόγια, αν $\theta \neq 0$, οι διαδοχικοί z^n κάνουν μια "σπειροειδή κίνηση" γύρω από τον 0 συγκλίνοντας στον 0, ενώ, αν $\theta = 0$, οι διαδοχικοί z^n συγκλίνουν στον 0 πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $[0,1]$.
Έστω $r = |z| > 1$. Τότε ισχύουν ακριβώς τα ίδια με την προηγούμενη περίπτωση με τη διαφορά ότι τα μέτρα των διαδοχικών z^n αυξάνονται γνησίως και αποκλίνουν στο $+\infty$. Δηλαδή, αν $\theta \neq 0$,

οι διαδοχικοί z^n κάνουν μια "σπειροειδή κίνηση" γύρω από τον 0 αποκλίνοντας στο ∞, ενώ, αν $\theta = 0$, οι διαδοχικοί z^n αποκλίνουν στο ∞ πάνω στην ημιευθεία $[1, +\infty]$.
Τέλος, έστω $|z| = 1$ και $z \neq 1$. Είναι σαφές από τα προηγούμενα ότι οι διαδοχικοί z^n περιέχονται στον σταθερό κύκλο $C(0; 1)$ (δηλαδή, ούτε πλησιάζουν τον 0 ούτε απομακρύνονται από τον 0) και περιστρέφονται κάθε φορά κατά γωνία σταθερού μέτρου $|\theta|$ με τη θετική φορά περιστροφής, αν $\theta > 0$, ή με την αρνητική φορά περιστροφής, αν $\theta < 0$.

Η επόμενη πρόταση είναι γνωστή.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.6. *Έστω $z_n = x_n + iy_n$ για κάθε n και $z = x + iy$. Τότε $z_n \to z$ αν και μόνο αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$.*

Απόδειξη. Και οι δυο κατευθύνσεις αποδεικνύονται εύκολα από τις ανισότητες

$$0 \leq |x_n - x|, |y_n - y| \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|. \tag{2.1}$$

Αν $z_n \to z$, τότε $|z_n - z| \to 0$ και από τις αριστερές ανισότητες (2.1) συνεπάγεται ότι $|x_n - x| \to 0$ και $|y_n - y| \to 0$ και, επομένως, $x_n \to x$ και $y_n \to y$. Αντιστρόφως, αν $x_n \to x$ και $y_n \to y$, τότε $|x_n - x| \to 0$ και $|y_n - y| \to 0$, οπότε από την δεξιά ανισότητα (2.1) συνεπάγεται ότι $|z_n - z| \to 0$ και, επομένως, $z_n \to z$. □

Μια άλλη γνωστή ιδιότητα είναι η εξής: αν η (z_n) συγκλίνει, τότε είναι φραγμένη. Αυτό αποδεικνύεται εύκολα μέσω της Πρότασης 2.6 αλλά και ανεξάρτητα από την Πρόταση 2.6. Το ίδιο και για τους συνηθισμένους αλγεβρικούς κανόνες. Αν $z_n \to z$ και $w_n \to w$, τότε

$$z_n + w_n \to z + w, \quad -z_n \to -z, \quad z_n - w_n \to z - w, \quad z_n w_n \to zw, \quad \tfrac{1}{z_n} \to \tfrac{1}{z}, \quad \tfrac{z_n}{w_n} \to \tfrac{z}{w}.$$

Επίσης,

$$\overline{z_n} \to \overline{z}, \qquad |z_n| \to |z|.$$

Οι κανόνες αυτοί ισχύουν και όταν κάποιος από τους z, w (ή και οι δύο) είναι ∞ αρκεί να μην προκύπτει απροσδιόριστη μορφή. Υπενθυμίζουμε την ιδιαιτερότητα του $\mathbb{C}$ σε σχέση με το $\mathbb{R}$: αν $z_n \to 0$, τότε $\frac{1}{z_n} \to \infty$.

Επίσης, αν $z_n \to z$, τότε $z_{n_k} \to z$ για κάθε υποακολουθία (z_{n_k}) της (z_n).

Θα μνημονεύσουμε και την **ιδιότητα πληρότητας** του $\mathbb{C}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.7. *Κάθε ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{C}$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω (z_n) ακολουθία Cauchy, δηλαδή $|z_n - z_m| \to 0$ όταν $n, m \to +\infty$. Έχουμε τις προσαρμοσμένες ανισότητες (2.1)

$$0 \leq |x_n - x_m|, |y_n - y_m| \leq |z_n - z_m| \leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m|. \tag{2.2}$$

Από τις αριστερές ανισότητες (2.2) βρίσκουμε ότι $|x_n - x_m| \to 0$ και $|y_n - y_m| \to 0$ όταν $n, m \to +\infty$, οπότε οι (x_n) και (y_n) είναι ακολουθίες Cauchy. Από την ιδιότητα πληρότητας του $\mathbb{R}$ συνεπάγεται ότι οι (x_n) και (y_n) συγκλίνουν και από την Πρόταση 2.6 συνεπάγεται ότι η (z_n) συγκλίνει. □

Ασκήσεις.

2.2.1. Έστω $z_n \to z$ και $z_n \neq 0$ για κάθε n και $z \neq 0$.

[α] Αν $\mathrm{Arg}\, z \neq \pi$, αποδείξτε ότι $\mathrm{Arg}\, z_n \to \mathrm{Arg}\, z$.

[β] Μελετήστε τις ακολουθίες $(-1 + \frac{i}{n})$, $(-1 - \frac{i}{n})$ και $(-1 + (-1)^n \frac{i}{n})$. Ποιό είναι το όριό τους; Ποιά είναι τα πρωτεύοντα ορίσματα των όρων τους και ποιά είναι η οριακή συμπεριφορά τους;

[γ] Αν $\mathrm{Arg}\, z = \pi$, αποδείξτε ότι είτε (i) $\mathrm{Arg}\, z_n \to \pi$, είτε (ii) $\mathrm{Arg}\, z_n \to -\pi$, είτε (iii) η (z_n) χωρίζεται σε ακριβώς δυο υποακολουθίες $(z_{n'_k})$ και $(z_{n''_k})$ ώστε $\mathrm{Arg}\, z_{n'_k} \to \pi$ και $\mathrm{Arg}\, z_{n''_k} \to -\pi$.

2.2.2. [α] Αποδείξτε ότι ο z είναι οριακό σημείο του A αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (z_n) στο A ώστε $z_n \to z$.

[β] Δείτε την άσκηση 2.1.3.[β] και αποδείξτε ότι ο z είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (z_n) στο A ώστε $z_n \to z$ και $z_n \neq z$ για κάθε n.

2.3 Συμπαγή σύνολα.

Το πρώτο αποτέλεσμα είναι η επέκταση του γνωστού Θεωρήματος Bolzano - Weierstrass στο μιγαδικό επίπεδο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1. *Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια συγκλίνουσα υποακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει

$$|z_n| \leq M \qquad \text{για κάθε } n$$

και έστω $z_n = x_n + iy_n$ για κάθε n. Συνεπάγεται ότι ισχύει

$$|x_n| \leq M, \quad |y_n| \leq M \qquad \text{για κάθε } n.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano - Weierstrass για πραγματικές ακολουθίες, υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) της (x_n) η οποία συγκλίνει. Έστω

$$x_{n_k} \to x.$$

Τώρα θεωρούμε την αντίστοιχη υποακολουθία (y_{n_k}) της (y_n). Η (y_{n_k}) μπορεί να μη συγκλίνει αλλά είναι φραγμένη διότι ισχύει $|y_{n_k}| \leq M$ για κάθε k. Και πάλι σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano - Weierstrass για πραγματικές ακολουθίες, υπάρχει υποακολουθία $(y_{n_{k_l}})$ της (y_{n_k}) η οποία συγκλίνει. Έστω

$$y_{n_{k_l}} \to y.$$

Επειδή $x_{n_k} \to x$, συνεπάγεται

$$x_{n_{k_l}} \to x.$$

Ορίζουμε $z = x + iy$ και συμπεραίνουμε ότι

$$z_{n_{k_l}} \to z.$$

Είναι σαφές ότι η $(z_{n_{k_l}})$ είναι υποακολουθία της (z_n). □

Και η επόμενη πρόταση έχει αντίστοιχη για πραγματικές μη-φραγμένες ακολουθίες.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.8. *Κάθε μη-φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία που αποκλίνει στο* ∞.

Απόδειξη. Το ότι η (z_n) δεν είναι φραγμένη είναι ισοδύναμο με το ότι η $(|z_n|)$ δεν είναι φραγμένη. Από την αντίστοιχη πρόταση για πραγματικές ακολουθίες, συνεπάγεται ότι υπάρχει υποακολουθία $(|z_{n_k}|)$ της $(|z_n|)$ ώστε

$$|z_{n_k}| \to +\infty$$

και, επομένως,

$$z_{n_k} \to \infty.$$

□

Πόρισμα από κοινού του Θεωρήματος 2.1 και της Πρότασης 2.8 είναι ότι *κάθε ακολουθία έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία η οποία έχει όριο στο* $\widehat{\mathbb{C}}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ένα σύνολο* $K \subseteq \mathbb{C}$ *χαρακτηρίζεται* **συμπαγές** *αν κάθε ακολουθία στο* K *έχει συγκλίνουσα στο* K *υποακολουθία. Δηλαδή, το* K *είναι συμπαγές αν για κάθε* (z_n) *στο* K *υπάρχει υποακολουθία* (z_{n_k}) *ώστε* $z_{n_k} \to z$ *για κάποιο* $z \in K$.

ΛΗΜΜΑ 2.1. *Το* z *είναι οριακό σημείο του συνόλου* A *αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία* (z_n) *στο* A *ώστε* $z_n \to z$.

Απόδειξη. Έστω $z_n \in A$ για κάθε n και $z_n \to z$.
Τότε για κάθε $r > 0$ υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $z_n \in D(z;r)$. Άρα για κάθε $r > 0$ η r-περιοχή $D(z;r)$ του z περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A και, επομένως, το z είναι οριακό σημείο του A.
Τώρα, έστω ότι το z είναι οριακό σημείο του A.
Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο, έστω z_n, του A στην $\frac{1}{n}$-περιοχή $D(z;\frac{1}{n})$ του z. Επομένως, ισχύει $z_n \in A$ και

$$|z_n - z| < \tfrac{1}{n} \qquad \text{για κάθε } n.$$

Άρα υπάρχει ακολουθία (z_n) στο A ώστε $z_n \to z$. □

Το επόμενο αποτέλεσμα αποτελεί τον κυριότερο τρόπο αναγνώρισης συμπαγών συνόλων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2. *Ένα σύνολο είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη. Έστω ότι το K είναι συμπαγές. Θα αποδείξουμε ότι το K είναι κλειστό και φραγμένο.
Έστω οριακό σημείο z του K. Τότε υπάρχει ακολουθία (z_n) στο K ώστε

$$z_n \to z.$$

Επειδή το K είναι συμπαγές, υπάρχει υποακολουθία (z_{n_k}) της (z_n) η οποία συγκλίνει σε σημείο, έστω w, του K:

$$z_{n_k} \to w \quad \text{και} \quad w \in K.$$

Επειδή $z_n \to z$, συνεπάγεται

$$z_{n_k} \to z.$$

Άρα $z = w$ και, επομένως, $z \in K$.
Αποδείξαμε ότι κάθε οριακό σημείο του K ανήκει στο K. Άρα το K είναι κλειστό σύνολο.
Έστω ότι το K δεν είναι φραγμένο. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $z_n \in K$ ώστε

$$|z_n| > n.$$

Δηλαδή, υπάρχει ακολουθία (z_n) στο K ώστε

$$z_n \to \infty.$$

Τότε κάθε υποακολουθία της (z_n) αποκλίνει, επίσης, στο ∞, οπότε η (z_n) δεν έχει καμιά υποακολουθία η οποία να συγκλίνει σε σημείο του K. Αυτό αντιφάσκει με το ότι το K είναι συμπαγές και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα το K είναι φραγμένο.
Αντιστρόφως, έστω ότι το K είναι κλειστό και φραγμένο. Θα αποδείξουμε ότι το K είναι συμπαγές, δηλαδή ότι κάθε ακολουθία στο K έχει υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε σημείο του K.
Έστω οποιαδήποτε (z_n) στο K. Επειδή το K είναι φραγμένο, συνεπάγεται ότι η (z_n) είναι φραγμένη και, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano - Weierstrass, υπάρχει υποακολουθία (z_{n_k}) της (z_n) η οποία συγκλίνει: έστω

$$z_{n_k} \to z.$$

Επειδή η (z_{n_k}) είναι στο K, ο z είναι οριακό σημείο του K. Επειδη το K είναι κλειστό, συνεπάγεται

$$z \in K.$$

Άρα υπάρχει υποακολουθία (z_{n_k}) της (z_n) η οποία συγκλίνει σε σημείο του K. □

Παράδειγμα 2.3.1. Κάθε κλειστός δίσκος $\overline{D}(z;r)$ είναι συμπαγές σύνολο.
Κάθε κλειστός δακτύλιος

$$\overline{R}(z;r_1,r_2) = \{w \,|\, r_1 \leq |w - z| \leq r_2\}$$

είναι συμπαγές σύνολο.
Κάθε κλειστό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι συμπαγές σύνολο.

Παράδειγμα 2.3.2. Ο κλειστός δακτύλιος (με άπειρη εξωτερική ακτίνα)

$$\overline{R}(z; r_1, +\infty) = \{w \,|\, r_1 \leq |w - z|\}$$

είναι κλειστό αλλά όχι φραγμένο σύνολο, οπότε δεν είναι συμπαγές σύνολο.
Ο ανοικτός δίσκος $D(z; r)$ είναι φραγμένο σύνολο αλλά όχι κλειστό, οπότε δεν είναι συμπαγές σύνολο.

Παράδειγμα 2.3.3. Το $\mathbb{C}$ είναι, προφανώς, ανοικτό σύνολο διότι κάθε σημείο z είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{C}$, αφού όποιον δίσκο $D(z; r)$ κι αν πάρουμε ισχύει $D(z; r) \subseteq \mathbb{C}$.
Το $\mathbb{C}$ είναι *και* κλειστό σύνολο διότι, προφανώς, κάθε οριακό σημείο του είναι μιγαδικός αριθμός και αυτομάτως περιέχεται στο $\mathbb{C}$.
Τώρα, το $\emptyset$, ως συμπλήρωμα του $\mathbb{C}$, είναι αυτομάτως κλειστό και ανοικτό. *Έχει ενδιαφέρον να αποδεχθεί κατ' ευθείαν ότι το $\emptyset$ είναι κλειστό και ανοικτό. Δοκιμάστε το!*
Τώρα, το $\mathbb{C}$ είναι κλειστό αλλά όχι φραγμένο και, επομένως, δεν είναι συμπαγές. Ενώ το $\emptyset$ είναι κλειστό *και* φραγμένο (αφού περιέχεται σε οποιονδήποτε δίσκο), οπότε είναι συμπαγές.
Βέβαια, το ότι το $\mathbb{C}$ δεν είναι συμπαγές μπορούμε να το δούμε και κατευθείαν από τον ορισμό της συμπάγειας. Μπορούμε να σκεφτούμε μια συγκεκριμένη ακολουθία στο $\mathbb{C}$, για παράδειγμα την (z_n) με $z_n = n$ για κάθε n, η οποία έχει όριο ∞ και η οποία, γι αυτόν τον λόγο, δεν έχει *καμιά* υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε σημείο του $\mathbb{C}$ (διότι κάθε υποακολουθία έχει όριο ∞).
Μπορείτε να αποδείξετε κατ' ευθείαν με τον ορισμό ότι το $\emptyset$ είναι συμπαγές;

Παράδειγμα 2.3.4. Είδαμε ότι το $\mathbb{C}$ δεν είναι συμπαγές. Αν όμως επεκταθούμε (όπως κάνουμε αρκετά συχνά) στο $\widehat{\mathbb{C}}$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αυτό είναι συμπαγές σύνολο.
Πράγματι, ας θεωρήσουμε μια οποιαδήποτε ακολουθία στο $\widehat{\mathbb{C}}$. Αν αυτή έχει άπειρους όρους σταθερούς και ίσους με το ∞, τότε αυτοί αποτελούν υποακολουθία η οποία είναι σταθερή και επομένως έχει όριο στο $\widehat{\mathbb{C}}$ (το ∞). Αν η ακολουθία που θεωρήσαμε δεν έχει άπειρους όρους ίσους με ∞, τότε τελικά είναι στο $\mathbb{C}$, οπότε μπορούμε να αγνοήσουμε τους αρχικούς όρους και να υποθέσουμε ότι ολόκληρη η ακολουθία είναι στο $\mathbb{C}$ και τότε έχουμε το πόρισμα του Θεωρήματος 2.1 (Bolzano - Weierstrass) και της Πρότασης 2.8 το οποίο λέει ότι η ακολουθία μας έχει υποακολουθία η οποία έχει όριο στο $\widehat{\mathbb{C}}$.
Άρα κάθε ακολουθία στο $\widehat{\mathbb{C}}$ έχει υποακολουθία η οποία έχει όριο στο $\widehat{\mathbb{C}}$ και, επομένως, το $\widehat{\mathbb{C}}$ μπορεί να θεωρηθεί συμπαγές.
Το ότι το $\widehat{\mathbb{C}}$ θεωρείται συμπαγές το εκφράζουμε μιλώντας για την **συμπαγή σφαίρα του Riemann** και λέγοντας ότι το $\widehat{\mathbb{C}}$ αποτελεί **συμπαγοποίηση του $\mathbb{C}$ με επισύναψη ενός σημείου** (του ∞).

Παράδειγμα 2.3.5. Το σύνολο $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι κλειστό διότι δεν περιέχει τον 0, ο οποίος είναι οριακό σημείο του. Άρα το σύνολο δεν είναι συμπαγές.
Αντιθέτως, το σύνολο $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ είναι κλειστό (γιατί;) και φραγμένο, οπότε είναι συμπαγές.

Η Πρόταση 2.9 λέει ότι δυο σύνολα, το ένα συμπαγές και το άλλο κλειστό, τα οποία είναι ξένα έχουν *θετική απόσταση* ανάμεσά τους.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.9. *Έστω μη-κενό συμπαγές σύνολο K και μη-κενό κλειστό σύνολο F. Αν τα K και F είναι ξένα, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|z - w| \geq \delta$ για κάθε $z \in K$ και $w \in F$ (Σχήμα 4).*

Απόδειξη. Έστω ότι το συμπέρασμα δεν είναι σωστό.
Τότε για κάθε n υπάρχουν $z_n \in K, w_n \in F$ ώστε

$$|z_n - w_n| < \tfrac{1}{n}.$$

Επειδή το K είναι συμπαγές, υπάρχει υποακολουθία (z_{n_k}) της (z_n) η οποία συγκλίνει σε σημείο, έστω z, του K:

$$z_{n_k} \to z \quad \text{και} \quad z \in K.$$

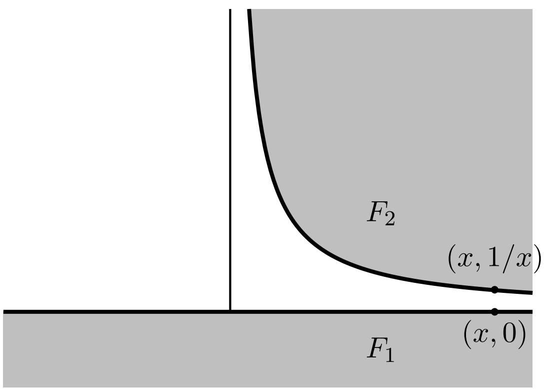
Τότε ισχύει
$$0 \le |w_{n_k} - z| \le |w_{n_k} - z_{n_k}| + |z_{n_k} - z| < \tfrac{1}{n_k} + |z_{n_k} - z|$$
για κάθε k και, επομένως,
$$w_{n_k} \to z.$$
Η ακολουθία (w_{n_k}) είναι στο F, οπότε ο z είναι οριακό σημείο του F. Επειδή το F είναι κλειστό σύνολο, συνεπάγεται
$$z \in F.$$
Άρα $z \in K$ και $z \in F$ και καταλήγουμε σε άτοπο διότι τα K και F είναι ξένα. $\square$

Σχήμα 4

Παράδειγμα 2.3.6. Οι δίσκος $K = \overline{D}(2;1)$ είναι συμπαγής και το ημιεπίπεδο $F = \{x + iy \,|\, x \le 0\}$ είναι κλειστό. Είναι φανερό (γεωμετρικά) ότι τα σημεία $z_0 = 1$ του K και $w_0 = 0$ του F είναι τα πιο κοντινά σημεία των δυο συνόλων. Άρα ισχύει $|z - w| \ge 1$ για κάθε $z \in K$, $w \in F$.

Παράδειγμα 2.3.7. Ο δίσκος $K = \overline{D}(0;2)$ είναι συμπαγής και ο δακτύλιος $F = \overline{R}(0;3,+\infty)$ είναι κλειστός. Αν πάρουμε οποιονδήποτε $z_0 \in C(0;2) \subseteq K$ και τον αντίστοιχο $w_0 = \frac{3}{2}z_0 \in C(0;3) \subseteq F$, τότε ισχύει $|z_0 - w_0| = 1 \le |z - w|$ για κάθε $z \in K$, $w \in F$. Δηλαδή, η απόσταση των z_0, w_0 είναι η ελάχιστη από τις αποστάσεις ανάμεσα σε σημεία των K, F.

Παράδειγμα 2.3.8. Τα $F_1 = \{x + iy : y \le 0\}$ και $F_2 = \{x + iy : x > 0, y \ge \frac{1}{x}\}$ είναι ξένα κλειστά σύνολα (Σχήμα 5). Όμως, δεν υπάρχει κανένας $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|z - w| \ge \delta$ για κάθε $z \in F_1$, $w \in F_2$. Αν υπήρχε τέτοιος δ, τότε θα ίσχυε $|(x + i0) - (x + i\frac{1}{x})| \ge \delta$ ή, ισοδύναμα, $\frac{1}{x} \ge \delta$ για κάθε $x > 0$. Αυτό είναι αδύνατο διότι $\frac{1}{x} \to 0$ όταν $x \to +\infty$.
Βλέπουμε ότι κανένα από τα F_1 και F_2 δεν είναι συμπαγές, διότι κανένα δεν είναι φραγμένο.



Σχήμα 5

Ασκήσεις.

2.3.1. Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένο σύνολο είναι συμπαγές.

2.3.2. Αποδείξτε ότι οποιαδήποτε πολυγωνική γραμμή, δηλαδή ένωση διαδοχικών ευθύγραμμων τμημάτων $[z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \cdots \cup [z_{n-1}, z_n]$, είναι συμπαγές σύνολο.

2.3.3. Έστω συμπαγές σύνολο K και κλειστό σύνολο F ώστε $F \subseteq K$. Αποδείξτε ότι το F είναι συμπαγές σύνολο.

2.3.4. Έστω φραγμένο σύνολο A. Αποδείξτε ότι τα $\overline{A}$ και ∂A είναι συμπαγή σύνολα.

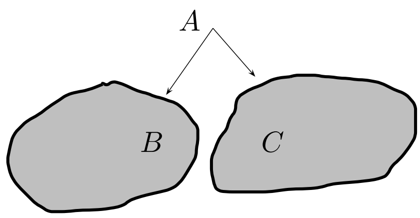
2.3.5. [α] Έστω ακολουθία (z_n) ώστε $z_n \to z$ και $z_n \neq z$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι το $\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι συμπαγές.
[β] Έστω ακολουθία (z_n) ώστε $z_n \to z$. Αποδείξτε ότι το $\{z_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{z\}$ είναι συμπαγές.

2.3.6. Αποδείξτε, αφού δείτε την άσκηση 2.1.4, ότι η ένωση πεπερασμένης συλλογής συμπαγών συνόλων είναι συμπαγές σύνολο και ότι η τομή οποιασδήποτε συλλογής συμπαγών συνόλων είναι συμπαγές σύνολο.

2.3.7. Έστω ακολουθία μη κενών συμπαγών συνόλων (K_n) ώστε $K_{n+1} \subseteq K_n$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n \neq \emptyset$.

2.3.8. [α] Δείτε την άσκηση 2.1.5 και αποδείξτε ότι, αν το μη-κενό σύνολο K είναι συμπαγές, τότε υπάρχουν $z_0, w_0 \in K$ ώστε $|z_0 - w_0| = \operatorname{diam} K$.
[β] Δείτε την άσκηση 2.1.6 και αποδείξτε ότι, αν το μή-κενό σύνολο F είναι κλειστό, τότε υπάρχει $w_0 \in F$ ώστε $|z - w_0| = d(z, F)$.
[γ] Αν το μη-κενό K είναι συμπαγές και το μη-κενό F είναι κλειστό, αποδείξτε ότι υπάρχουν $z_0 \in K$ και $w_0 \in F$ ώστε να ισχύει $|z_0 - w_0| \leq |z - w|$ για κάθε $z \in K$, $w \in F$.

2.4 Συνεκτικά σύνολα.



Σχήμα 6

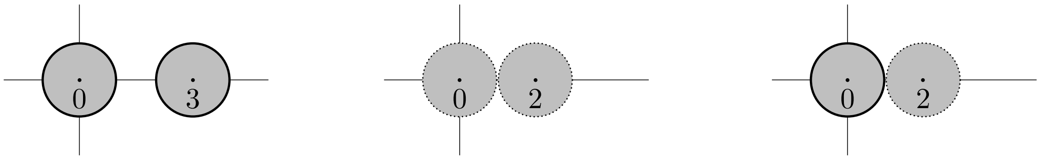
ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω σύνολα A, B, C. Λέμε ότι τα B, C αποτελούν **διάσπαση** του A αν (i) $B \cup C = A$, (ii) $B \cap C = \emptyset$, (iii) $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$, (iv) κανένα από τα B, C δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου (Σχήμα 6).*

Όταν ισχύουν τα (i), (ii), (iii), λέμε ότι τα B, C αποτελούν *διαμέριση* του A. Η διαμέριση είναι συνολοθεωρητική έννοια ενώ η διάσπαση είναι τοπολογική έννοια.

Παράδειγμα 2.4.1. Έστω $B = \overline{D}(0; 1)$, $C = \overline{D}(3; 1)$ και $A = B \cup C$ (Σχήμα 7).
Είναι σαφές ότι τα B, C αποτελούν διάσπαση του A.

Παράδειγμα 2.4.2. Έστω $B = D(0; 1)$, $C = D(2; 1)$ και $A = B \cup C$ (Σχήμα 8).
Οι δίσκοι B, C εφάπτονται αλλά, και πάλι, αποτελούν διάσπαση του A.

Παράδειγμα 2.4.3. Έστω $B = \overline{D}(0;1)$, $C = D(2;1)$ και $A = B \cup C$ (Σχήμα 9).
Τώρα, οι δίσκοι B, C εφάπτονται αλλά *δεν* αποτελούν διάσπαση του A. Το B περιέχει το σημείο 1 το οποίο είναι οριακό σημείο του C.



Σχήμα 7 Σχήμα 8 Σχήμα 9

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ένα σύνολο A χαρακτηρίζεται **συνεκτικό** αν δεν υπάρχει καμιά διάσπασή του, δηλαδή αν δεν υπάρχει κανένα ζευγάρι συνόλων B, C με τις ιδιότητες (i) - (iv) του παραπάνω ορισμού*

Παράδειγμα 2.4.4. Το A του παραδείγματος 2.4.1 καθώς και το A του παραδείγματος 2.4.2 είναι και τα δυο μη-συνεκτικά διότι για το καθένα υπάρχει συγκεκριμένη διάσπαση.
Δεν μπορούμε, όμως, να αποφασίσουμε αυτή τη στιγμή αν το A του παραδείγματος 2.4.3 είναι συνεκτικό ή όχι. Γνωρίζουμε ότι τα συγκεκριμένα B, C που αναφέρονται στο παράδειγμα δεν αποτελούν διάσπαση του A. *Για να είναι αποφασίσουμε ότι το A είναι συνεκτικό πρέπει να αποδείξουμε ότι, όχι μόνο το συγκεκριμένο ζευγάρι, αλλά ότι ένα οποιοδήποτε ζευγάρι συνόλων δεν αποτελεί διάσπαση του A.*

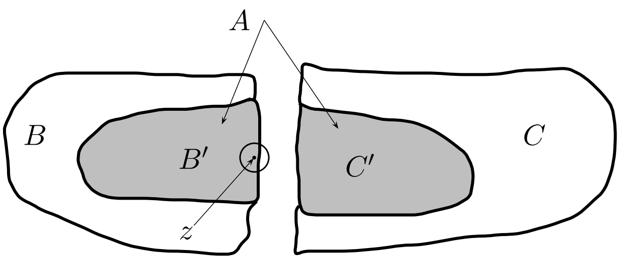
Παράδειγμα 2.4.5. Είναι προφανές ότι το $\emptyset$ αλλά και κάθε μονοσύνολο $\{z\}$ είναι συνεκτικό σύνολο. Τα σύνολα αυτά δεν έχουν καν διαμέριση αφού για να επιδέχεται ένα σύνολο διαμέριση πρέπει να έχει τουλάχιστον δυο στοιχεία.

ΛΗΜΜΑ 2.2. *Έστω σύνολα B, C ώστε $B \cap C = \emptyset$ και κανένα από τα B, C δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου. Αν το A είναι συνεκτικό και $A \subseteq B \cup C$, τότε είτε $A \subseteq B$ είτε $A \subseteq C$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε (Σχήμα 10)

$$B' = A \cap B, \qquad C' = A \cap C.$$

Προφανώς, είναι $B' \cup C' = A$ και $B' \cap C' = \emptyset$.
Τώρα, έστω $z \in B'$. Τότε $z \in B$, οπότε το z δεν είναι οριακό σημείο του C. Άρα υπάρχει $r > 0$ ώστε το C να μην τέμνει τον δίσκο $D(z;r)$ και τότε, επειδή $C' \subseteq C$, ούτε το C' τέμνει τον $D(z;r)$. Άρα το z δεν είναι οριακό σημείο ούτε του C'. Καταλήγουμε στο ότι το B' δεν περιέχει οριακό σημείο του C'. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι το C' δεν περιέχει οριακό σημείο του B'.

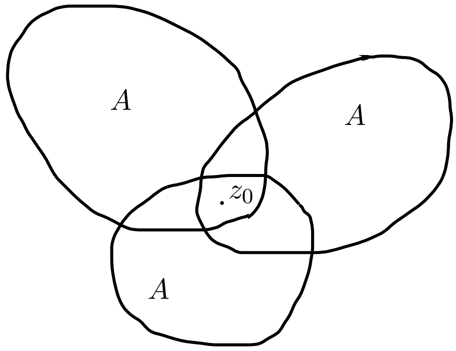


Σχήμα 10

Αν ήταν $B' \neq \emptyset$ και $C' \neq \emptyset$, τότε τα B', C' θα αποτελούσαν διάσπαση του A αλλά αυτό είναι αδύνατο, αφού το A είναι συνεκτικό. Άρα είτε $B' = \emptyset$ είτε $C' = \emptyset$ και, επομένως, είτε $A \subseteq C$ είτε $A \subseteq B$, αντιστοίχως. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.10. *Έστω μια συλλογή συνεκτικών συνόλων A και έστω ότι όλα τα σύνολα A της συλλογής έχουν ένα κοινό σημείο. Τότε η ένωση όλων των συνόλων A της συλλογής είναι συνεκτικό σύνολο.*

Απόδειξη. Ονομάζουμε A_0 την ένωση όλων των συνόλων A της συλλογής και θα αποδείξουμε ότι το A_0 είναι συνεκτικό σύνολο.



Σχήμα 11

Ονομάζουμε, επίσης, z_0 το κοινό σημείο όλων των A της συλλογής (Σχήμα 11).
Έστω ότι το A_0 δεν είναι συνεκτικό σύνολο, οπότε υπάρχουν σύνολα B, C ώστε $B \cup C = A_0$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$ και κανένα από τα B, C δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου.
Προφανώς, ισχύει $z_0 \in A_0$, οπότε $z_0 \in B$ ή $z_0 \in C$. Ας υποθέσουμε ότι $z_0 \in B$ (η απόδειξη είναι ίδια αν $z_0 \in C$).
Για κάθε σύνολο A της συλλογής ισχύει $A \subseteq A_0$ και, επομένως, $A \subseteq B \cup C$. Σύμφωνα με το Λήμμα 2.2, κάθε σύνολο A της συλλογής περιέχεται είτε στο B είτε στο C. Η δεύτερη περίπτωση αποκλείεται: αν ένα A περιείχετο στο C, δεν θα μπορούσε να περιέχει το κοινό σημείο z_0 το οποίο βρίσκεται στο B. Άρα, λοιπόν, κάθε σύνολο A της συλλογής περιέχεται στο B. Άρα και η ένωση A_0 των συνόλων A της συλλογής περιέχεται στο B. Δηλαδή $A_0 \subseteq B$ και καταλήγουμε σε άτοπο διότι το C είναι μη-κενό υποσύνολο του A.
Άρα το A_0 είναι συνεκτικό σύνολο. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.11. *Αν το A είναι συνεκτικό και $A \subseteq D \subseteq \overline{A}$, τότε και το D είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έστω ότι το D δεν είναι συνεκτικό, οπότε υπάρχουν σύνολα B, C ώστε $B \cup C = D$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$ και κανένα από τα B, C δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου.
Επειδή $A \subseteq D$, συνεπάγεται $A \subseteq B \cup C$. Επειδή το A είναι συνεκτικό, από το Λήμμα 2.2 συνεπάγεται $A \subseteq B$ ή $A \subseteq C$. Έστω $A \subseteq B$. (Η απόδειξη είναι ίδια αν $A \subseteq C$.)
Επειδή $D \subseteq \overline{A}$, κάθε σημείο του D είναι οριακό σημείο του A και, επομένως, οριακό σημείο και του B (αφού $A \subseteq B$). Άρα κανένα σημείο του D δεν ανήκει στο C (αφού το C δεν περιέχει οριακά σημεία του B). Αυτό είναι άτοπο διότι το C είναι μη-κενό υποσύνολο του D.
Άρα το D είναι συνεκτικό. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω σημεία a, b και $r > 0$. Κάθε πεπερασμένο σύνολο $\{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n\}$ με $z_0 = a$, $z_n = b$ και $|z_k - z_{k-1}| < r$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$ ονομάζεται **r-αλληλουχία σημείων που συνδέει τα** a, b (Σχήμα 12). Αν, επιπλέον, ισχύει $z_k \in A$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$, τότε λέμε ότι η r-αλληλουχία σημείων είναι στο A.*

Σχήμα 12

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3. *Έστω συμπαγές σύνολο K. Το K είναι συνεκτικό αν και μόνο αν για κάθε $z, w \in K$ και για κάθε $r > 0$ υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K η οποία συνδέει τα z, w.*

Απόδειξη. Έστω ότι το K είναι συνεκτικό.
Θεωρούμε οποιαδήποτε $z, w \in K$ και οποιονδήποτε $r > 0$ και θα αποδείξουμε ότι υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K που συνδέει τα z, w.
Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K που συνδέει τα z, w και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Ορίζουμε τα σύνολα

$$B = \{b \in K \,|\, \text{υπάρχει } r\text{-αλληλουχία σημείων στο } K \text{ που συνδέει τα } z, b\},$$

$$C = \{c \in K \,|\, \text{δεν υπάρχει } r\text{-αλληλουχία σημείων στο } K \text{ που συνδέει τα } z, c\}.$$

Είναι φανερό ότι $B \cup C = K$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$ (διότι $z \in B$) και $C \neq \emptyset$ (διότι $w \in C$).
Ας υποθέσουμε ότι το B περιέχει κάποιο οριακό σημείο, έστω b, του C. Τότε (επειδή $b \in B$) υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K που συνδέει τα z, b και, επίσης, (επειδή το b είναι οριακό σημείο του C) υπάρχει $c \in C$ ώστε $|c-b| < r$. Αν στην r-αλληλουχία σημείων του K που συνδέει τα z, b επισυνάψουμε (ως τελευταίο σημείο μετά το b) το c, τότε προκύπτει r-αλληλουχία σημείων του K που συνδέει τα z, c. Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι $c \in C$. Άρα *το B δεν περιέχει οριακό σημείο του C.*
Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι το C περιέχει κάποιο οριακό σημείο, έστω c, του B. Τότε (επειδή το c είναι οριακό σημείο του B) υπάρχει $b \in B$ ώστε $|c - b| < r$ και (επειδή $b \in B$) υπάρχει r-αλληλουχία σημείων του K που συνδέει τα z, b. Αν στην r-αλληλουχία σημείων του K που συνδέει τα z, b επισυνάψουμε (ως τελευταίο σημείο μετά το b) το c, τότε προκύπτει r-αλληλουχία σημείων του K που συνδέει τα z, c. Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι $c \in C$. Άρα *το C δεν περιέχει οριακό σημείο του B.*
Επιτέλους, από τις ιδιότητες των B, C προκύπτει ότι αυτά αποτελούν διάσπαση του K και αυτό είναι άτοπο διότι το K είναι συνεκτικό.
Άρα υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K που συνδέει τα z, w.

Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε $z, w \in K$ και για κάθε $r > 0$ υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K η οποία συνδέει τα z, w.
Υποθέτουμε ότι το K δεν είναι συνεκτικό και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Επειδή το K δεν είναι συνεκτικό, υπάρχουν σύνολα B, C ώστε $B \cup C = K$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$ και κανένα από τα B, C δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου.
Έστω z οριακό σημείο του B. Επειδή $B \subseteq K$, ο z είναι οριακό σημείο και του K. Επειδή το K είναι κλειστό σύνολο, συνεπάγεται $z \in K$. Επειδή $z \notin C$ (διότι το C δεν περιέχει οριακό σημείο του B) συνεπάγεται $z \in B$. Άρα το B περιέχει όλα τα οριακά σημεία του και, επομένως, είναι κλειστό σύνολο. Τέλος, επειδή $B \subseteq K$ και το K είναι φραγμένο, συνεπάγεται ότι το B είναι φραγμένο. Άρα το B, ως κλειστό και φραγμένο, είναι συμπαγές.
Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αποδεικνύεται ότι και το C είναι συμπαγές.
Συμπεραίνουμε ότι τα B, C είναι συμπαγή και ξένα, οπότε, από την Πρόταση 2.9, υπάρχει αριθμός $r > 0$ ώστε να ισχύει $|b - c| \geq r$ για κάθε $b \in B$ και $c \in C$. Αφού $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$, θεωρούμε κάποιον $z \in B$ και κάποιον $w \in C$. Τώρα, είναι εύκολο να δούμε ότι δεν υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο K που να συνδέει τα z, w, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.
Πράγματι, έστω ότι υπάρχει r-αλληλουχία $\{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n\}$ σημείων στο K ώστε $z_0 = z$, $z_n = w$ και $|z_k - z_{k-1}| < r$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Επειδή $z_0 \in B$, $z_n \in C$, συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιος k ώστε $z_{k-1} \in B$, $z_k \in C$. Τότε το $|z_k - z_{k-1}| < r$ αντιφάσκει με το ότι ισχύει $|b - c| \geq r$ για κάθε $b \in B$, $c \in C$. □

Παράδειγμα 2.4.6. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα $[a, b]$ είναι συμπαγές σύνολο και, αν πάρουμε δυο οποιαδήποτε σημεία z, w του $[a, b]$ και έναν οποιονδήποτε $r > 0$, είναι φανερό ότι μπορούμε να βρούμε πεπερασμένου πλήθους σημεία πάνω στο $[a, b]$, ξεκινώντας από το z και καταλήγοντας στο w, ώστε καθένα από αυτά να απέχει από τα γειτονικά του απόσταση $< r$. (Όσο μικρότερος είναι ο r τόσο περισσότερα σημεία πρέπει να πάρουμε.)
Άρα κάθε ευθύγραμμο τμήμα $[a, b]$ είναι συνεκτικό σύνολο.

Παράδειγμα 2.4.7. Από το παράδειγμα 2.4.6 και από την Πρόταση 2.10 συνεπάγεται ότι μια οποιαδήποτε πολυγωνική γραμμή $[z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \cdots \cup [z_{n-1}, z_n]$ είναι συνεκτικό σύνολο.
Πράγματι, τα ευθύγραμμα τμήματα $[z_0, z_1]$, $[z_1, z_2]$ είναι συνεκτικά σύνολα με ένα κοινό σημείο, τον z_1, οπότε η ένωσή τους $[z_0, z_1] \cup [z_1, z_2]$ είναι συνεκτικό σύνολο. Κατόπιν, το $[z_0, z_1] \cup [z_1, z_2]$ και το $[z_2, z_3]$ είναι συνεκτικά σύνολα με ένα κοινό σημείο, τον z_2, οπότε η ένωσή τους $[z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3]$ είναι συνεκτικό σύνολο. Συνεχίζουμε επαγωγικά μέχρι να αποδείξουμε ότι ολόκληρη η πολυγωνική γραμμή είναι συνεκτικό σύνολο.

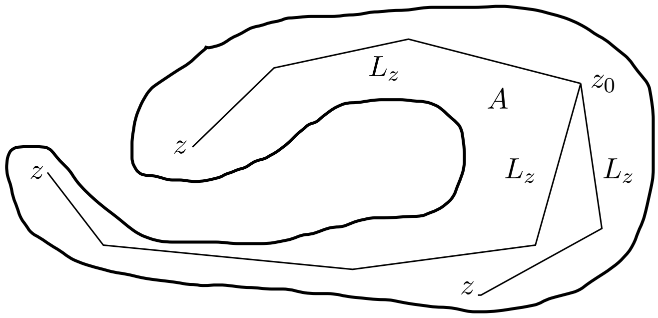
Παράδειγμα 2.4.8. Οποιοδήποτε διάστημα πάνω σε οποιαδήποτε ευθεία, ακόμη κι αν το διάστημα δεν περιέχει κάποιο από τα άκρα του ή κι αν δεν είναι φραγμένο (όλη η ευθεία, για παράδειγμα) είναι συνεκτικό.
Πράγματι, έστω I ένα διάστημα μιας ευθείας l. Είναι φανερό ότι μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία ευθύγραμμων τμημάτων $[a_n, b_n]$ τα οποία να αυξάνονται και η ένωσή τους να είναι το διάστημα I. Καθένα από αυτά τα ευθ. τμήματα είναι συνεκτικό, οπότε από την Πρόταση 2.10 συνεπάγεται ότι το διάστημα I είναι κι αυτό συνεκτικό.

Παράδειγμα 2.4.9. Όπως κάθε ευθύγραμμο τμήμα είναι συνεκτικό, έτσι και κάθε τόξο κύκλου είναι συνεκτικό.
Αν το τόξο περιέχει τα άκρα του, τότε είναι συμπαγές, οπότε μπορούμε να επαναλάβουμε τον συλλογισμό του παραδείγματος 2.4.6. Αν το τόξο δεν περιέχει κάποιο από τα άκρα του, τότε επαναλαμβάνουμε τον συλλογισμό του παραδείγματος 2.4.8 με μια ακολουθία τόξων που περιέχουν τα άκρα τους και τα οποία αυξάνονται και η ένωσή τους είναι το αρχικό τόξο.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ένα σύνολο A χαρακτηρίζεται* **πολυγωνικά συνεκτικό** *αν για κάθε δυο σημεία του A υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο A η οποία συνδέει τα δυο αυτά σημεία.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.12. *Κάθε πολυγωνικά συνεκτικό σύνολο είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έστω πολυγωνικά συνεκτικό σύνολο A και έστω οποιοδήποτε σημείο $z_0 \in A$.

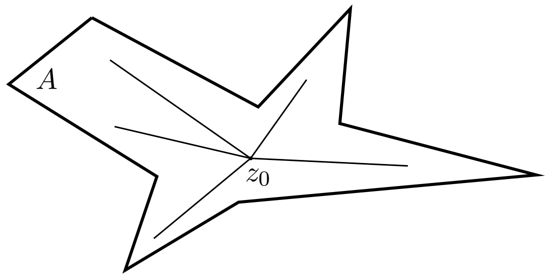


Σχήμα 13

Για κάθε $z \in A$ υπάρχει πολυγωνική γραμμή L_z (Σχήμα 13) η οποία περιέχεται στο A και συνδέει το z_0 με το z. Τότε, κατ' αρχάς, η ένωση όλων αυτών των πολυγωνικών γραμμών L_z περιέχεται στο A. Αντιστρόφως, επειδή κάθε $z \in A$ περιέχεται στην αντίστοιχη πολυγωνική γραμμή L_z και, επομένως, και στην ένωσή τους, συνεπάγεται ότι το A περιέχεται στην ένωση των πολυγωνικών γραμμών L_z.
Άρα το A ταυτίζεται με την ένωση όλων των πολυγωνικών γραμμών L_z.
Τώρα, επειδή κάθε πολυγωνική γραμμή L_z είναι συνεκτική και επειδή όλες έχουν κοινό σημείο το z_0, συνεπάγεται ότι η ένωσή τους, δηλαδή το A, είναι συνεκτική. □

Παράδειγμα 2.4.10. Κάθε κυρτό σύνολο A είναι πολυγωνικά συνεκτικό και, επομένως, συνεκτικό. Για παράδειγμα, κάθε δίσκος και κάθε ημιεπίπεδο είναι συνεκτικό σύνολο.
Πράγματι, αν πάρουμε δυο οποιαδήποτε σημεία του A το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει περιέχεται ολόκληρο στο A.

Παράδειγμα 2.4.11. Ένα σύνολο A χαρακτηρίζεται **αστρόμορφο** αν υπάρχει ένα συγκεκριμένο σημείο $z_0 \in A$ ώστε για κάθε $z \in A$ το ευθ. τμήμα $[z_0, z]$ να περιέχεται ολόκληρο στο A. Ένα τέτοιο z_0 χαρακτηρίζεται *κέντρο* του αστρόμορφου A (Σχήμα 14). Το κέντρο μπορεί να μην είναι μοναδικό, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι κάθε σημείο του αστρόμορφου A είναι κέντρο του.



Σχήμα 14

Είναι φανερό ότι ένα αστρόμορφο A είναι πολυγωνικά συνεκτικό και, επομένως, συνεκτικό. Πράγματι, δυο οποιαδήποτε σημεία του A μπορούν να συνδεθούν με μια πολυγωνική γραμμή στο A η οποία αποτελείται από δυο ευθύγραμμα τμήματα: ένα ευθ. τμήμα από το ένα σημείο στο z_0 και ένα ευθ. τμήμα από το z_0 στο άλλο σημείο.

Παράδειγμα 2.4.12. Κάθε δακτύλιος είναι συνεκτικό σύνολο.

Παράδειγμα 2.4.13. Έστω $A = \overline{D}(0; 1) \cup D(2; 1)$.
Είδαμε το σύνολο αυτό στο παράδειγμα 2.4.3 και τώρα μπορούμε να πούμε ότι το A είναι συνεκτικό, διότι είναι αστρόμορφο με κέντρο το σημείο 1.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4. *Ένα ανοικτό σύνολο είναι συνεκτικό αν και μόνο αν είναι πολυγωνικά συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έστω ανοικτό σύνολο U.
Αν το U είναι πολυγωνικά συνεκτικό, τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 2.12, είναι συνεκτικό.
Αντιστρόφως, έστω ότι το U είναι συνεκτικό.
Θεωρούμε οποιαδήποτε $z, w \in U$ και θα αποδείξουμε ότι υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο U η οποία συνδέει τα z, w.
Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει τέτοια πολυγωνική γραμμή και θα καταλήξουμε σε άτοπο.
Ορίζουμε τα σύνολα

$$B = \{b \in U \mid \text{υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο } U \text{ που συνδέει τα } z, b\},$$

$$C = \{c \in U \mid \text{δεν υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο } U \text{ που συνδέει τα } z, c\}.$$

Είναι φανερό ότι $B \cup C = U$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$ (διότι $z \in B$) και $C \neq \emptyset$ (διότι $w \in C$).
Υποθέτουμε ότι το B περιέχει κάποιο οριακό σημείο, έστω b, του C. Τότε (επειδή $b \in B$) υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο U η οποία συνδέει τα z, b. Επειδή το U είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(b; r) \subseteq U$ και (επειδή το b είναι οριακό σημείο του C) υπάρχει $c \in D(b; r) \cap C$. Αν στην πολυγωνική γραμμή στο U που συνδέει τα z, b επισυνάψουμε (ως τελευταίο) το ευθ. τμήμα $[b, c]$ (το οποίο περιέχεται στον δίσκο $D(b; r)$, οπότε και στο U), προκύπτει πολυγωνική γραμμή στο U που συνδέει τα z, c. Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι $c \in C$. Άρα *το B δεν περιέχει οριακό σημείο του C.*
Υποθέτουμε, τώρα, ότι το C περιέχει κάποιο οριακό σημείο, έστω c, του B. Επειδή το U είναι ανοικτό, υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(c; r) \subseteq U$. Τότε (επειδή το c είναι οριακό σημείο του B) υπάρχει $b \in D(c; r) \cap B$. Όπως πριν, (επειδή $b \in B$) υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο U που συνδέει τα z, b και, αν σ' αυτήν επισυνάψουμε (ως τελευταίο) το ευθ. τμήμα $[b, c]$ (το οποίο περιέχεται στον δίσκο $D(c; r)$, οπότε και στο U), προκύπτει πολυγωνική γραμμή στο U που συνδέει τα z, c. Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι $c \in C$. Άρα *το C δεν περιέχει οριακό σημείο του B.*
Από τις ιδιότητες των B, C προκύπτει ότι αυτά αποτελούν διάσπαση του U και αυτό είναι άτοπο διότι το U είναι συνεκτικό. Άρα υπάρχει πολυγωνική γραμμή στο U που συνδέει τα z, w. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ένα ανοικτό και συνεκτικό σύνολο χαρακτηρίζεται* **χωρίο** *ή* **τόπος**.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ένα $C \subseteq A$ χαρακτηρίζεται* ***συνεκτική συνιστώσα*** *του A αν το C είναι συνεκτικό σύνολο με την εξής ιδιότητα: αν $C \subseteq C' \subseteq A$ και το C' είναι συνεκτικό σύνολο, τότε $C = C'$.*

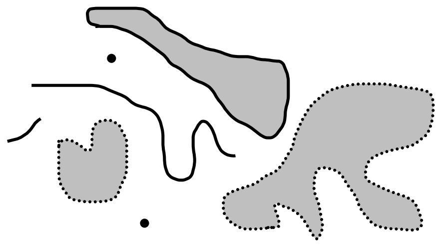
Με άλλα λόγια, το C είναι συνεκτική συνιστώσα του A αν *είναι συνεκτικό υποσύνολο του A και δεν υπάρχει γνησίως μεγαλύτερο συνεκτικό υποσύνολο του A.*

Ας δούμε μια χαρακτηριστική ιδιότητα των συνεκτικών συνιστωσών. Έστω ότι το C είναι συνεκτική συνιστώσα του A και έστω B οποιοδήποτε συνεκτικό υποσύνολο του A ώστε $C \cap B \neq \emptyset$. Τότε το $C \cup B$ είναι συνεκτικό σύνολο, ως ένωση συνεκτικών συνόλων με κοινό σημείο, και είναι $C \subseteq C \cup B \subseteq A$. Επειδή το C είναι συνεκτική συνιστώσα του A, συνεπάγεται $C \cup B = C$ και, επομένως, $B \subseteq C$. Με άλλα λόγια:

Μια συνεκτική συνιστώσα του A "καταπίνει" οποιοδήποτε συνεκτικό υποσύνολο του A την τέμνει.

Έστω C_1, C_2 δυο *διαφορετικές* συνεκτικές συνιστώσες του A και ας υποθέσουμε ότι $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Επειδή το C_1 είναι συνεκτικό υποσύνολο του A και τέμνει την συνεκτική συνιστώσα C_2 του A, συνεπάγεται $C_1 \subseteq C_2$. Με συμμετρικό τρόπο συνεπάγεται $C_2 \subseteq C_1$ και, επομένως, $C_1 = C_2$. Καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Συμπεραίνουμε ότι:

Διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του A είναι ξένες.



Σχήμα 15

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.13. *Κάθε σύνολο είναι ίσο με την ένωση των (ξένων ανά δύο) συνεκτικών συνιστωσών του (Σχήμα 15).*

Απόδειξη. Θεωρούμε σύνολο A και θα αποδείξουμε ότι κάθε σημείο του A ανήκει σε μια συνεκτική συνιστώσα του A.
Παίρνουμε $z \in A$ και ορίζουμε $C(z)$ να είναι η ένωση όλων των συνεκτικών υποσυνόλων B του A που περιέχουν το z. (Ένα τέτοιο σύνολο είναι το μονοσύνολο $\{z\}$.) Δηλαδή

$$C(z) = \bigcup \{B \mid B \text{ συνεκτικό } \subseteq A \text{ και } z \in B\}.$$

Το $C(z)$ είναι υποσύνολο του A, αφού είναι ένωση υποσυνόλων B του A. Το $C(z)$ περιέχει τον z και είναι συνεκτικό, διότι είναι ένωση συνεκτικών συνόλων B με κοινό σημείο τον z.
Τώρα, αν $C(z) \subseteq C' \subseteq A$ και το C' είναι συνεκτικό σύνολο, τότε το C' είναι ένα από τα συνεκτικά υποσύνολα B του A που περιέχουν το z, οπότε από τον ορισμό του $C(z)$ συνεπάγεται $C' \subseteq C(z)$ και, επομένως, $C(z) = C'$.
Άρα το $C(z)$ είναι συνεκτική συνιστώσα του A και περιέχει τον z. $\square$

Είναι προφανές ότι το σύνολο A είναι συνεκτικό αν και μόνο αν το A είναι η μοναδική συνεκτική συνιστώσα του A.

Παράδειγμα 2.4.14. Έστω $A = D(0;1) \cup D(3;1)$.
Οι δίσκοι $D(0;1)$ και $D(3;1)$ είναι συνεκτικά υποσύνολα του A.
Εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.2 με $B = D(0;1)$ και $C = D(3;1)$, βλέπουμε ότι οποιοδήποτε συνεκτικό υποσύνολο του A περιέχεται είτε ολόκληρο στο $D(0;1)$ είτε ολόκληρο στο $D(3;1)$. Δηλαδή δεν υπάρχει συνεκτικό υποσύνολο του A γνησίως μεγαλύτερο είτε του $D(0;1)$ είτε του $D(3;1)$. Άρα οι $D(0;1)$ και $D(3;1)$ είναι οι συνεκτικές συνιστώσες του A.

Παράδειγμα 2.4.15. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{Z}$ και οποιοδήποτε μονοσύνολο $\{n\}$ με $n \in \mathbb{Z}$.
Το $\{n\}$ είναι συνεκτικό σύνολο. Έστω $\{n\} \subseteq C' \subseteq \mathbb{Z}$ και $C' \neq \{n\}$. Τότε $C' = \{n\} \cup \big(C' \setminus \{n\}\big)$.
Τα $\{n\}$ και $C' \setminus \{n\}$ αποτελούν διάσπαση του C', αφού κανένα από τα δυο δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου. Άρα το C' δεν είναι συνεκτικό σύνολο. Επομένως, το $\{n\}$ είναι συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{Z}$.
Άρα το $\mathbb{Z}$ έχει άπειρες συνεκτικές συνιστώσες, όλες μονοσύνολα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.14. *Κάθε συνεκτική συνιστώσα ενός ανοικτού συνόλου είναι ανοικτό σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω συνεκτική συνιστώσα C του ανοικτού συνόλου U και έστω $z \in C$.
Τότε $z \in U$ και, επειδή το U είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(z; r) \subseteq U$. Επειδή ο δίσκος $D(z; r)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του U και τέμνει την συνεκτική συνιστώσα C του A, συνεπάγεται $D(z; r) \subseteq C$. Άρα το z είναι εσωτερικό σημείο του C.
Άρα το C είναι ανοικτό σύνολο. □

Άρα, σύμφωνα με τις Προτάσεις 2.13 και 2.14, κάθε ανοικτό σύνολο είναι ένωση ξένων ανά δύο χωρίων (δηλαδή ανοικτών και συνεκτικών συνόλων).

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.15. *Κάθε συνεκτική συνιστώσα ενός κλειστού συνόλου είναι κλειστό σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω συνεκτική συνιστώσα C του κλειστού συνόλου F.
Επειδή $C \subseteq F$ και το F είναι κλειστό και το $\overline{C}$ είναι το μικρότερο κλειστό υπερσύνολο του C, συνεπάγεται $C \subseteq \overline{C} \subseteq F$.
Από την Πρόταση 2.11, το $\overline{C}$ είναι συνεκτικό σύνολο και επειδή το C είναι συνεκτική συνιστώσα του F, συνεπάγεται $C = \overline{C}$. Άρα το C είναι κλειστό σύνολο. □

Ασκήσεις.

2.4.1. Ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι συνεκτικά; Για όποια σύνολα δεν είναι συνεκτικά προσδιορίστε τις συνεκτικές συνιστώσες τους.
[α] $\overline{D}(0; 1) \cup \overline{D}(3; 1) \cup [1, 2]$.
[β] $D(0; 1) \cup D(3; 1) \cup [1, 2]$.
[γ] $\mathbb{C} \setminus C(i; 2)$.
[δ] $\{z \,|\, |z - i| \geq |z|\}$.
[ε] $\{z \,|\, \mathrm{Re}\, z < 1\} \cup D(3 + i; 1)$.
[στ] $\mathbb{C} \setminus \big([1, 1 + i] \cup [1 + i, 2i]\big)$.
[ζ] $\mathbb{C} \setminus \big([1, 1 + i] \cup [1 + i, 2i] \cup [2i, 1]\big)$.
[η] $\bigcup_{n=1}^{+\infty} D(ni; \frac{1}{2})$.
[θ] $\{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
[ι] $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
[κ] $[0, 1] \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} [\frac{i}{n}, 1 + \frac{i}{n}]$.
[λ] $(0, 1] \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} [\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + i]$.
[μ] $(0, 1] \cup [0, i] \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} [\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + i]$.
[ν] $(0, 1] \cup [\frac{i}{2}, i] \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} [\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + i]$.
[ξ] $\bigcup_{n=1}^{+\infty} C(0; 1 + \frac{1}{n})$.
[ο] $\overline{D}(0; 1) \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} C(0; 1 + \frac{1}{n})$.
[π] $\mathbb{Q}$.
[ρ] $\{x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{Q}\}$.

2.4.2. [α] Έστω ανοικτό και συνεκτικό σύνολο U και $a \in U$. Αποδείξτε ότι το $U \setminus \{a\}$ είναι ανοικτό και συνεκτικό.

[β] Γενικεύστε το [α]. Έστω ανοικτό και συνεκτικό σύνολο U και $a_1, \dots, a_n \in U$. Αποδείξτε ότι το $U \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ είναι ανοικτό και συνεκτικό.

2.4.3. Έστω ότι για κάθε n το A_n είναι συνεκτικό σύνολο και έστω $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η ένωση $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ είναι συνεκτικό σύνολο.

2.4.4. Βρείτε απλό παράδειγμα δυο συνεκτικών συνόλων των οποίων η τομή *δεν* είναι συνεκτικό σύνολο.

2.4.5. [α] Βρείτε απλό παράδειγμα συνεκτικού συνόλου A ώστε το ∂A να μην είναι συνεκτικό.

[β] Βρείτε απλό παράδειγμα συνεκτικού συνόλου A ώστε το A^o να μην είναι συνεκτικό.

2.4.6. Έστω ανοικτό και συνεκτικό σύνολο U. Αποδείξτε ότι οποιαδήποτε δυο σημεία του U μπορούν να ενωθούν με πολυγωνική γραμμή στο U η οποία αποτελείται μόνο από οριζόντια και κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα.

2.4.7. Έστω ότι το A είναι συνεκτικό (όχι αναγκαστικά συμπαγές). Αποδείξτε ότι για κάθε $r > 0$ και για κάθε $z, w \in A$ υπάρχει r-αλληλουχία σημείων στο A η οποία συνδέει τα z, w.

2.4.8. (α) Έστω A κλειστό $\subseteq \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι το A είναι συνεκτικό αν και μόνο αν δεν υπάρχουν B, C κλειστά ώστε $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$, $B, C \neq \emptyset$.
(β) Έστω A ανοικτό $\subseteq \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι το A είναι συνεκτικό αν και μόνο αν δεν υπάρχουν B, C ανοικτά ώστε $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$, $B, C \neq \emptyset$.

2.4.9. Έστω ανοικτό σύνολο U. Αποδείξτε ότι το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών του U είναι αριθμήσιμο (δηλαδή είτε πεπερασμένο είτε άπειρο αριθμήσιμο).

2.4.10. Βρείτε όλα τα σύνολα A που είναι ανοικτά και, συγχρόνως, κλειστά.

Κεφάλαιο 3

Όρια και συνέχεια συναρτήσεων.

3.1 Όρια συναρτήσεων.

Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ και

$$f : A \to \mathbb{C}.$$

Η f χαρακτηρίζεται **μιγαδική συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής**. Αν είναι $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ ή, ισοδύναμα, αν ισχύει $f(z) \in \mathbb{R}$ για κάθε $z \in A$, τότε η f χαρακτηρίζεται **πραγματική συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής**. Κάθε μιγαδική συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$ καθορίζει δυο πραγματικές συναρτήσεις, τις

$$\operatorname{Re} f : A \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{Im} f : A \to \mathbb{R}$$

με τύπους

$$(\operatorname{Re} f)(z) = \operatorname{Re}(f(z)) = \frac{f(z) + \overline{f(z)}}{2}, \qquad (\operatorname{Im} f)(z) = \operatorname{Im}(f(z)) = \frac{f(z) - \overline{f(z)}}{2i}.$$

Η $\operatorname{Re} f$ ονομάζεται **πραγματικό μέρος** της f και η $\operatorname{Im} f$ ονομάζεται **φανταστικό μέρος** της f. Επίσης, μια μιγαδική συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$ ορίζει τη λεγόμενη **συζυγή συνάρτηση**

$$\overline{f} : A \to \mathbb{C}$$

με τύπο

$$\overline{f}(z) = \overline{f(z)}.$$

Οι σχέσεις

$$\operatorname{Re} f = \frac{f + \overline{f}}{2}, \quad \operatorname{Im} f = \frac{f - \overline{f}}{2i}, \quad f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f, \quad \overline{f} = \operatorname{Re} f - i \operatorname{Im} f$$

είναι προφανείς.

Όπως, αντί να γράφουμε $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$ προτιμάμε να γράφουμε $z = x + iy$, υπονοώντας ότι $x, y \in \mathbb{R}$ και, επομένως, ότι $x = \operatorname{Re} z$ και $y = \operatorname{Im} z$, έτσι και στην περίπτωση των τιμών $f(z)$ προτιμάμε να γράφουμε

$$f(z) = u(z) + iv(z)$$

υπονοώντας ότι $u(z), v(z) \in \mathbb{R}$ και, επομένως, ότι $u(z) = \operatorname{Re}(f(z))$ και $v(z) = \operatorname{Im}(f(z))$. Επίσης, θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα τους διπλούς συμβολισμούς

$$z = x + iy = (x, y), \qquad f = u + iv = (u, v)$$

και, φυσικά, τους πιο αναλυτικούς

$$f(z) = u(z)+iv(z) = (u(z), v(z)), \quad f(x+iy) = u(x+iy)+iv(x+iy) = (u(x+iy), v(x+iy)),$$

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = (u(x, y), v(x, y)).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ο z χαρακτηρίζεται* **σημείο συσσώρευσης** *του A αν για κάθε $r > 0$ ισχύει $D(z; r) \cap (A \setminus \{z\}) \neq \emptyset$.*

Η έννοια του σημείου συσσώρευσης είναι *ισχυρότερη* από την έννοια του οριακού σημείου. Αν το z είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε κάθε r-περιοχή του z τέμνει το A σε ένα τουλάχιστον σημείο *διαφορετικό* από το ίδιο το z, οπότε κάθε r-περιοχή του z τέμνει το A σε ένα τουλάχιστον σημείο και, επομένως, το z είναι οριακό σημείο του A. Δηλαδή,

Αν το z είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε είναι οριακό σημείο του A.

Για το αντίστροφο διακρίνουμε δυο περιπτώσεις. Αν το z *δεν ανήκει στο* A και είναι οριακό σημείο του A, τότε κάθε r-περιοχή του z τέμνει το A σε ένα τουλάχιστον σημείο και αυτό το σημείο είναι αναγκαστικά διαφορετικό από το ίδιο το z (αφού το z δεν ανήκει στο A), οπότε κάθε r-περιοχή του z τέμνει το A σε ένα τουλάχιστον σημείο *διαφορετικό* από το ίδιο το z και, επομένως, το z είναι σημείο συσσώρευσης του A. Δηλαδή,

Αν το $z \notin A$ είναι οριακό σημείο του A, τότε είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Η δεύτερη περίπτωση είναι όταν το z *ανήκει στο* A και είναι οριακό σημείο του A. Τότε, αν το z *δεν* είναι σημείο συσσώρευσης του A υπάρχει κάποια r-περιοχή του z η οποία τέμνει το A (διότι το z είναι οριακό σημείο του A) μόνο στο ίδιο το z, δηλαδή το μοναδικό σημείο του A μέσα σ' αυτήν την r-περιοχή είναι το ίδιο το κέντρο z. Για μια τέτοια περίπτωση έχουμε ένα ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ο z χαρακτηρίζεται* **μεμονωμένο σημείο** *του A αν $z \in A$ και υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(z; r) \cap A = \{z\}$.*

Άρα είδαμε ότι:

Αν το $z \in A$ είναι οριακό σημείο του A, τότε είτε είναι σημείο συσσώρευσης του A είτε είναι μεμονωμένο σημείο του A.

Είναι, φυσικά, προφανές ότι οι έννοιες "σημείο συσσώρευσης" και "μεμονωμένο σημείο" αλληλοαποκλείονται.

Συνοψίζουμε:

Ένα z είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν είναι οριακό σημείο του A, εκτός από την ειδική περίπτωση που το z ανήκει στο A και είναι μεμονωμένο σημείο του A (οπότε είναι οριακό σημείο αλλά όχι σημείο συσσώρευσης του A).

Παράδειγμα 3.1.1. Αν το A είναι ένας κλειστός ή ανοικτός δίσκος, τότε το σύνολο των σημείων συσσώρευσής του είναι το ίδιο με το σύνολο των οριακών σημείων του, δηλαδή ο αντίστοιχος κλειστός δίσκος (εσωτερικά σημεία μαζί με συνοριακά σημεία).

Παράδειγμα 3.1.2. Αν $A = D(0; 1) \cup \{2\}$ (δηλαδή ένας δίσκος, ανοικτός ή κλειστός, μαζί με ένα σημείο μακρυά από τον δίσκο), τότε το σημείο 2 είναι μεμονωμένο σημείο του A και το σύνολο των οριακών σημείων του A είναι το $\overline{D}(0; 1) \cup \{2\}$ (εσωτερικά σημεία μαζί με συνοριακά σημεία, όπου το 2 είναι συνοριακό αλλά όχι εσωτερικό σημείο) και το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του A είναι το $\overline{D}(0; 1)$.

Και να πούμε δυο λόγια για την περίπτωση του σημείου $z = \infty$. Έχουμε ήδη πει (βάσει των περιοχών του ∞, όπως αυτές έχουν οριστεί) ότι αν το σύνολο A είναι φραγμένο, τότε το ∞ δεν μπορεί να θεωρηθεί οριακό σημείο του A. Άρα, σ' αυτήν την περίπτωση, το ∞ δεν μπορεί να θεωρηθεί ούτε σημείο συσσώρευσης του A. Επίσης, αν το A δεν είναι φραγμένο, τότε το ∞ θεωρείται ως ένα επιπλέον οριακό σημείο του A στο $\widehat{\mathbb{C}}$ και, επειδή $\infty \notin A$ (διότι το A είναι υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου $\mathbb{C}$), το ∞ είναι και ένα επιπλέον σημείο συσσώρευσης του A στο $\widehat{\mathbb{C}}$. Δηλαδή,

Αν το A είναι φραγμένο, τότε το ∞ δεν είναι σημείο συσσώρευσης (ούτε οριακό σημείο ούτε συνοριακό σημείο) του A στο $\widehat{\mathbb{C}}$. Αν το A δεν είναι φραγμένο, τότε το ∞ είναι σημείο συσσώρευσης (και οριακό σημείο και συνοριακό σημείο) του A στο $\widehat{\mathbb{C}}$.

Χρειαζόμαστε την έννοια του σημείου συσσώρευσης για τον ορισμό της γνωστής έννοιας του ορίου. Όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή z μιας συνάρτησης f τείνει στο σημείο z_0 θέλουμε να παίρνει τιμές μέσα από το πεδίο ορισμού A της f που να έρχονται όσο θέλουμε κοντά στο z_0 αλλά να είναι και διαφορετικές από το ίδιο το z_0. Αυτό σημαίνει ότι θέλουμε σε οσοδήποτε μικρή περιοχή του z_0 να υπάρχουν σημεία του A διαφορετικά από το ίδιο το z_0 και, επομένως, θέλουμε το z_0 να είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Θεωρούμε γνωστό τον παρακάτω ορισμό του ορίου.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι το $w_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ είναι* **όριο** *της f στο z_0 ή ότι η f έχει όριο w_0 στο z_0 αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(z) \in D(w_0; \epsilon)$ για κάθε $z \in D(z_0; \delta) \cap (A \setminus \{z_0\})$. Σ' αυτήν την περίπτωση συμβολίζουμε*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \qquad \text{ή} \qquad f(z) \to w_0 \ \text{όταν} \ z \to z_0.$$

Το ότι "ισχύει $f(z) \in D(w_0; \epsilon)$ για κάθε $z \in D(z_0; \delta) \cap (A \setminus \{z_0\})$" σημαίνει, σε κάπως πιο γεωμετρική γλώσσα, ότι "η f απεικονίζει ολόκληρο το μέρος του A που βρίσκεται μέσα στην δ-περιοχή του z_0, εκτός από το z_0, μέσα στην ϵ-περιοχή του w_0".

Εξειδικεύουμε τον ορισμό στις εξής τέσσερις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$.
Το $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z) - w_0| < \epsilon$ για κάθε $z \in A$ με $0 < |z - z_0| < \delta$.

Περίπτωση 2. $z_0 \in \mathbb{C}$, $w_0 = \infty$.
Το $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ σημαίνει ότι για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z)| > M$ για κάθε $z \in A$ με $0 < |z - z_0| < \delta$.

Περίπτωση 3. $z_0 = \infty$, $w_0 \in \mathbb{C}$.
Το $\lim_{z \to \infty} f(z) = w_0$ σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z) - w_0| < \epsilon$ για κάθε $z \in A$ με $|z| > N$.

Περίπτωση 4. $z_0 = w_0 = \infty$.
Το $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$ σημαίνει ότι για κάθε $M > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z)| > M$ για κάθε $z \in A$ με $|z| > N$.

Έστω $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$. Αν $w_0 \in \mathbb{C}$, τότε λέμε ότι η f **συγκλίνει** στο w_0 και, αν $w_0 = \infty$, τότε λέμε ότι η f **αποκλίνει** στο ∞. Σε κάθε περίπτωση λέμε ότι η f **έχει όριο** w_0 και ότι το w_0 **είναι όριο** της f. Αν η f δεν έχει κανένα όριο καθώς ο z τείνει στο z_0, τότε λέμε ότι η f **αποκλίνει**.

Σ' αυτό το μάθημα θα θεωρήσουμε ότι είμαστε εξοικειωμένοι με όλα τα παραπάνω από προηγούμενα μαθήματα. Θα θυμηθούμε, επίσης, κάποια χαρακτηριστικά αποτελέσματα χωρίς αποδείξεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1. *Αν υπάρχει το όριο μιας συνάρτησης (σε κάποιο σημείο), τότε αυτό το όριο είναι μοναδικό.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Έστω $f = u + iv$, όπου $u, v : A \to \mathbb{R}$ είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f.*
[α] *Αν $w_0 = u_0 + iv_0 \in \mathbb{C}$, τότε:*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad \lim_{z \to z_0} u(z) = u_0, \quad \lim_{z \to z_0} v(z) = v_0.$$

[β] *Αν $w_0 = \infty$, τότε:*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad \lim_{z \to z_0} |f(z)| = \lim_{z \to z_0} \sqrt{u(z)^2 + v(z)^2} = +\infty.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.3. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ σημείο συσσώρευσης του A. Στα παρακάτω θεωρούμε ότι $z \to z_0$.*

[α] *Αν* $f(z) \to p_0$ *και* $g(z) \to q_0$ *και το* $p_0 \pm q_0$ *δεν αποτελεί απροσδιόριστη μορφή (δηλαδή δεν είναι και τα δυο* p_0, q_0 *ίσα με* ∞*), τότε*

$$f(z) \pm g(z) \to p_0 \pm q_0.$$

[β] *Αν* $f(z) \to p_0$ *και* $g(z) \to q_0$ *και το* $p_0 q_0$ *δεν αποτελεί απροσδιόριστη μορφή (δηλαδή δεν είναι το ένα από τα* p_0, q_0 *ίσο με* 0 *και το άλλο* ∞*), τότε*

$$f(z)g(z) \to p_0 q_0.$$

[γ] *Αν* $f(z) \to p_0$*, τότε*

$$\tfrac{1}{f(z)} \to \tfrac{1}{p_0}.$$

[δ] *Αν* $f(z) \to p_0$ *και* $g(z) \to q_0$ *και το* $\frac{p_0}{q_0}$ *δεν αποτελεί απροσδιόριστη μορφή (δηλαδή δεν είναι και τα δυο* p_0, q_0 *ίσα με* ∞ *ούτε και τα δυο ίσα με* 0*), τότε*

$$\tfrac{f(z)}{g(z)} \to \tfrac{p_0}{q_0}.$$

[ε] *Αν* $f(z) \to p_0$*, τότε*

$$|f(z)| \to |p_0|.$$

[στ] *Αν* $f(z) \to p_0$*, τότε*

$$\overline{f(z)} \to \overline{p_0}.$$

Τα επόμενα παραδείγματα είναι κι αυτά γνωστά.

Παράδειγμα 3.1.3. Έστω πολυωνυμική συνάρτηση

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

όπου $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ και $a_n \neq 0$. Το πεδίο ορισμού της p είναι το $\mathbb{C}$.
Για κάθε $z_0 \in \mathbb{C}$ είναι

$$\lim_{z \to z_0} p(z) = p(z_0).$$

Αυτό αποδεικνύεται με πολλαπλή εφαρμογή των κανόνων αθροίσματος και γινομένου στα στοιχειώδη όρια $\lim_{z \to z_0} c = c$ και $\lim_{z \to z_0} z = z_0$.
Αν η πολυωνυμική συνάρτηση είναι βαθμού ≥ 1, δηλαδή αν $n \geq 1$ και $a_n \neq 0$, τότε

$$\lim_{z \to \infty} p(z) = \infty.$$

Αυτό αποδεικνύεται αφού πρώτα γράψουμε

$$p(z) = z^n \big(a_n + a_{n-1} \tfrac{1}{z} + \cdots + a_0 \tfrac{1}{z^n}\big)$$

και δούμε ότι το όριο της παρένθεσης είναι a_n και ότι το όριο του z^n είναι ∞. Το όριο της παρένθεσης προκύπτει με εφαρμογή των κανόνων αθροίσματος και γινομένου και από το ότι $\frac{1}{z} \to 0$ όταν $z \to \infty$. Το όριο του z^n προκύπτει από το ότι $|z^n| = |z|^n \to +\infty$ όταν $z \to \infty$ (επειδή $|z| \to +\infty$) ή από τον κανόνα γινομένου: $z^n = z \cdots z \to \infty \cdots \infty = \infty$.

Παράδειγμα 3.1.4. Έστω ρητή συνάρτηση

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \cdots + b_1 z + b_0},$$

όπου $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{C}$ και $a_n \neq 0$ και $b_m \neq 0$. Το πεδίο ορισμού της r είναι το $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$, όπου $z_1, \ldots, z_k$ είναι οι ρίζες της πολυωνυμικής συνάρτησης q. Είναι γνωστό ότι $0 \leq k \leq m$. Τότε, κατ' αρχάς:

$$\lim_{z \to \infty} r(z) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } n > m \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{αν } n = m \\ 0, & \text{αν } n < m \end{cases}$$

Όλα αποδεικνύονται γράφοντας

$$r(z) = z^{n-m}\big(a_n + a_{n-1}\tfrac{1}{z} + \cdots + a_0\tfrac{1}{z^n}\big)\big/\big(b_m + b_{m-1}\tfrac{1}{z} + \cdots + b_0\tfrac{1}{z^m}\big).$$

Αν $z_0 \in \mathbb{C}$ και $q(z_0) \neq 0$, τότε με εφαρμογή του κανόνα λόγου:

$$\lim_{z\to z_0} r(z) = r(z_0).$$

Τέλος, έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ και $q(z_0) = 0$. Τότε το πολυώνυμο $z - z_0$ διαιρεί το πολυώνυμο $q(z)$, οπότε υπάρχει $k \geq 1$ και πολυώνυμο $q_1(z)$ ώστε για κάθε z να είναι

$$q(z) = (z - z_0)^k q_1(z) \qquad \text{και} \qquad q_1(z_0) \neq 0.$$

Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι η **πολλαπλότητα** της ρίζας z_0 του $q(z)$ είναι k. Επίσης, είτε $p(z_0) = 0$ είτε $p(z_0) \neq 0$, υπάρχει $l \geq 0$ και πολυώνυμο $p_1(z)$ ώστε για κάθε z να είναι

$$p(z) = (z - z_0)^l p_1(z) \qquad \text{και} \qquad p_1(z_0) \neq 0.$$

Πράγματι, αν $p(z_0) = 0$, τότε το $l \geq 1$ είναι η πολλαπλότητα του z_0 ως ρίζα του $p(z)$ και, αν $p(z_0) \neq 0$, τότε θεωρούμε $l = 0$ (και λέμε ότι η πολλαπλότητα του z_0 ως ρίζα του $p(z)$ είναι μηδέν) και $p_1(z) = p(z)$. Άρα για κάθε z διαφορετικό από τις ρίζες του $q(z)$ ισχύει

$$r(z) = (z - z_0)^{l-k}\frac{p_1(z)}{q_1(z)} \qquad \text{και} \qquad p_1(z_0) \neq 0, \;\; q_1(z_0) \neq 0.$$

Το $\frac{p_1(z_0)}{q_1(z_0)}$ δεν είναι ούτε ∞ ούτε 0, οπότε

$$\lim_{z\to z_0} r(z) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } k > l \\ \frac{p_1(z_0)}{q_1(z_0)}, & \text{αν } k = l \\ 0, & \text{αν } k < l \end{cases}$$

Έχουμε, επίσης, τον γνωστό κανόνα σύνθεσης για τον υπολογισμό ορίων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.4. *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{C}$, z_0 σημείο συσσώρευσης του A, w_0 σημείο συσσώρευσης του B, $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ και έστω ότι υπάρχει το $\lim_{w\to w_0} g(w)$. Υποθέτουμε, επίσης, ότι ισχύει $f(z) \neq w_0$ για κάθε $z \in A$ κοντά στο z_0. Τότε*

$$\lim_{z\to z_0} g\big(f(z)\big) = \lim_{w\to w_0} g(w).$$

Τέλος, έχουμε την ισοδύναμη διατύπωση του ορίου συνάρτησης μέσω της έννοιας του ορίου ακολουθίας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.5. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και z_0 σημείο συσσώρευσης του A. Τότε είναι $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (z_n) στο A για την οποία ισχύει $z_n \to z_0$ και $z_n \neq z_0$ για κάθε n συνεπάγεται $f(z_n) \to w_0$.*

Ασκήσεις.

3.1.1. Ποιά από τα $\lim_{z\to 0} \mathrm{Re}\, z$, $\lim_{z\to\infty} \mathrm{Re}\, z$, $\lim_{z\to 0} \frac{z}{|z|}$, $\lim_{z\to\infty} \frac{z}{|z|}$ υπάρχουν;

3.1.2. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το $\lim_{z\to 0} f(z) = w_0$ και ότι ισχύει $f(\frac{i}{n}) = \frac{(-1)^n}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Βρείτε το w_0.

3.1.3. Έστω $f, g : D(0;1) \to \mathbb{C}$ και $g(z) = f(-iz)$ για κάθε $z \in D(0;1)$. Αποδείξτε ότι $\lim_{z\to 0} f(z) = w_0$ αν και μόνο αν $\lim_{z\to 0} g(z) = w_0$.

3.1.4. Αποδείξτε με κάθε λεπτομέρεια ότι $\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$ αν και μόνο αν $\lim_{z\to 0} f(\frac{1}{z}) = w_0$.

3.1.5. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ώστε $f(\frac{1}{n}) - f(-\frac{1}{n}) = (-1)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υπάρχει το $\lim_{z\to 0} f(z)$; Είναι δυνατό να είναι η f ρητή; Υπάρχει τέτοια συνάρτηση f;

3.2 Συνέχεια συναρτήσεων.

Όλα όσα είναι σ' αυτήν την ενότητα θεωρούνται κι αυτά γνωστά από προηγούμενα μαθήματα.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in A$ (οπότε $z_0 \in \mathbb{C}$). Η f χαρακτηρίζεται* ***συνεχής*** *στο z_0 αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $f(z) \in D(f(z_0); \epsilon)$ για κάθε $z \in D(z_0; \delta) \cap A$ ή, ισοδύναμα, ώστε να ισχύει $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ για κάθε $z \in A$ με $|z - z_0| < \delta$.*

Το ότι "ισχύει $f(z) \in D(f(z_0); \epsilon)$ για κάθε $z \in D(z_0; \delta) \cap A$" σημαίνει, σε γεωμετρική γλώσσα, ότι "η f απεικονίζει ολόκληρο το μέρος του A που βρίσκεται μέσα στην δ-περιοχή του z_0 μέσα στην ϵ-περιοχή του $f(z_0)$".

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1. Έστω ότι ο z_0 είναι μεμονωμένο σημείο του A, δηλαδή ότι υπάρχει $r_0 > 0$ ώστε $D(z_0; r_0) \cap A = \{z_0\}$.

Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ επιλέγουμε $\delta = r_0 > 0$ και τότε για κάθε $z \in A$ με $|z - z_0| < \delta = r_0$, *δηλαδή για* $z = z_0$, ισχύει $|f(z) - f(z_0)| = |f(z_0) - f(z_0)| = 0 < \epsilon$. Άρα η f είναι συνεχής στον z_0. Συνοψίζουμε:

Αν ο z_0 είναι μεμονωμένο σημείο του A, τότε η f είναι (αυτομάτως) συνεχής στον z_0.

Περίπτωση 2. Έστω ότι ο z_0 δεν είναι μεμονωμένο σημείο του A ή, ισοδύναμα, ότι είναι σημείο συσσώρευσης του A.

Έστω ότι η f είναι συνεχής στον z_0. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ για κάθε $z \in A$ με $|z - z_0| < \delta$. Προφανώς, συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ για κάθε $z \in A$ με $0 < |z - z_0| < \delta$. Άρα $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Αντιστρόφως, έστω $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ για κάθε $z \in A$ με $0 < |z - z_0| < \delta$. Παρατηρούμε ότι για $z = z_0$ έτσι κι αλλιώς ισχύει $|f(z) - f(z_0)| = |f(z_0) - f(z_0)| = 0 < \epsilon$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ για κάθε $z \in A$ με $|z - z_0| < \delta$. Άρα η f είναι συνεχής στον z_0. Συνοψίζουμε:

Αν ο z_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A, τότε η f είναι συνεχής στον z_0 αν και μόνο αν

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Στην πράξη, η περίπτωση μεμονωμένου σημείου του πεδίου ορισμού συνάρτησης είναι αρκετά σπάνια, οπότε θα αντιμετωπίζουμε περιπτώσεις όπου η συνέχεια μιας συνάρτησης σε σημείο του πεδίου ορισμού της ισοδυναμεί με το ότι το όριό της στο σημείο αυτό είναι ίσο με την τιμή της στο ίδιο σημείο.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η $f : A \to \mathbb{C}$ χαρακτηρίζεται* ***συνεχής στο πεδίο ορισμού της*** *ή, απλώς,* ***συνεχής*** *αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A.*

Παράδειγμα 3.2.1. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση p είναι συνεχής (δηλαδή, συνεχής στο $\mathbb{C}$). Πράγματι, ισχύει $\lim_{z \to z_0} p(z) = p(z_0)$ για κάθε z_0.

Κάθε ρητή συνάρτηση r είναι συνεχής, διότι ισχύει $\lim_{z \to z_0} r(z) = r(z_0)$ για κάθε z_0 στο πεδίο ορισμού της r, δηλαδή για κάθε z_0 που δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου στον παρονομαστή της r.

Οι επόμενες προτάσεις είναι κι αυτές γνωστές.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.6. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in A$. Έστω $f = u + iv$, όπου $u, v : A \to \mathbb{R}$ είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f. Τότε η f είναι συνεχής στο z_0 αν και μόνο αν οι u, v είναι και οι δυο συνεχείς στο z_0.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.7. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in A$. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο z_0, τότε και οι $f + g, f - g, fg, |f|, \overline{f} : A \to \mathbb{C}$ είναι συνεχείς στο z_0. Αν, επιπλέον, ισχύει $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in A$, τότε και η $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο z_0.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.8. *Έστω $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{C}$, $z_0 \in A$ και $w_0 = f(z_0) \in B$. Αν η f είναι συνεχής στο z_0 και η g είναι συνεχής στο w_0, τότε η $g \circ f : A \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο z_0.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.9. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in A$. Τότε η f είναι συνεχής στο z_0 αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (z_n) στο A για την οποία ισχύει $z_n \to z_0$ συνεπάγεται $f(z_n) \to f(z_0)$.*

Ασκήσεις.

3.2.1. Ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο 0;

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\mathrm{Re}\, z}{1+|z|}, & \text{αν } z \neq 0 \\ 0, & \text{αν } z = 0 \end{cases} \qquad f(z) = \begin{cases} \frac{(\mathrm{Re}\, z)^2}{|z|}, & \text{αν } z \neq 0 \\ 0, & \text{αν } z = 0 \end{cases} \qquad f(z) = \begin{cases} \frac{\mathrm{Re}\,(z^2)}{|z|^2}, & \text{αν } z \neq 0 \\ 0, & \text{αν } z = 0 \end{cases}$$

3.2.2. Υπάρχει $f : \overline{D}(0;1) \to \mathbb{C}$ συνεχής στο $\overline{D}(0;1)$ ώστε να ισχύει $f(1-\frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $|f(z)| < 1$ για κάθε $z \in \overline{D}(0;1)$;

3.2.3. Έστω $f : \overline{D}(0;1) \to \mathbb{C}$ συνεχής στο $\overline{D}(0;1)$ ώστε να ισχύει $|f(z)| < 3$ για κάθε $z \in \overline{D}(0;1)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $M < 3$ ώστε να ισχύει $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in \overline{D}(0;1)$.

3.2.4. [α] Έστω ανοικτό A και $f : A \to \mathbb{C}$ συνεχής στο A. Αν το U είναι ανοικτό, αποδείξτε ότι το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό.

[β] Έστω κλειστό A και $f : A \to \mathbb{C}$ συνεχής στο A. Αν το F είναι κλειστό, αποδείξτε ότι το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό.

3.3 Συνεχείς συναρτήσεις και συμπαγή σύνολα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ συνεχής στο A. Αν το A είναι συμπαγές, τότε το $f(A)$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω οποιαδήποτε ακολουθία (w_n) στο $f(A)$. Τότε για κάθε n είναι $w_n \in f(A)$, οπότε υπάρχει $z_n \in A$ ώστε $f(z_n) = w_n$. Έτσι δημιουργείται ακολουθία (z_n) στο A. Επειδή το A είναι συμπαγές σύνολο, υπάρχει τουλάχιστον μια υποακολουθία (z_{n_k}) της (z_n) η οποία συγκλίνει σε σημείο, έστω z_0, του A. Δηλαδή,

$$z_{n_k} \to z_0 \in A.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο z_0, συνεπάγεται

$$w_{n_k} = f(z_{n_k}) \to f(z_0) \in f(A).$$

Άρα η (w_n) έχει μια υποακολουθία, την (w_{n_k}), η οποία συγκλίνει σε σημείο του $f(A)$. Αποδείξαμε ότι κάθε ακολουθία στο $f(A)$ έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία η οποία συγκλίνει σε σημείο του $f(A)$. Άρα το $f(A)$ είναι συμπαγές σύνολο. □

Ένα πρώτο πόρισμα του Θεωρήματος 3.1 είναι το εξής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.10. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ συνεχής στο A. Αν το A είναι συμπαγές, τότε η f είναι φραγμένη στο A.*

Απόδειξη. Το σύνολο τιμών $f(A)$ είναι συμπαγές, οπότε είναι φραγμένο. Αυτό σημαίνει ότι η f είναι φραγμένη στο A. □

ΛΗΜΜΑ 3.1. *Κάθε συμπαγές σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}$ έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο.*

Απόδειξη. Το K είναι κλειστό και φραγμένο. Επειδή το K είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, συνεπάγεται ότι το supremum του και το infimum του είναι (πραγματικοί) αριθμοί.
Έστω $u = \sup K$. Τότε, για κάθε n, ο $u - \frac{1}{n}$ δεν είναι άνω φράγμα του K, οπότε υπάρχει $u_n \in K$ ώστε $u - \frac{1}{n} < u_n \leq u$. Τότε η ακολουθία (u_n) είναι στο K και $u_n \to u$. Άρα ο u είναι οριακό σημείο του K και, επειδή το K είναι κλειστό σύνολο, συνεπάγεται $u \in K$. Άρα ο u είναι το supremum του K και ανήκει στο K, οπότε είναι το μέγιστο στοιχείο του K.
Με τον ίδιο τρόπο, με το infimum του K, αποδεικνύεται ότι το K έχει ελάχιστο στοιχείο. □

Μετά από το Λήμμα 3.1 έχουμε ένα ακόμη πόρισμα του Θεωρήματος 3.1.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.11. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο A. Αν το A είναι συμπαγές, τότε η f έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο A.*

Απόδειξη. Επειδή το A είναι συμπαγές, το $f(A)$ είναι, επίσης, συμπαγές. Επειδή το $f(A)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$, έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο, τα οποία είναι, φυσικά, η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της f στο A. □

Παρατηρούμε ότι μια ειδική περίπτωση της Πρότασης 3.11 είναι το γνωστό από τα βασικά μαθήματα Ανάλυσης **Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής** που λέει ότι, *αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[a, b]$*. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή το κλειστό και φραγμένο ευθ. τμήμα $[a, b]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Ασκήσεις.

3.3.1. Έστω ευθεία l. Για κάθε z ορίζουμε $P_l(z)$ να είναι η ορθογώνια προβολή του z στην l. Έτσι ορίζεται η συνάρτηση $P_l : \mathbb{C} \to l$.
[α] Αποδείξτε ότι ισχύει $|P_l(z) - P_l(w)| \leq |z - w|$ για κάθε z, w.
[β] Αποδείξτε ότι η $P_l : \mathbb{C} \to l$ είναι συνεχής.
[γ] Αποδείξτε ότι η ορθογώνια προβολή ενός συμπαγούς συνόλου σε μια ευθεία είναι συμπαγές σύνολο.

3.3.2. Για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ορίζουμε $R(z) = \frac{z}{|z|}$ να είναι η ακτινική προβολή του z στον μοναδιαίο κύκλο $C(0; 1)$. Έτσι ορίζεται συνάρτηση $R : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to C(0; 1)$.
[α] Αποδείξτε ότι η $R : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to C(0; 1)$ είναι συνεχής.
[β] Αποδείξτε ότι η ακτινική προβολή ενός συμπαγούς συνόλου στον μοναδιαίο κύκλο είναι συμπαγές σύνολο.

3.3.3. Έστω κλειστό και φραγμένο σύνολο K, πολυγωνική γραμμή L και $f : K \to \mathbb{C}$ συνεχής στο K ώστε να ισχύει $f(z) \notin L$ για κάθε $z \in K$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z) - w| \geq \epsilon$ για κάθε $z \in K$ και $w \in L$.

3.3.4. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνεχής στο $\mathbb{C}$ ώστε $\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$ με $w_0 \in \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι η f είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$.

3.3.5. Η $f : A \to \mathbb{C}$ χαρακτηρίζεται **ομοιόμορφα συνεχής** στο A αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(z') - f(z'')| < \epsilon$ για κάθε $z', z'' \in A$ με $|z' - z''| < \delta$.
[α] Αποδείξτε ότι, αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A, τότε η f είναι συνεχής στο A.
[β] Είναι η $f : D(0; 1) \to \mathbf{C}$ με τύπο $f(z) = \frac{1}{1-z}$ συνεχής στο $D(0; 1)$; ομοιόμορφα συνεχής στο $D(0; 1)$;
[γ] Αποδείξτε ότι, αν το A είναι συμπαγές και η f είναι συνεχής στο A, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.
[δ] Η $f : A \to \mathbb{C}$ χαρακτηρίζεται **συνάρτηση-Lipschitz** στο A αν υπάρχει $M \geq 0$ ώστε να ισχύει $|f(z')-f(z'')| \leq M|z'-z''|$ για κάθε $z', z'' \in A$. Αποδείξτε ότι, αν η f είναι συνάρτηση-Lipschitz στο A, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A.

[ε] Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνεχής στο $\mathbb{C}$ ώστε $\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$ με $w_0 \in \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{C}$.

[στ] Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ ομοιόμορφα συνεχής στο A. Έστω $z_0 \in \overline{A} \setminus A$. Αποδείξτε ότι για κάθε ακολουθία (z_n) στο A για την οποία ισχύει $z_n \to z_0$ συνεπάγεται ότι υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} f(z_n)$ και ότι το όριο αυτό είναι μιγαδικός αριθμός ανεξάρτητος της συγκεκριμένης (z_n). Κατόπιν, ορίζουμε $f(z_0) = \lim_{n\to+\infty} f(z_n)$. Με αυτόν τον τρόπο επεκτείνουμε την f ώστε να είναι ορισμένη και στα σημεία του $\overline{A} \setminus A$, δηλαδή επεκτείνουμε την f σε συνάρτηση $f : \overline{A} \to \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι η $f : \overline{A} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο $\overline{A}$.

3.4 Συνεχείς συναρτήσεις και συνεκτικά σύνολα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ συνεχής στο A. Αν το A είναι συνεκτικό, τότε το $f(A)$ είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έστω ότι το $f(A)$ δεν είναι συνεκτικό.
Τότε υπάρχουν σύνολα B', C' ώστε $B' \cup C' = f(A)$, $B' \cap C' = \emptyset$, $B' \neq \emptyset$, $C' \neq \emptyset$ και κανένα από τα B', C' δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου.
Θεωρούμε τις αντίστροφες εικόνες των B', C' μέσα στο A, δηλαδή τα σύνολα

$$B = f^{-1}(B') = \{z \in A \,|\, f(z) \in B'\}, \qquad C = f^{-1}(C') = \{z \in A \,|\, f(z) \in C'\}.$$

Είναι φανερό (από τις απλές πρωταρχικές ιδιότητες συνόλων, συναρτήσεων και αντίστροφων εικόνων) ότι ισχύει $B \cup C = A$, $B \cap C = \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$.
Τώρα, έστω ότι το B περιέχει οριακό σημείο του C, δηλαδή έστω $b \in B$ και b οριακό σημείο του C. Τότε υπάρχει ακολουθία (c_n) στο C ώστε $c_n \to b$. Επειδή η f είναι συνεχής στο b, συνεπάγεται $f(c_n) \to f(b)$. Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $(f(c_n))$ είναι στο C' και, επομένως, το $f(b)$ είναι οριακό σημείο του C'. Όμως, $f(b) \in B'$ και καταλήγουμε σε άτοπο (διότι το B' δεν περιέχει οριακό σημείο του C'). Το άτοπο προέκυψε από την υπόθεση ότι το B περιέχει οριακό σημείο του C. Άρα το B δεν περιέχει οριακό σημείο του C.
Τελείως συμμετρικά αποδεικνύεται ότι το C δεν περιέχει οριακό σημείο του B.
Άρα τα B, C αποτελούν διάσπαση του A. Αυτό είναι άτοπο διότι το A είναι συνεκτικό σύνολο. Άρα το $f(A)$ είναι συνεκτικό. □

Τώρα έχουμε το εξής πόρισμα του Θεωρήματος 3.2.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.12. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο A. Αν το A είναι συνεκτικό, τότε η f έχει την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής στο A.*

Απόδειξη. Το $f(A)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και γνωρίζουμε ότι κάθε συνεκτικό υποσύνολο μιας οποιασδήποτε ευθείας είναι διάστημα. Άρα και το $f(A)$ είναι διάστημα στο $\mathbb{R}$.
Έστω, τώρα, ότι οι (πραγματικοί) αριθμοί u_1, u_2 είναι τιμές της f στο A. Δηλαδή υπάρχουν $z_1, z_2 \in A$ ώστε

$$f(z_1) = u_1, \quad f(z_2) = u_2.$$

Επειδή οι u_1, u_2 ανήκουν στο διάστημα $f(A)$, κάθε (πραγματικός, εννοείται) αριθμός u με $u_1 < u < u_2$ ανήκει κι αυτός στο διάστημα $f(A)$, οπότε υπάρχει $z \in A$ ώστε

$$f(z) = u.$$

Δηλαδή, κάθε αριθμός ενδιάμεσος των τιμών u_1, u_2 της f στο A είναι τιμή της f στο A. □

Παρατηρούμε πάλι ότι μια ειδική περίπτωση της Πρότασης 3.12 είναι το γνωστό μας **Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής** που λέει ότι, *αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο διάστημα $I \subseteq R$, τότε έχει την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής στο I*. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή το οποιοδήποτε διάστημα I είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Ασκήσεις.

3.4.1. Δείτε την άσκηση 3.3.1 και αποδείξτε ότι η ορθογώνια προβολή ενός συνεκτικού συνόλου σε μια ευθεία είναι συνεκτικό σύνολο.

3.4.2. Δείτε την άσκηση 3.3.2 και αποδείξτε ότι η ακτινική προβολή ενός συνεκτικού συνόλου στον $C(0;1)$ είναι συνεκτικό σύνολο.

3.4.3. Έστω πολυγωνική γραμμή L που συνδέει τα z_0, z_1 και $f : L \to \mathbb{C}$ συνεχής στην L ώστε $f(z_0) = 2 + i$ και $f(z_1) = 1 - 2i$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $z \in L$ ώστε $f(z) \in \mathbb{R}$.
Ισχύει το ίδιο αν το L περιέχει τα z_0, z_1 και είναι δίσκος; ημιεπίπεδο; ένωση δυο ξένων δίσκων;

3.4.4. Αποδείξτε ότι είναι συνεκτικά τα σύνολα $\{x + i \sin x \,|\, x \in \mathbb{R}\}$, $\{x + i \sin \frac{1}{x} \,|\, 0 < x \leq 1\}$, $\{x + i \sin \frac{1}{x} \,|\, 0 < x \leq 1\} \cup [-i, i]$.

3.4.5. Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ συνεχής στο συμπαγές και συνεκτικό A. Έστω $z, w \in A$ και $\epsilon > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $a_0, \ldots, a_n \in A$ ώστε $a_0 = z$, $a_n = w$ και ώστε να ισχύει $|a_{k-1} - a_k| < \epsilon$ και $|f(a_{k-1}) - f(a_k)| < \epsilon$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$.

3.4.6. Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι το A είναι συνεκτικό αν και μόνο αν οι μόνες συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{Z}$ που είναι συνεχείς στο A είναι οι σταθερές συναρτήσεις.

Κεφάλαιο 4

Επικαμπύλια ολοκληρώματα

4.1 Παράγωγοι μιγαδικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής.

Πριν από τα μαθήματα περί μιγαδικών συναρτήσεων, στα μαθήματα του Απειροστικού Λογισμού και της Ανάλυσης μαθαίνουμε για την παράγωγο συνάρτησης ορισμένης σε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με τιμές, επίσης, στο $\mathbb{R}$. Τώρα θα μιλήσουμε για παράγωγο συνάρτησης ορισμένης σε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με τιμές, όμως, γενικότερα στο $\mathbb{C}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $\gamma : A \to \mathbb{C}$ και $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t_0 \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι η γ είναι* **παραγωγίσιμη** *στο t_0 αν υπάρχει το όριο $\lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}$ και είναι μιγαδικός αριθμός (δηλαδή, όχι ∞). Την τιμή του ορίου ονομάζουμε* **παράγωγο** *της γ στο t_0 και συμβολίζουμε*

$$\gamma'(t_0) = \frac{d\gamma}{dt}(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}.$$

Συνήθως, το A είναι διάστημα του $\mathbb{R}$ και το t_0 είναι εσωτερικό σημείο ή άκρο του διαστήματος. Στην περίπτωση άκρου, το όριο που ορίζει την παράγωγο είναι, φυσικά, πλευρικό “μέσα από ” το διάστημα.

Η σύνδεση με την ήδη γνωστή έννοια παραγώγου γίνεται μέσω του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της συνάρτησης, τα οποία είναι συναρτήσεις με τιμές στο $\mathbb{R}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.1. *Έστω $\gamma : A \to \mathbb{C}$ και $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t_0 \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Επίσης, έστω $\gamma = x + iy$, όπου x και y είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της γ. Δηλαδή, είναι $x, y : A \to \mathbb{R}$ και*

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

για κάθε $t \in A$.
Η γ είναι παραγωγίσιμη στο $t_0 \in A$ αν και μόνο αν οι x και y είναι και οι δυο παραγωγίσιμες στο t_0 και, σ' αυτήν την περίπτωση,

$$\gamma'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0).$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0} = \frac{(x(t)+iy(t))-(x(t_0)+iy(t_0))}{t-t_0} = \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} + i\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0} \tag{4.1}$$

και παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ και $\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}$ είναι πραγματικές, οπότε είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος, αντιστοίχως, της συνάρτησης $\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}$.
Τώρα εφαρμόζουμε την Πρόταση 3.2[α] και έχουμε ότι το $\lim_{t\to t_0} \frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}$ υπάρχει και είναι μιγαδικός αν και μόνο αν τα όρια $\lim_{t\to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ και $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί. Η απόδειξη τελειώνει παίρνοντας όρια στην (4.1) όταν $t \to t_0$. $\square$

Τα προηγούμενα έχουν ήδη ειπωθεί σε προηγούμενο μάθημα Μιγαδικής Ανάλυσης. Το ίδιο ισχύει και για τα επόμενα και γι αυτό απλώς θα διατυπωθούν χωρίς τις αποδείξεις τους. Οι αποδείξεις γίνονται είτε με κατά γράμμα επανάληψη των αποδείξεων των αντίστοιχων αποτελεσμάτων για πραγματικές συναρτήσεις είτε με αναγωγή στα ήδη γνωστά αντίστοιχα αποτελέσματα για πραγματικές συναρτήσεις μέσω της Πρότασης 4.1.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.2. *Έστω $\gamma : A \to \mathbb{C}$ και $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t_0 \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν η γ είναι παραγωγίσιμη στο t_0, τότε είναι συνεχής στο t_0.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.3. *Έστω $\gamma_1, \gamma_2 : A \to \mathbb{C}$ και $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t_0 \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν οι γ_1, γ_2 είναι παραγωγίσιμες στο t_0, τότε και οι $\gamma_1 + \gamma_2$, $\gamma_1 - \gamma_2$, $\gamma_1\gamma_2$ είναι παραγωγίσιμες στο t_0. Επίσης, αν ισχύει επιπλέον ότι $\gamma_2(t) \neq 0$ για κάθε $t \in A$, τότε και η $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ είναι παραγωγίσιμη στο t_0. Τέλος έχουμε τις ισότητες:*

$$(\gamma_1 + \gamma_2)'(t_0) = {\gamma_1}'(t_0) + {\gamma_2}'(t_0), \qquad (\gamma_1 - \gamma_2)'(t_0) = {\gamma_1}'(t_0) - {\gamma_2}'(t_0),$$

$$(\gamma_1\gamma_2)'(t_0) = {\gamma_1}'(t_0)\gamma_2(t_0) + \gamma_1(t_0){\gamma_2}'(t_0), \qquad \Big(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Big)'(t_0) = \frac{{\gamma_1}'(t_0)\gamma_2(t_0) - \gamma_1(t_0){\gamma_2}'(t_0)}{(\gamma_2(t_0))^2}.$$

Έχουμε και τον αντίστοιχο κανόνα αλυσίδας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.4. *Έστω $\sigma : B \to A$ και $\gamma : A \to \mathbb{C}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$ και $A \subseteq \mathbb{R}$ και $s_0 \in B$ σημείο συσσώρευσης του B και $t_0 = \sigma(s_0) \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Αν η σ είναι παραγωγίσιμη στο s_0 και η γ είναι παραγωγίσμη στο t_0, τότε και η $\gamma \circ \sigma : B \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο s_0 και*

$$(\gamma \circ \sigma)'(s_0) = \gamma'(\sigma(s_0))\sigma'(s_0) = \gamma'(t_0)\sigma'(s_0).$$

4.2 Καμπύλες στο μιγαδικό επίπεδο.

Τώρα θα δούμε μια ειδική κατηγορία μιγαδικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής: θα υποθέσουμε ότι το πεδίο ορισμού είναι κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ του $\mathbb{R}$ και ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σ' ολόκληρο το $[a, b]$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, όπου $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ και η γ είναι συνεχής στο $[a, b]$. Τότε η γ χαρακτηρίζεται* **καμπύλη** *στο μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$.*

Αν $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι οποιαδήποτε καμπύλη (τονίζουμε: αυτό σημαίνει ότι το $[a, b]$ είναι διάστημα του $\mathbb{R}$ και η γ είναι συνεχής στο $[a, b]$), τότε το σύνολο τιμών, δηλαδή το

$$\gamma^* = \{\gamma(t) \,|\, t \in [a, b]\} \subseteq \mathbb{C}$$

ονομάζεται **τροχιά** της καμπύλης γ και αποτελεί ένα υποσύνολο του $\mathbb{C}$ το οποίο είναι *συμπαγές και συνεκτικό*, διότι η γ είναι συνεχής και το διάστημα $[a, b]$ είναι συμπαγές και συνεκτικό. Το σημείο $\gamma(a)$ ονομάζεται **αρχή** ή **αρχικό άκρο** της καμπύλης και το σημείο $\gamma(b)$ ονομάζεται **τέλος** ή **τελικό άκρο** της καμπύλης. Η μεταβλητή $t \in [a, b]$ ονομάζεται και **παράμετρος** της καμπύλης. Όταν η παράμετρος t διατρέχει αυξανόμενη το διάστημα $[a, b]$, το αντίστοιχο σημείο $\gamma(t)$ διατρέχει το σύνολο γ^* με μια συγκεκριμένη φορά η οποία χαρακτηρίζεται **φορά διαγραφής** της καμπύλης. Τέλος, η

$$z = \gamma(t), \qquad t \in [a, b]$$

ονομάζεται **παραμετρική αναπαράσταση** ή **παραμετρική εξίσωση** της καμπύλης γ.

Η ονομασία "καμπύλη" για τη συνάρτηση γ δικαιολογείται διότι το σχήμα του συνόλου τιμών γ^* είναι, συνήθως, αυτό που στην καθημερινή γλώσσα ονομάζουμε "καμπύλη στο επίπεδο". Μάλιστα, πολλές φορές θα χρησιμοποιούμε καταχρηστικά τον όρο "καμπύλη" για το σύνολο τιμών γ^* αν και κάτι τέτοιο δεν είναι τυπικά σωστό. Το πρόβλημα είναι ότι μπορεί δυο διαφορετικές καμπύλες γ_1 και γ_2 να έχουν το ίδιο σύνολο τιμών, δηλαδή την ίδια τροχιά ${\gamma_1}^* = {\gamma_2}^*$.

Παράδειγμα 4.2.1. Έστω $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq z_1$. Η $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = \frac{t-a}{b-a} z_1 + \frac{b-t}{b-a} z_0, \qquad t \in [a, b]$$

είναι καμπύλη και η τροχιά γ^* είναι το ευθύγραμμο τμήμα $[z_0, z_1]$ με άκρα τα σημεία z_0, z_1. Η αρχή της καμπύλης είναι το σημείο z_0 και το τέλος της το σημείο z_1.
Παρατηρήστε ότι, αν αλλάξουμε το διάστημα και θεωρήσουμε την $\gamma : [c, d] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = \tfrac{t-c}{d-c} z_1 + \tfrac{d-t}{d-c} z_0, \qquad t \in [c.d],$$

τότε η τροχιά γ^* είναι πάλι το ίδιο ευθύγραμμο τμήμα $[z_0, z_1]$ με άκρα τα σημεία z_0, z_1.
Το απλούστερο είναι να θεωρήσουμε ως διάστημα το $[0, 1]$, οπότε η παραμετρική εξίσωση της $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ γίνεται

$$z = \gamma(t) = t z_1 + (1-t) z_0, \qquad t \in [0, 1].$$

Η φορά διαγραφής της καμπύλης είναι από το σημείο z_0 προς το σημείο z_1.

Παράδειγμα 4.2.2. Έστω z_0 και $r > 0$. Η $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = z_0 + r(\cos t + i \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

είναι καμπύλη και η τροχιά γ^* είναι ο κύκλος $C(z_0; r)$. Η αρχή και το τέλος της καμπύλης είναι το ίδιο σημείο $z_0 + r$. Η φορά διαγραφής της καμπύλης είναι η θετική φορά περιστροφής στον κύκλο, δηλαδή η φορά περιστροφής που είναι αντίθετη με την φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.
Αν θεωρήσουμε την $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ στο ίδιο διάστημα $[0, 2\pi]$ αλλά με διαφορετική παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = z_0 + r(\cos(2t) + i \sin(2t)), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

τότε έχουμε μια διαφορετική καμπύλη από την προηγούμενη (ίδιο πεδίο ορισμού αλλά διαφορετικός τύπος). Όμως, η τροχιά γ^* είναι ο ίδιος κύκλος $C(z_0; r)$ και η αρχή και το τέλος της καμπύλης είναι το ίδιο σημείο $z_0 + r$, όπως και της προηγούμενης καμπύλης. Η φορά διαγραφής της καμπύλης είναι πάλι η θετική φορά περιστροφής στον κύκλο, δηλαδή η φορά περιστροφής που είναι αντίθετη με τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.
Με τις δυο αυτές καμπύλες πειθόμαστε για την αναγκαιότητα να θεωρούμε μια καμπύλη ως συνάρτηση και όχι ως γεωμετρικό σχήμα (τροχιά). Παρά το ότι και οι δυο καμπύλες έχουν την ίδια τροχιά, τα ίδια άκρα και την ίδια φορά διαγραφής, η δεύτερη καμπύλη διαγράφει την τροχιά της δυο φορές ενώ η πρώτη καμπύλη διαγράφει την (ίδια) τροχιά της μια φορά.

Αν, όπως στο τελευταίο παράδειγμα, μια καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ έχει το ίδιο σημείο ως αρχή και τέλος, δηλαδή αν $\gamma(a) = \gamma(b)$, τότε η καμπύλη χαρακτηρίζεται **κλειστή**.

Επίσης, αν $\gamma : [a, b] \to A$ είναι μια καμπύλη, όπου $A \subseteq \mathbb{C}$, τότε ισχύει $\gamma(t) \in A$ για κάθε $t \in [a, b]$ ή, ισοδύναμα, η τροχιά γ^* περιέχεται στο σύνολο A. Τότε θα μιλάμε για **καμπύλη στο** A ή θα λέμε **η καμπύλη είναι στο** A.

Έστω καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ και $t_0 \in [a, b]$. Υποθέτουμε ότι η γ είναι παραγωγίσιμη στο t_0 και θεωρούμε την παράγωγο της γ στο t_0, δηλαδή το όριο

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \tfrac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{C}.$$

Αν $t_0 = a$, τότε το όριο αυτό είναι, φυσικά, δεξιό πλευρικό όριο και, αν $t_0 = b$, τότε το όριο αυτό είναι αριστερό πλευρικό όριο.

Έστω καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ και $t_0 \in [a, b]$ ο οποίος είναι είτε εσωτερικό σημείο είτε αριστερό άκρο του διαστήματος I. Έστω ότι υπάρχει η δεξιά πλευρική παράγωγος $\gamma'_+(t_0)$ και είναι μιγαδικός αριθμός $\neq 0$. Θεωρούμε και την ημιευθεία l_+ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \varepsilon_+(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'_+(t_0), \qquad t \geq t_0,$$

με κορυφή το σημείο $\gamma(t_0)$ και κατεύθυνση που καθορίζεται από το διάνυσμα $\gamma'_+(t_0)$. Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0+}\tfrac{|\gamma(t)-\varepsilon_+(t)|}{|\varepsilon_+(t)-\gamma(t_0)|} &= \lim_{t\to t_0+}\big|\tfrac{\gamma(t)-\gamma(t_0)-(t-t_0)\gamma'_+(t_0)}{(t-t_0)\gamma'_+(t_0)}\big| \\ &= \tfrac{1}{|\gamma'_+(t_0)|}\lim_{t\to t_0+}\big|\tfrac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}-\gamma'_+(t_0)\big| = 0.\end{aligned}$$

Άρα, καθώς ο t πλησιάζει τον t_0 από τα δεξιά του, η απόσταση του σημείου $\gamma(t)$ (το οποίο κινείται πάνω στην τροχιά γ^*) από το σημείο $\varepsilon_+(t)$ (το οποίο κινείται πάνω στην ημιευθεία l_+) μικραίνει πιο γρήγορα από την απόσταση του σημείου $\varepsilon_+(t)$ από το κοινό σημείο $\gamma(t_0)$ της τροχιάς της καμπύλης και της ημιευθείας l_+. Αυτό σημαίνει ότι η τροχιά γ^* εφάπτεται με την ημιευθεία l_+ στο κοινό σημείο τους $\gamma(t_0)$. Γι αυτό λέμε ότι η l_+ είναι η **εφαπτόμενη ημιευθεία** της καμπύλης γ στο σημείο $\gamma(t_0)$ *προς τη φορά διαγραφής* και ότι το $\gamma'_+(t_0)$ (που καθορίζει την κατεύθυνση της ημιευθείας) είναι το **εφαπτόμενο διάνυσμα** της καμπύλης γ στο σημείο $\gamma(t_0)$ *προς τη φορά διαγραφής* της καμπύλης.

Έστω καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $t_0 \in [a,b]$ ο οποίος είναι είτε εσωτερικό σημείο είτε δεξιό άκρο του διαστήματος $[a,b]$. Έστω ότι υπάρχει η $\gamma'_-(t_0)$ και είναι μιγαδικός αριθμός $\neq 0$. Θεωρούμε την ημιευθεία l_- με παραμετρική εξίσωση

$$z = \varepsilon_-(t) = \gamma(t_0) + (t-t_0)\gamma'_-(t_0), \qquad t \leq t_0,$$

με κορυφή το σημείο $\gamma(t_0)$ και κατεύθυνση που καθορίζεται από το διάνυσμα $-\gamma'_-(t_0)$ (προσέξτε το πρόσημο). Τώρα είναι

$$\begin{aligned}\lim_{t\to t_0-}\tfrac{|\gamma(t)-\varepsilon_-(t)|}{|\varepsilon_-(t)-\gamma(t_0)|} &= \lim_{t\to t_0-}\big|\tfrac{\gamma(t)-\gamma(t_0)-(t-t_0)\gamma'_-(t_0)}{(t-t_0)\gamma'_-(t_0)}\big| \\ &= \tfrac{1}{|\gamma'_-(t_0)|}\lim_{t\to t_0-}\big|\tfrac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}-\gamma'_-(t_0)\big| = 0.\end{aligned}$$

Άρα, καθώς ο t πλησιάζει τον t_0 από τα αριστερά του, η απόσταση του σημείου $\gamma(t)$ (το οποίο κινείται πάνω στην τροχιά γ^*) από το σημείο $\varepsilon_-(t)$ (το οποίο κινείται πάνω στην ημιευθεία l_-) μικραίνει πιο γρήγορα από την απόσταση του σημείου $\varepsilon_-(t)$ από το κοινό σημείο $\gamma(t_0)$ της τροχιάς της καμπύλης και της ημιευθείας l_-. Αυτό σημαίνει ότι η τροχιά γ^* εφάπτεται με την ημιευθεία l_- στο κοινό σημείο τους $\gamma(t_0)$ και λέμε ότι η l_- είναι η **εφαπτόμενη ημιευθεία** της καμπύλης γ στο σημείο $\gamma(t_0)$ *προς τη φορά την αντίθετη της φοράς διαγραφής* και ότι το $-\gamma'_-(t_0)$ (που καθορίζει την κατεύθυνση της ημιευθείας) είναι το **εφαπτόμενο διάνυσμα** της καμπύλης γ στο σημείο $\gamma(t_0)$ *προς τη φορά την αντίθετη της φοράς διαγραφής* της καμπύλης.

Αν ο t_0 είναι εσωτερικό σημείο του I, τότε συνδυάζουμε τα προηγούμενα και βλέπουμε ότι η καμπύλη γ έχει δυο εφαπτόμενες ημιευθείες l_+ και l_- στο σημείο $\gamma(t_0)$, μια προς τη φορά διαγραφής της με κατεύθυνση που καθορίζεται από τον $\gamma'_+(t_0)$ και μια προς την αντίθετη φορά με κατεύθυνση που καθορίζεται από τον $-\gamma'_-(t_0)$. Στην περίπτωση που είναι $\gamma'_+(t_0) = \gamma'_-(t_0) = \gamma'(t_0) \neq 0$, οι δυο ημιευθείες είναι αντίθετες και η ένωσή τους σχηματίζει ευθεία l η οποία ονομάζεται **εφαπτόμενη ευθεία** της καμπύλης γ στο σημείο $\gamma(t_0)$. Το $\gamma'(t_0)$ είναι το **εφαπτόμενο διάνυσμα** της καμπύλης γ στο σημείο $\gamma(t_0)$ *προς τη φορά διαγραφής* της καμπύλης και το $-\gamma'(t_0)$ είναι το **εφαπτόμενο διάνυσμα** της καμπύλης *προς τη φορά την αντίθετη της φοράς διαγραφής* της καμπύλης. Η παραμετρική εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας l είναι η

$$z = \varepsilon(t) = \gamma(t_0) + (t-t_0)\gamma'(t_0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Προσέξτε τον ρόλο της παραδοχής $\gamma'(t_0) \neq 0$. Αν $\gamma'(t_0)$, τότε το εφαπτόμενο διάνυσμα είναι μηδενικό και *δεν ορίζει εφαπτόμενη ευθεία*. Πράγματι, τότε η παραμετρική εξίσωση $z = \gamma(t_0) + (t-t_0)\gamma'(t_0) = \gamma(t_0)$ καταλήγει σε παραμετρική εξίσωση σημείου και όχι ευθείας.

Τέλος, αν $\gamma'_+(t_0) \neq \gamma'_-(t_0)$, τότε οι δυο εφαπτόμενες ημιευθείες l_+ και l_- μπορεί να μην είναι αντίθετες και να μη σχηματίζουν εφαπτόμενη ευθεία. Τότε λέμε ότι η καμπύλη γ **σχηματίζει γωνία** στο σημείο $\gamma(t_0)$, υπονοώντας ότι η κυρτή γωνία θ ανάμεσα στις δυο εφαπτόμενες ημιευθείες είναι μικρότερη των 180 μοιρών, δηλαδή $0 \leq \theta < \pi$.

Εκτός από το γεωμετρικό περιεχόμενο της παραγώγου, το οποίο αναλύσαμε προηγουμένως, υπάρχει και το φυσικό περιεχόμενό της. Αν θεωρήσουμε ότι η παράμετρος t εκφράζει *χρόνο*, τότε η $\gamma'(t_0)$ εκφράζει την *(διανυσματική) ταχύτητα* του σημείου $\gamma(t)$ στη θέση $\gamma(t_0)$. Φυσικά, το μέτρο $|\gamma'(t_0)|$ εκφράζει τη *βαθμωτή ταχύτητα* και η γωνία $\arg(\gamma'(t_0))$ εκφράζει τη διεύθυνση της (διανυσματικής) ταχύτητας του σημείου $\gamma(t)$ στη θέση $\gamma(t_0)$.

Παράδειγμα 4.2.3. Έστω $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq z_1$. Η $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική αναπαράσταση

$$z = \gamma(t) = \tfrac{t-a}{b-a} z_1 + \tfrac{b-t}{b-a} z_0, \qquad t \in [a, b]$$

είναι καμπύλη με τροχιά γ^* το ευθύγραμμο τμήμα $[z_0, z_1]$. Το εφαπτόμενο διάνυσμα σε οποιοδήποτε σημείο $\gamma(t)$ του ευθυγράμμου τμήματος είναι το

$$\gamma'(t) = \tfrac{z_1 - z_0}{b-a}$$

και είναι σταθερό.

Παράδειγμα 4.2.4. Έστω z_0 και $r > 0$. Η $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική αναπαράσταση

$$\gamma(t) = z_0 + r(\cos t + i \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi]$$

είναι καμπύλη με τροχιά γ^* τον κύκλο $C(z_0; r)$. Το εφαπτόμενο διάνυσμα σε οποιοδήποτε σημείο $\gamma(t)$ της καμπύλης είναι το

$$\gamma'(t) = r(-\sin t + i \cos t).$$

Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα $\gamma(t) - z_0$ και $\gamma'(t)$ (το "ακτινικό" διάνυσμα και το εφαπτόμενο διάνυσμα) είναι κάθετα, αφού έχουν εσωτερικό γινόμενο

$$(\gamma(t) - z_0) \cdot \gamma'(t) = (r \cos t, r \sin t) \cdot (-r \sin t, r \cos t) = -r^2 \cos t \sin t + r^2 \sin t \cos t = 0.$$

Παρατηρήστε ότι το μέτρο του εφαπτόμενου διανύσματος είναι σταθερό

$$|\gamma'(t)| = r.$$

Δηλαδή, το σημείο $\gamma(t)$ κινείται με σταθερή βαθμωτή ταχύτητα r πάνω στην τροχιά του.
Θα ξαναδούμε τη διαφορά με την άλλη καμπύλη $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική αναπαράσταση

$$\gamma(t) = z_0 + r(\cos(2t) + i \sin(2t)), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

η οποία έχει την ίδια τροχιά $C(z_0; r)$. Τώρα το εφαπτόμενο διάνυσμα σε οποιοδήποτε σημείο $\gamma(t)$ της καμπύλης είναι το

$$\gamma'(t) = 2r(-\sin(2t) + i \cos(2t)).$$

Το μέτρο του εφαπτόμενου διανύσματος είναι πάλι σταθερό

$$|\gamma'(t)| = 2r.$$

Όμως, τώρα το σημείο $\gamma(t)$ κινείται με διπλάσια βαθμωτή ταχύτητα από την βαθμωτή ταχύτητα του σημείου $\gamma(t)$ της προηγούμενης καμπύλης. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού στο *ίδιο χρονικό διάστημα* $[0, 2\pi]$ το $\gamma(t)$ της δεύτερης καμπύλης διαγράφει την ίδια τροχιά με το $\gamma(t)$ της πρώτης καμπύλης αλλά *δυο φορές* αντί μιας.

Έστω συνεχώς παραγωγίσιμη καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι υπάρχει η $\gamma'(t)$ για κάθε $t \in [a, b]$ και ότι η $\gamma' : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$. Είναι γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό ότι το μήκος της γ είναι ίσο με

$$\text{μήκος}\,(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt. \tag{4.2}$$

Παράδειγμα 4.2.5. Έστω $z_0 \neq z_1$ και $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = \tfrac{b-t}{b-a} z_0 + \tfrac{t-a}{b-a} z_1, \qquad t \in [a,b].$$

Τότε το μήκος της γ είναι ίσο με

$$\text{μήκος}\,(\gamma) = \textstyle\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \int_a^b \left|\tfrac{z_1-z_0}{b-a}\right| dt = \left|\tfrac{z_1-z_0}{b-a}\right| \int_a^b dt = \tfrac{|z_1-z_0|}{b-a}(b-a) = |z_1 - z_0|,$$

δηλαδή ίσο με το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $[z_0, z_1]$.

Παράδειγμα 4.2.6. Έστω z_0 και $r > 0$ και $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = z_0 + r(\cos t + i \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Το μήκος της γ είναι ίσο με

$$\text{μήκος}\,(\gamma) = \textstyle\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} |r(-\sin t + i\cos t)|\,dt = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r,$$

δηλαδή ίσο με το μήκος του κύκλου $C(z_0; r)$.
Πάλι, αν θεωρήσουμε την $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = z_0 + r(\cos(2t) + i\sin(2t)), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

τότε το μήκος αυτής της γ είναι ίσο με

$$\text{μήκος}\,(\gamma) = \textstyle\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} |2r(-\sin(2t) + i\cos(2t))|\,dt = \int_0^{2\pi} 2r\,dt = 4\pi r,$$

δηλαδή ίσο με το διπλάσιο του μήκους του κύκλου $C(z_0; r)$.

Ας δούμε μια σύντομη αιτιολόγηση (όχι απόδειξη) του τύπου (4.2) για το μήκος της καμπύλης. Θεωρούμε μια διαμέριση $\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ του παραμετρικού διαστήματος $[a,b]$, δηλαδή $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$. Αυτή η διαμέριση ορίζει ένα αντίστοιχο σύνολο διαδοχικών σημείων

$$\{\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)\}$$

της τροχιάς γ^* της καμπύλης $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ από το αρχικό άκρο $\gamma(t_0) = \gamma(a)$ μέχρι το τελικό άκρο $\gamma(t_n) = \gamma(b)$. Το μήκος της αντίστοιχης πολυγωνικής γραμμής που δημιουργείται είναι, φυσικά, ίσο με

$$|\gamma(t_1) - \gamma(t_0)| + \cdots + |\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})| = \textstyle\sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|. \tag{4.3}$$

Αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, τότε, επειδή η γ' είναι συνεχής, ο λόγος $\frac{\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}$ είναι περίπου ίσος με την παράγωγο $\gamma'(\xi_k)$ και όσο πιο λεπτή είναι η διαμέριση τόσο πιο κοντά είναι το $\frac{\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}$ στο $\gamma'(\xi_k)$. Άρα όσο πιο λεπτή είναι η διαμέριση τόσο πιο κοντά είναι το μήκος της πολυγωνικής γραμμής στο άθροισμα

$$\textstyle\sum_{k=1}^n |\gamma'(\xi_k)|(t_k - t_{k-1}). \tag{4.4}$$

Δηλαδή, η διαφορά των αθροισμάτων (4.3) και (4.4) τείνει στο 0 όταν το πλάτος της Δ τείνει στο 0. Όμως το άθροισμα (4.4) είναι το άθροισμα Riemann της συνεχούς συνάρτησης $|\gamma'|$ στο $[a,b]$ που αντιστοιχεί στη διαμέριση $\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ και στην επιλογή $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων. Τώρα, όταν το πλάτος της Δ τείνει στο 0 το μεν μήκος (4.3) της αντίστοιχης πολυγωνικής γραμμής τείνει στο μήκος της καμπύλης το δε άθροισμα Riemann (4.4) τείνει στο ολοκλήρωμα $\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$. Παίρνοντας, λοιπόν, διαμερίσεις με πλάτη που τείνουν στο 0, προκύπτει ο τύπος (4.2).

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι η καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι* **ομαλή** *αν είναι συνεχώς παραγωγίσιμη (δηλαδή η γ' είναι συνεχής στο $[a,b]$) και ισχύει $\gamma'(t) \neq 0$ για κάθε $t \in [a,b]$.*

Αν η γ είναι ομαλή, τότε σε κάθε σημείο $\gamma(t)$ έχει μη-μηδενικό εφαπτόμενο διάνυσμα $\gamma'(t)$ (οπότε ορίζεται η αντίστοιχη εφαπτόμενη ευθεία) και το εφαπτόμενο διάνυσμα μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο όταν το t διατρέχει το διάστημα $[a,b]$ (και το σημείο $\gamma(t)$ διατρέχει με συνεχή τρόπο την τροχιά της γ).

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι η καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι* **τμηματικά ομαλή** *αν υπάρχουν $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$ στο παραμετρικό διάστημα $[a,b]$ ώστε σε καθένα από τα υποδιαστήματα στα οποία το $[a,b]$ χωρίζεται από τα $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n$ ο αντίστοιχος περιορισμός της γ να είναι ομαλή καμπύλη.*

Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε $t \in [a,b] \setminus \{t_0, \ldots t_n\}$ υπάρχει η $\gamma'(t)$ και είναι $\neq 0$, ότι σε κάθε t_k υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι $\gamma'_-(t_k)$, $\gamma'_+(t_k)$ και είναι $\neq 0$ και ότι σε κάθε υποδιάστημα $[t_{k-1}, t_k]$ η γ' είναι συνεχής αν στα άκρα του υποδιαστήματος θεωρήσουμε ως τιμές της γ' τις αντίστοιχες πλευρικές παραγώγους “από μέσα” από το υποδιάστημα. Η καμπύλη γ πιθανόν να σχηματίζει γωνία στα σημεία $\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_{n-1})$.

Είναι φανερό ότι το μήκος μιας τμηματικά ομαλής καμπύλης $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ δίνεται και πάλι από τον τύπο (4.2), όπου το ολοκλήρωμα είναι το ολοκλήρωμα Riemann της τμηματικά συνεχούς συνάρτησης $|\gamma'| : [a,b] \to \mathbb{C}$. Αυτό, φυσικά, προκύπτει αν θεωρήσουμε τους περιορισμούς $\gamma_k : [t_{k-1}, t_k] \to \mathbb{C}$ της $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Τότε κάθε γ_k είναι ομαλή καμπύλη και, επομένως, ισχύει ο τύπος (4.2) γι αυτήν, δηλαδή

$$\text{μήκος}\,(\gamma_k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma_k'(t)|\,dt = \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)|\,dt.$$

Τέλος, αθροίζουμε ως προς $k = 1, \ldots, n$ και βρίσκουμε τον τύπο (4.2).

Από τώρα και στο εξής θα κάνουμε την εξής σύμβαση:

Όλες οι καμπύλες θα είναι ομαλές ή στη χειρότερη περίπτωση τμηματικά ομαλές.

Έστω καμπύλη $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$. Θεωρούμε οποιαδήποτε συνάρτηση $\sigma : [c,d] \to [a,b]$ η οποία είναι ένα-προς-ένα στο $[c,d]$ και επί του $[a,b]$, έχει συνεχή παράγωγο στο $[c,d]$ και ισχύει $\sigma'(s) > 0$ για κάθε $s \in [c,d]$. Επομένως, η σ είναι γνησίως αύξουσα στο $[c,d]$ και $\sigma(c) = a$ και $\sigma(d) = b$. Κάθε τέτοια συνάρτηση σ χαρακτηρίζεται **αλλαγή παραμέτρου**. Τότε ορίζεται η $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \sigma : [c,d] \to \mathbb{C}$ και είναι συνεχής στο $[c,d]$, οπότε αποτελεί καμπύλη. Η γ_2 χαρακτηρίζεται **αναπαραμετρικοποίηση** της γ_1 : η παράμετρος της γ_1 είναι το $t \in [a,b]$ ενώ η παράμετρος της γ_2 είναι το $s \in [c,d]$. Παρατηρούμε ότι

$$\gamma_2{}^* = \{\gamma_2(s) : s \in [c,d]\} = \{\gamma_1(\sigma(s)) : s \in [c,d]\} = \{\gamma_1(t) : t \in [a,b]\} = \gamma_1{}^*.$$

Δηλαδή, οι τροχιές των δυο καμπυλών είναι το ίδιο υποσύνολο του επιπέδου. Επίσης, τα άκρα των δυο καμπυλών ταυτίζονται: αρχικό άκρο $\gamma_2(c) = \gamma_1(\sigma(c)) = \gamma_1(a)$ και τελικό άκρο $\gamma_2(d) = \gamma_1(\sigma(d)) = \gamma_1(b)$. Βλέπουμε, ακόμη, ότι η φορά διαγραφής των δυο καμπυλών είναι ίδια. Καθώς ο s αυξάνεται διατρέχοντας το $[c,d]$, ο $t = \sigma(s)$ αυξάνεται διατρέχοντας το $[a,b]$ και το σημείο $\gamma_2(s) = \gamma_1(\sigma(s)) = \gamma_1(t)$ διατρέχει την κοινή τροχιά των δυο καμπυλών από το κοινό αρχικό άκρο μέχρι το κοινό τελικό άκρο. Μια δεύτερη παρατήρηση είναι η εξής. Αν η γ_1 είναι ομαλή, τότε και η γ_2 είναι ομαλή. Πράγματι, ισχύει

$$\gamma_2{}'(s) = (\gamma_1 \circ \sigma)'(s) = \gamma_1{}'(\sigma(s))\sigma'(s) = \gamma_1{}'(t)\sigma'(s)$$

για κάθε $s \in [c,d]$ με το αντίστοιχο $t = \sigma(s) \in [a,b]$. Επειδή υποθέτουμε ότι ισχύει $\sigma'(s) > 0$ για κάθε $s \in [c,d]$, βλέπουμε ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα $\gamma_2{}'(s)$ στο σημείο $\gamma_2(s) = \gamma_1(\sigma(s)) = \gamma_1(t)$ είναι θετικό πολλαπλάσιο του εφαπτόμενου διανύσματος $\gamma_1{}'(t)$ στο ίδιο σημείο $\gamma_1(t)$. Επομένως, μια αναπαραμετρικοποίηση διατηρεί τις διευθύνσεις των εφαπτόμενων διανυσμάτων (οπότε διατηρεί και τις εφαπτόμενες ευθείες) και αλλάζει μόνο τα μέτρα τους σε κάθε σημείο της τροχιάς. Με άλλα λόγια, αλλάζει η βαθμωτή ταχύτητα διαγραφής της καμπύλης αλλά όχι η διεύθυνση της ταχύτητας: τα σημεία $\gamma_2(s)$ και $\gamma_1(t)$ διατρέχουν την ίδια τροχιά με διαφορετική βαθμωτή ταχύτητα. Αυτά, φυσικά, επεκτείνονται και στην περίπτωση τμηματικά ομαλών καμπυλών. Τότε διατηρούνται και οι γωνίες που τυχόν σχηματίζει η καμπύλη σε κάποια πεπερασμένου πλήθους σημεία.

Εκτός από την τροχιά, τα άκρα, τη φορά διαγραφής και την κατεύθυνση των εφαπτόμενων διανυσμάτων, υπάρχει κάτι ακόμη που μένει αμετάβλητο μετά από αλλαγή παραμέτρου μιας καμπύλης: το μήκος της. Πράγματι, με την απλή αλλαγή μεταβλητής $t = \sigma(s)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \text{μήκος}\,(\gamma_2) &= \textstyle\int_c^d |\gamma_2{}'(s)|\,ds = \int_c^d |\gamma_1{}'(\sigma(s))||\sigma'(s)|\,ds \\ &= \textstyle\int_c^d |\gamma_1{}'(\sigma(s))|\sigma'(s)\,ds = \int_a^b |\gamma_1{}'(t)|\,dt = \text{μήκος}\,(\gamma_1). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.2.7. Θεωρούμε τις καμπύλες $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ και $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{C}$ με παραμετρικές εξισώσεις

$$z = \gamma_1(t) = \tfrac{b-t}{b-a} z_0 + \tfrac{t-a}{b-a} z_1, \quad t \in [a, b], \qquad z = \gamma_2(s) = \tfrac{d-s}{d-c} z_0 + \tfrac{s-c}{d-c} z_1, \quad s \in [c, d].$$

Τότε η γ_2 είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ_1. Πράγματι, αν θεωρήσουμε την $\sigma : [c, d] \to [a, b]$ με τύπο

$$t = \sigma(s) = \tfrac{d-s}{d-c} a + \tfrac{s-c}{d-c} b, \qquad s \in [c, d]$$

τότε η σ έχει τις κατάλληλες ιδιότητες ώστε να χαρακτηριστεί *αλλαγή παραμέτρου* και ισχύει

$$\gamma_2(s) = \gamma_1(\sigma(s)) \qquad \text{για κάθε } \ s \in [c, d].$$

Όπως έχουμε δει, και οι δυο καμπύλες έχουν τροχιά το ευθ. τμήμα $[z_0, z_1]$. Το μήκος και των δυο καμπυλών είναι ίσο με το μήκος $|z_1 - z_0|$ του ευθ. τμήματος.

Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι η *σχέση αναπαραμετρικοποίησης* ανάμεσα στις καμπύλες του μιγαδικού επιπέδου είναι *σχέση ισοδυναμίας*.

Τώρα, αν έχουμε οποιαδήποτε καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ και ένα οποιοδήποτε διάστημα $[c, d]$ διαφορετικό από το $[a, b]$, τότε υπάρχει καμπύλη η οποία είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ και ορίζεται στο $[c, d]$ αντί του $[a, b]$. Αυτό επιτυγχάνεται αρκεί να βρούμε κατάλληλη αλλαγή παραμέτρου $\sigma : [c, d] \to [a, b]$. Υπάρχουν άπειρες τέτοιες σ. Μια απλή τέτοια αλλαγή παραμέτρου είναι αυτή που χρησιμοποιήθηκε στο τελευταίο παράδειγμα και έχει τύπο

$$t = \phi(s) = \tfrac{d-s}{d-c} a + \tfrac{s-c}{d-c} b, \qquad s \in [c, d].$$

Αυτό σημαίνει ότι το διάστημα στο οποίο είναι ορισμένη μια καμπύλη δεν έχει ιδιαίτερη σημασία αφού υπάρχει αναπαραμετρικοποίηση της καμπύλης ορισμένη σε οποιοδήποτε άλλο διάστημα μας βολεύει καλύτερα.

Έστω καμπύλες $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ και $\gamma_2 : [b, c] \to \mathbb{C}$ ώστε $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι το τέλος της γ_1 ταυτίζεται με την αρχή της γ_2. Τότε λέμε ότι οι καμπύλες γ_1 και γ_2 (με αυτήν τη σειρά) είναι **διαδοχικές** και τότε ορίζεται η καμπύλη $\gamma_1 \dot{+} \gamma_2 : [a, c] \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{αν } a \le t \le b \\ \gamma_2(t), & \text{αν } b \le t \le c \end{cases}$$

Η $\gamma_1 \dot{+} \gamma_2$ είναι καμπύλη (διότι είναι συνεχής στο $[a, c]$) και ονομάζεται **άθροισμα** των γ_1 και γ_2. Επίσης, επειδή οι γ_1 και γ_2 είναι τμηματικά ομαλές, η $\gamma_1 \dot{+} \gamma_2$ είναι κι αυτή τμηματικά ομαλή.

Παρατηρούμε ότι καθώς το t αυξάνεται στο $[a, c]$, από το a μέχρι το b το σημείο $(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)(t)$ ταυτίζεται με το σημείο $\gamma_1(t)$ και διαγράφει την τροχιά $\gamma_1{}^*$ από το $\gamma_1(a)$ μέχρι το $\gamma_1(b)$ και, κατόπιν, από το b μέχρι το c το σημείο $(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)(t)$ ταυτίζεται με το $\gamma_2(t)$ και διαγράφει την τροχιά $\gamma_2{}^*$ από το $\gamma_2(b)$ μέχρι το $\gamma_2(c)$. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η τροχιά $(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)^*$ είναι η ένωση των τροχιών $\gamma_1{}^*$ και $\gamma_2{}^*$.

Φυσικά, το άθροισμα καμπυλών γενικεύεται και για περισσότερες από δύο πεπερασμένου πλήθους καμπύλες αρκεί αυτές να είναι διαδοχικές.

Παράδειγμα 4.2.8. Μια οποιαδήποτε πολυγωνική γραμμή μπορεί, προφανώς, να θεωρηθεί άθροισμα διαδοχικών καμπυλών καθεμιά από τις οποίες έχει ως τροχιά ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα που αποτελούν την πολυγωνική γραμμή.

Μέσω της "πράξης" της άθροισης διαδοχικών καμπυλών μπορούμε να θεωρήσουμε διαδοχικές καμπύλες ως μία καμπύλη (*σύνθεση*) αλλά και να θεωρήσουμε μία καμπύλη ως άθροισμα διαδοχικών καμπυλών (*ανάλυση*).

Ας δούμε και μια απλή ιδιότητα του αθροίσματος καμπυλών σε σχέση με το μήκος τους:

$$\begin{aligned}\text{μήκος}\,(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2) &= \textstyle\int_a^c |(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)'(t)|dt = \int_a^b |(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)'(t)|dt + \int_b^c |(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)'(t)|dt \\ &= \textstyle\int_a^b |\gamma_1{}'(t)|dt + \int_b^c |\gamma_2{}'(t)|dt = \text{μήκος}\,(\gamma_1) + \text{μήκος}\,(\gamma_2).\end{aligned}$$

Δηλαδή *το μήκος του αθροίσματος διαδοχικών καμπυλών είναι ίσο με το άθροισμα των μηκών των καμπυλών.*

Τέλος, έστω καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Ορίζουμε την καμπύλη $-\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$(-\gamma)(t) = \gamma(a + b - t), \qquad t \in [a, b].$$

Η $-\gamma$ είναι καμπύλη (διότι είναι συνεχής στο $[a, b]$) και ονομάζεται **αντίθετη** της γ. Επίσης, επειδή η γ είναι τμηματικά ομαλή, η $-\gamma$ είναι κι αυτή τμηματικά ομαλή.

Παρατηρούμε ότι $(-\gamma)(a) = \gamma(b)$ και $(-\gamma)(b) = \gamma(a)$. Οι δυο καμπύλες αλλάζουν τα άκρα τους. Πιο συγκεκριμένα, καθώς ο t αυξάνεται στο $[a, b]$ το σημείο $\gamma(t)$ διατρέχει την τροχιά γ^* από το $\gamma(a)$ προς το $\gamma(b)$ ενώ το σημείο $(-\gamma)(t)$ διατρέχει την ίδια τροχιά αλλά με την αντίθετη φορά. Δηλαδή, οι δυο αντίθετες καμπύλες έχουν την ίδια τροχιά αλλά αντίθετη φορά διαγραφής. Πάντως, το μήκος τους είναι το ίδιο, όπως φαίνεται με την απλή αλλαγή μεταβλητής $s = a+b-t$:

$$\begin{aligned}\text{μήκος}\,(-\gamma) &= \textstyle\int_a^b |(-\gamma)'(t)|\,dt = \int_a^b |\gamma'(a + b - t)|\,dt \\ &= \textstyle -\int_b^a |\gamma'(s)|\,ds = \int_a^b |\gamma'(s)|\,ds = \text{μήκος}\,(\gamma).\end{aligned}$$

Ασκήσεις.

4.2.1. Έστω ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \Omega$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|\gamma(t) - z| \geq \delta$ για κάθε $t \in [a, b]$ και κάθε $z \notin \Omega$.

4.2.2. Αποδείξτε ότι η σχέση αναπαραμετρικοποίησης ανάμεσα στις καμπύλες του μιγαδικού επιπέδου είναι σχέση ισοδυναμίας:

[α] Κάθε καμπύλη γ είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ.

[β] Αν η γ_2 είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ_1, τότε η γ_1 είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ_2.

[γ] Αν η γ_2 είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ_1 και η γ_3 είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ_2, τότε η γ_3 είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ_1.

4.3 Ολοκληρώματα μιγαδικών συναρτήσεων σε πραγματικά διαστήματα.

Τώρα θα δούμε την επέκταση της έννοιας του ολοκληρώματος από το ολοκλήρωμα *πραγματικής* συνάρτησης σε διάστημα του $\mathbb{R}$ στο ολοκλήρωμα *μιγαδικής* συνάρτησης και πάλι σε διάστημα του $\mathbb{R}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω συνάρτηση* $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ *και* $u=\mathrm{Re}\,f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *και* $v=\mathrm{Im}\,f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της* f*, αντιστοίχως, οπότε*

$$f=u+iv.$$

Η f *χαρακτηρίζεται* **(Riemann) ολοκληρώσιμη** *στο* $[a,b]$ *αν οι* u,v *είναι και οι δυο (Riemann) ολοκληρώσιμες στο* $[a,b]$ *και, σ' αυτήν την περίπτωση, ορίζουμε το* **ολοκλήρωμα (Riemann)** *της* f *στο* $[a,b]$ *να είναι το*

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b u(t)\,dt+i\int_a^b v(t)\,dt. \tag{4.5}$$

Επειδή οι αριθμοί $\int_a^b u(t)\,dt$ και $\int_a^b v(t)\,dt$ είναι πραγματικοί (ως ολοκληρώματα πραγματικών συναρτήσεων), συμπεραίνουμε ότι

$$\mathrm{Re}\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b \mathrm{Re}\,f(t)\,dt,\qquad \mathrm{Im}\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b \mathrm{Im}\,f(t)\,dt.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι, αν θεωρήσουμε διαμερίσεις $\Delta=\{t_0,\,\dots\,,t_n\}$ του $[a,b]$ και ατίστοιχες επιλογές $\Xi=\{\xi_1,\,\dots\,,\xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων $\xi_k\in[t_{k-1},t_k]$ και τα αντίστοιχα αθροίσματα Riemann $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(t_k-t_{k-1})$ τότε όταν το πλάτος της διαμέρισης τείνει στο 0 συνεπάγεται ότι το άθροισμα Riemann τείνει στο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(t)\,dt$. Συμβολικά:

$$\lim_{\text{πλάτος}\,(\Delta)\to 0}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(t_k-t_{k-1})=\int_a^b f(t)\,dt.$$

Αυτό προκύπτει από την ισότητα

$$\textstyle\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(t_k-t_{k-1})=\sum_{k=1}^n u(\xi_k)(t_k-t_{k-1})+i\sum_{k=1}^n v(\xi_k)(t_k-t_{k-1}),$$

από τα γνωστά για πραγματικές συναρτήσεις όρια

$$\textstyle\lim_{\text{πλάτος}\,(\Delta)\to 0}\sum_{k=1}^n u(\xi_k)(t_k-t_{k-1})=\int_a^b u(t)\,dt,$$
$$\textstyle\lim_{\text{πλάτος}\,(\Delta)\to 0}\sum_{k=1}^n v(\xi_k)(t_k-t_{k-1})=\int_a^b v(t)\,dt$$

και τέλος, από την (4.5).

Παράδειγμα 4.3.1. Αν η f είναι τμηματικά συνεχής στο $[a,b]$, τότε οι $u=\mathrm{Re}\,f$ και $v=\mathrm{Im}\,f$ είναι τηματικά συνεχείς στο $[a,b]$, οπότε είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ και, επομένως, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

Θα δούμε, τώρα, διάφορες ιδιότητες του ολοκληρώματος μιγαδικών συναρτήσεων και θα τις αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες ιδιότητες του ολοκληρώματος πραγματικών συναρτήσεων. Όλες οι ιδιότητες θεωρούνται γνωστές και δίνουμε τις αποδείξεις τους μόνο χάριν πληρότητας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.5. *Έστω* $f_1,f_2:[a,b]\to\mathbb{C}$ *ολοκληρώσιμες στο* $[a,b]$*. Τότε η* $f_1+f_2:[a,b]\to\mathbb{C}$ *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a,b]$ *και*

$$\int_a^b (f_1(t)+f_2(t))\,dt=\int_a^b f_1(t)\,dt+\int_a^b f_2(t)\,dt.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις $u_1=\mathrm{Re}\,f_1$, $v_1=\mathrm{Im}\,f_1$, $u_2=\mathrm{Re}\,f_2$, $v_2=\mathrm{Im}\,f_2$. Αυτές είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$, οπότε και οι $\mathrm{Re}\,(f_1+f_2)=u_1+u_2$ και $\mathrm{Im}\,(f_1+f_2)=v_1+v_2$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$. Άρα και η f_1+f_2 είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και

$$\begin{aligned}\textstyle\int_a^b(f_1(t)+f_2(t))\,dt&\textstyle=\int_a^b(u_1(t)+u_2(t))\,dt+i\int_a^b(v_1(t)+v_2(t))\,dt\\&\textstyle=\int_a^b u_1(t)\,dt+\int_a^b u_2(t)\,dt+i\int_a^b v_1(t)\,dt+i\int_a^b v_2(t)\,dt\\&\textstyle=\int_a^b f_1(t)\,dt+\int_a^b f_2(t)\,dt.\end{aligned}$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.6. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και αριθμός $\lambda \in \mathbb{C}$. Τότε η $\lambda f : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt.$$

Απόδειξη. Τώρα θεωρούμε τις $u = \mathrm{Re}\, f$, $v = \mathrm{Im}\, f$ και τους αριθμούς $\mu = \mathrm{Re}\,\lambda$, $\nu = \mathrm{Im}\,\lambda$. Οι u, v είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$, οπότε και οι $\mathrm{Re}\,(\lambda f) = \mu u - \nu v$ και $\mathrm{Im}\,(\lambda f) = \nu u + \mu v$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$. Άρα και η λf είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και

$$\begin{aligned}\textstyle\int_a^b \lambda f(t)\,dt &= \textstyle\int_a^b (\mu u(t) - \nu v(t))\,dt + i\int_a^b (\nu u(t) + \mu v(t))\,dt \\ &= \textstyle\mu\int_a^b u(t)\,dt - \nu\int_a^b v(t)\,dt + i\nu\int_a^b u(t)\,dt + i\mu\int_a^b v(t)\,dt \\ &= \textstyle(\mu + i\nu)\big(\int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt\big) \\ &= \textstyle\lambda\int_a^b f(t)\,dt.\end{aligned}$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.7. *Έστω $f : [a,c] \to \mathbb{C}$ και $a < b < c$. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και στο $[b,c]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ και*

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις $u = \mathrm{Re}\, f$, $v = \mathrm{Im}\, f$. Οι u, v είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ και στο $[b,c]$, οπότε είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,c]$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ και

$$\begin{aligned}\textstyle\int_a^c f(t)\,dt &= \textstyle\int_a^c u(t)\,dt + i\int_a^c v(t)\,dt \\ &= \textstyle\int_a^b u(t)\,dt + \int_b^c u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt + i\int_b^c v(t)\,dt \\ &= \textstyle\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt.\end{aligned}$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.8. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε η $|f| : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\Big|\int_a^b f(t)\,dt\Big| \le \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις $u = \mathrm{Re}\, f$, $v = \mathrm{Im}\, f$. Οι u, v είναι ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$, οπότε η $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τώρα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

(i) Αν $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, τότε η ανισότητα $|\int_a^b f(t)\,dt| \le \int_a^b |f(t)|\,dt$ γίνεται $0 \le \int_a^b |f(t)|\,dt$ και είναι σωστή διότι ισχύει $|f(t)| \ge 0$ για κάθε $t \in [a,b]$.

(ii) Έστω $\int_a^b f(t)\,dt \ne 0$. Τότε θεωρούμε μια πολική αναπαράσταση του αριθμού $\int_a^b f(t)\,dt$, δηλαδή έστω

$$\textstyle\int_a^b f(t)\,dt = \big|\int_a^b f(t)\,dt\big|(\cos\theta + i\sin\theta) = \big|\int_a^b f(t)\,dt\big|\,z,$$

όπου θ είναι μια οποιαδήποτε τιμή του ορίσματος του αριθμού $\int_a^b f(t)\,dt$ και όπου θέτουμε (για συντομία) $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Παρατηρήστε ότι ο z έχει μέτρο

$$|z| = |\cos\theta + i\sin\theta| = 1.$$

Τώρα, είναι

$$\textstyle\big|\int_a^b f(t)\,dt\big| = z^{-1}\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b (z^{-1}f(t))\,dt. \tag{4.6}$$

Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέρος της (4.6) είναι πραγματικός αριθμός. Άρα και το δεξιό μέλος της (4.6) είναι πραγματικός αριθμός και, επομένως, είναι ίσος με το πραγματικό μέρος του! Άρα

$$\textstyle\big|\int_a^b f(t)\,dt\big| = \mathrm{Re}\int_a^b (z^{-1}f(t))\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}\,(z^{-1}f(t))\,dt \le \int_a^b |z^{-1}f(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

□

4.4 Επικαμπύλια ολοκληρώματα μιγαδικών συναρτήσεων.

Τέλος θα δούμε την επέκταση της έννοιας του ολοκληρώματος από το ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης σε *διάστημα* του $\mathbb{R}$ στο ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης σε *καμπύλη* του $\mathbb{C}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Υπενθυμίζουμε ότι η γ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και ότι υποθέτουμε, επιπλέον, ότι η γ είναι τμηματικά ομαλή στο $[a,b]$. Θεωρούμε, επίσης, $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχή στην τροχιά $\gamma^* = \{\gamma(t) \,|\, t \in [a,b]\}$. Τότε ορίζεται η $f \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ και είναι συνεχής στο $[a,b]$. Άρα η μιγαδική συνάρτηση $(f \circ \gamma)\gamma'$ είναι τμηματικά συνεχής στο $[a,b]$ και, επομένως, είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τέλος, ορίζουμε*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b (f\circ\gamma)(t)\gamma'(t)\,dt = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

και το ονομάζουμε ***επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f στην καμπύλη*** *γ.*

Παράδειγμα 4.4.1. Έστω $z_0 \neq z_1$ και η $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ με τη συγκεκριμένη παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = \tfrac{b-t}{b-a} z_0 + \tfrac{t-a}{b-a} z_1, \qquad t \in [a,b]$$

που την έχουμε δει αρκετές φορές μέχρι τώρα. Τότε $\gamma^* = [z_0, z_1]$ και, αν η $f : [z_0, z_1] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο $[z_0, z_1]$, τότε ορίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma f(z)\,dz$ και το συμβολίζουμε $\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz$. Δηλαδή,

$$\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz = \frac{z_1 - z_0}{b-a}\int_a^b f\Big(\frac{b-t}{b-a}z_0 + \frac{t-a}{b-a}z_1\Big)\,dt.$$

Θα λέμε ότι αυτό είναι **το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f κατά μήκος του ευθ. τμήματος $[z_0, z_1]$ με φορά από το z_0 προς το z_1.**

Παράδειγμα 4.4.2. Έστω z_0 και $r > 0$. Θεωρούμε τη γνωστή μας $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = z_0 + r(\cos t + i \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

οπότε $\gamma^* = C(z_0; r)$. Αν η $f : C(z_0; r) \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στον κύκλο $C(z_0; r)$, τότε ορίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma f(z)\,dz$ και το συμβολίζουμε $\int_{C(z_0;r)} f(z)\,dz$. Δηλαδή,

$$\int_{C(z_0;r)} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz = ir\int_0^{2\pi} f\big(z_0 + r(\cos t + i\sin t)\big)(\cos t + i \sin t)\,dt.$$

Θα λέμε ότι αυτό είναι **το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f κατά μήκος του κύκλου $C(z_0; r)$ με τη θετική φορά του.**

Παράδειγμα 4.4.3. Έστω z_0 και $r > 0$ και A, B δυο διαφορετικά σημεία του κύκλου $C(z_0; r)$. Τότε $A = z_0 + r(\cos t_1 + i \sin t_1)$ για κάποιον $t_1 \in \mathbb{R}$ και $B = z_0 + r(\cos t_2 + i \sin t_2)$ για έναν μοναδικό t_2 ώστε $t_1 < t_2 < t_1 + 2\pi$. Θεωρούμε την $\gamma : [t_1, t_2] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = z_0 + r(\cos t + i \sin t), \qquad t \in [t_1, t_2].$$

Καθώς ο t αυξάνεται στο διάστημα $[t_1, t_2]$ το σημείο $\gamma(t)$ διατρέχει με τη θετική φορά περιστροφής γύρω από το κέντρο z_0 ένα συγκεκριμένο τόξο (από τα δύο) του $C(z_0; r)$ με αρχή το άκρο A και τέλος το άκρο B. Αν η f είναι συνεχής στο τόξο αυτό, τότε ορίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma f(z)\,dz$ και το συμβολίζουμε

$$\int_{\mathrm{arc}\,(A,B)} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz = ir\int_{t_1}^{t_2} f\big(z_0 + r(\cos t + i\sin t)\big)(\cos t + i \sin t)\,dt.$$

Θα λέμε ότι αυτό είναι **το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f κατά μήκος του τόξου** arc (A, B) **με τη θετική φορά του.**

Θα δούμε τώρα πώς συμπεριφέρονται τα επικαμπύλια ολοκληρώματα σε σχέση με τις τρεις πράξεις καμπυλών: αναπαραμετρικοποίηση καμπύλης, άθροισμα καμπυλών και αντίθετη καμπύλη.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.9. *Έστω καμπύλες $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ και έστω ότι η γ_2 είναι αναπαραμετρικοποίηση της γ_1. Έστω $f : {\gamma_1}^* = {\gamma_2}^* \to \mathbb{C}$ συνεχής. Τότε*

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

Απόδειξη. Έστω αλλαγή παραμέτρου $\sigma : [c,d] \to [a,b]$ ώστε $\gamma_2(s) = \gamma_1(\sigma(s))$ για κάθε $s \in [c,d]$. Τότε, με μια αλλαγή μεταβλητής $t = \sigma(s)$ στα ολοκληρώματα, έχουμε

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{\gamma_2} f(z)\,dz &= \textstyle\int_c^d f(\gamma_2(s)){\gamma_2}'(s)\,ds = \int_c^d f(\gamma_1(\sigma(s))){\gamma_1}'(\sigma(s))\phi'(s)\,ds \\ &= \textstyle\int_a^b f(\gamma_1(t)){\gamma_1}'(t)\,dt = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz. \end{aligned}$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.10. *Έστω $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{C}$ δυο καμπύλες ώστε $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ και $f : {\gamma_1}^* \cup {\gamma_2}^* \to \mathbb{C}$ συνεχής. Τότε*

$$\int_{\gamma_1 \dot{+} \gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Απόδειξη. Η f είναι συνεχής στην τροχιά $(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)^* = {\gamma_1}^* \cup {\gamma_2}^*$ της καμπύλης $\gamma_1 \dot{+} \gamma_2$. Άρα ορίζεται το $\int_{\gamma_1 \dot{+} \gamma_2} f(z)\,dz$ και είναι

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{\gamma_1 \dot{+} \gamma_2} f(z)\,dz &= \textstyle\int_a^c f\big((\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)(t)\big)(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2)'(t)\,dt \\ &= \textstyle\int_a^b f(\gamma_1(t)){\gamma_1}'(t)\,dt + \int_b^c f(\gamma_2(t)){\gamma_2}'(t)\,dt \\ &= \textstyle\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz. \end{aligned}$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκε η Πρόταση 4.7. □

Παράδειγμα 4.4.4. Έστω z_0, z_1, z_2 διαφορετικά ανά δύο ώστε το σημείο z_1 να ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα $[z_0, z_2]$. Θεωρούμε την $\gamma : [a,c] \to \mathbb{C}$ με παραμετρική εξίσωση

$$z = \gamma(t) = \tfrac{c-t}{c-a} z_0 + \tfrac{t-a}{c-a} z_2, \qquad t \in [a,c].$$

Είναι σαφές ότι υπάρχει b στο $[a,c]$ ώστε $\gamma(b) = z_1$. Μάλιστα, μπορούμε να υπολογίσουμε $b = \frac{z_2-z_1}{z_2-z_0} a + \frac{z_1-z_0}{z_2-z_0} c$. Τώρα, θεωρούμε τις $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{C}$ με παραμετρικές εξισώσεις

$$z = \gamma_1(t) = \tfrac{b-t}{b-a} z_0 + \tfrac{t-a}{b-a} z_1, \quad t \in [a,b] \qquad z = \gamma_2(t) = \tfrac{c-t}{c-b} z_1 + \tfrac{t-b}{c-b} z_2, \quad t \in [b,c].$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι $\gamma(t) = \gamma_1(t)$ για κάθε $t \in [a,b]$ και $\gamma(t) = \gamma_2(t)$ για κάθε $t \in [b,c]$. Δηλαδή,

$$\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2.$$

Άρα, αν η f είναι συνεχής στο ευθ. τμήμα $[z_0, z_2]$, έχουμε $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$ και με το συμβολισμό του παραδείγματος 4.4.1 αυτό γράφεται

$$\int_{[z_0,z_2]} f(z)\,dz = \int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz + \int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz.$$

Παράδειγμα 4.4.5. Έστω z_0, z_1, z_2 διαφορετικά ανά δύο. Αν

$$\Delta(z_0, z_1, z_2)$$

είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία z_0, z_1, z_2, τότε

$$\partial\Delta(z_0, z_1, z_2) = [z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup [z_2, z_0].$$

Αν θεωρήσουμε την καμπύλη γ_1 η οποία διαγράφει το ευθ. τμήμα $[z_0, z_1]$ με φορά από z_0 προς z_1, την καμπύλη γ_2 η οποία διαγράφει το ευθ. τμήμα $[z_1, z_2]$ με φορά από z_1 προς z_2 και την καμπύλη γ_3 η οποία διαγράφει το ευθ. τμήμα $[z_2, z_0]$ με φορά από z_2 προς z_0 και, αν η f είναι συνεχής στο $\partial\Delta(z_0, z_1, z_2)$, τότε, με τα σύμβολα στο παράδειγμα 4.4.1,

$$\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz, \quad \int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz, \quad \int_{[z_2,z_0]} f(z)\,dz = \int_{\gamma_3} f(z)\,dz. \tag{4.7}$$

Τώρα, η κλειστή καμπύλη $\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2 \dot{+} \gamma_3$ διαγράφει το $\partial\Delta(z_0, z_1, z_2)$ με φορά από το z_0 στο z_1 στο z_2 και πίσω στο z_0. Άρα ορίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma f(z)\,dz$ και το συμβολίζουμε

$$\int_{\partial\Delta(z_0,z_1,z_2)} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz. \tag{4.8}$$

Τώρα, λόγω της $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz$, από τις (4.7) και (4.8) συνεπάγεται

$$\int_{\partial\Delta(z_0,z_1,z_2)} f(z)\,dz = \int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz + \int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz + \int_{[z_2,z_0]} f(z)\,dz.$$

Παράδειγμα 4.4.6. Έστω z_0 και $r > 0$ και τρία διαφορετικά σημεία A, B, C του κύκλου $C(z_0; r)$. Υποθέτουμε ότι το B ανήκει στο τόξο arc (A, C) το οποίο διαγράφεται με τη θετική φορά περιστροφής γύρω από το κέντρο z_0 με αρχή το A και τέλος το C. Αν θεωρήσουμε την καμπύλη γ_1 η οποία διαγράφει το τόξο arc (A, B) με τη θετική φορά από το A προς το B και την καμπύλη γ_2 η οποία διαγράφει το τόξο arc (B, C) με τη θετική φορά από το B προς το C, τότε η καμπύλη $\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2$ διαγράφει το τόξο arc (A, C) με τη θετική φορά από το A προς το C. Άρα, αν η f είναι συνεχής στο τόξο arc (A, C), τότε $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$ και, επομένως, βάσει του συμβολισμού στο παράδειγμα 4.4.3, έχουμε

$$\int_{\text{arc}\,(A,C)} f(z)\,dz = \int_{\text{arc}\,(A,B)} f(z)\,dz + \int_{\text{arc}\,(B,C)} f(z)\,dz.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.11. *Έστω καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ και $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής. Τότε*

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

Απόδειξη. Η f είναι συνεχής στην τροχιά $(-\gamma)^* = \gamma^*$. Άρα ορίζεται το $\int_{-\gamma} f(z)\,dz$ και, με μια απλή αλλαγή μεταβλητής, είναι

$$\begin{aligned}
\int_{-\gamma} f(z)\,dz &= \int_a^b f((-\gamma)(t))(-\gamma)'(t)\,dt \\
&= -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))\gamma'(a+b-t)\,dt = \int_b^a f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds \\
&= -\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds = -\int_\gamma f(z)\,dz.
\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 4.4.7. Έστω $z_0 \neq z_1$ και γ μια καμπύλη η οποία διαγράφει το ευθ. τμήμα $[z_0, z_1]$ από το z_0 προς το z_1. Τότε η καμπύλη $-\gamma$ διαγράφει το ίδιο ευθ. τμήμα από το z_1 προς το z_0. Βάσει του συμβολισμού του παραδείγματος 4.4.1, είναι

$$\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz, \qquad \int_{[z_1,z_0]} f(z)\,dz = \int_{-\gamma} f(z)\,dz.$$

Άρα

$$\int_{[z_1,z_0]} f(z)\,dz = -\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.12. *Έστω καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ και $f_1, f_2 : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχείς. Τότε*

$$\int_\gamma (f_1(z) + f_2(z))\,dz = \int_\gamma f_1(z)\,dz + \int_\gamma f_2(z)\,dz.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι απλή.

$$\begin{aligned}\int_\gamma (f_1(z) + f_2(z))\,dz &= \int_a^b (f_1(\gamma(t)) + f_2(\gamma(t)))\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_a^b f_1(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt + \int_a^b f_2(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_\gamma f_1(z)\,dz + \int_\gamma f_2(z)\,dz.\end{aligned}$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκε η Πρόταση 4.5. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.13. *Έστω αριθμός λ, καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ και $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής. Τότε*

$$\int_\gamma \lambda f(z)\,dz = \lambda \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Απόδειξη.

$$\int_\gamma \lambda f(z)\,dz = \int_a^b \lambda f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \lambda \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήθηκε η Πρόταση 4.6. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.14. *Έστω καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ και $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής και έστω ότι ισχύει $|f(z)| \leq M$ για κάθε $z \in \gamma^*$. Τότε*

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz\Big| \leq M \cdot \text{μήκος}\,(\gamma).$$

Απόδειξη.

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz\Big| = \Big|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\Big| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,dt \leq M\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = M \cdot \text{μήκος}\,(\gamma).$$

Στην ανισότητα χρησιμοποιήθηκε η Πρόταση 4.8. □

Ασκήσεις.

4.4.1. Υπολογίστε το $\int_\gamma |z|\,dz$, όπου γ είναι οποιαδήποτε από τις παρακάτω τρεις καμπύλες με αρχικό άκρο το $-i$ και τελικό άκρο το i.
[α] $\gamma_1(t) = it$ για $t \in [-1, 1]$.
[β] $\gamma_2(t) = \cos t + i \sin t$ για $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
[γ] $\gamma_3(t) = -\cos t + i \sin t$ για $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Σχεδιάστε τις τροχιές των τριών καμπυλών και τις φορές διαγραφής τους.

4.4.2. Έστω A, B διαφορετικά σημεία του κύκλου $C(z_0; r)$ και $f : C(z_0; r) \to \mathbb{C}$ συνεχής. Ποιά είναι η σχέση ανάμεσα στα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\int_{\text{arc}\,(A,B)} f(z)\,dz$, $\int_{\text{arc}\,(B,A)} f(z)\,dz$ και $\int_{-\text{arc}\,(A,B)} f(z)\,dz$;

4.4.3. Έστω z_0, z_1, z_2 διαφορετικά ανά δύο και $f : \partial\Delta(z_0, z_1, z_2) \to \mathbb{C}$ συνεχής. Θεωρούμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\partial\Delta(z_0,z_1,z_2)} f(z)\,dz$ καθώς και τα υπόλοιπα πέντε που προκύπτουν από αυτό με τις διάφορες αναδιατάξεις των z_0, z_1, z_2. Πόσες είναι οι πιθανές τιμές αυτών των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων;

4.4.4. Έστω f συνεχής στον δακτύλιο $R(0; 0, r_0) = \{z \,|\, 0 < |z| < r_0\}$ ή στον $R(0; r_0, +\infty) = \{z \,|\, r_0 < |z| < +\infty\}$. Ορίζουμε $M(r) = \max\{|f(z)| \,|\, |z| = r\}$ και υποθέτουμε ότι $rM(r) \to 0$ καθώς $r \to 0+$ ή $r \to +\infty$, αντιστοίχως. Αν $\gamma_r(t) = r(\cos t + i \sin t)$ για $t_1 \leq t \leq t_2$, τότε αποδείξτε ότι $\int_{\gamma_r} f(z)\,dz \to 0$ καθώς $r \to 0+$ ή $r \to +\infty$, αντιστοίχως.

Κεφάλαιο 5

Αναλυτικές συναρτήσεις.

5.1 Παράγωγος και αναλυτικές συναρτήσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και z_0 εσωτερικό σημείο του A, οπότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(z_0; r) \subseteq A$. Λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** στο z_0 αν υπάρχει το όριο $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ και είναι μιγαδικός αριθμός. Το όριο αυτό, αν υπάρχει, το ονομάζουμε **παράγωγο** της f στο z_0 και το συμβολίζουμε*

$$f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Παράδειγμα 5.1.1. Έστω οποιαδήποτε σταθερή συνάρτηση c στο $\mathbb{C}$. Τότε, για κάθε z_0 είναι

$$\tfrac{dc}{dz}(z_0) = \lim_{z\to z_0} \tfrac{c-c}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} 0 = 0.$$

Άρα μια σταθερή συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{C}$ και η παράγωγός της είναι η σταθερή συνάρτηση 0 στο $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 5.1.2. Έστω η ταυτοτική συνάρτηση z στο $\mathbb{C}$. Τότε, για κάθε z_0 είναι

$$\tfrac{dz}{dz}(z_0) = \lim_{z\to z_0} \tfrac{z-z_0}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} 1 = 1.$$

Άρα η ταυτοτική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{C}$ και η παράγωγός της είναι η σταθερή συνάρτηση 1 στο $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 5.1.3. Έστω η συνάρτηση z^2 στο $\mathbb{C}$. Τότε, για κάθε z_0 είναι

$$\tfrac{dz^2}{dz}(z_0) = \lim_{z\to z_0} \tfrac{z^2-{z_0}^2}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}(z + z_0) = 2z_0.$$

Άρα η z^2 είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{C}$ και η παράγωγός της είναι η συνάρτηση $2z$ στο $\mathbb{C}$.

Βλέπουμε ότι όχι μόνο ο ορισμός της παραγώγου μιγαδικής συνάρτησης μιας μιγαδικής μεταβλητής είναι εντελώς όμοιος με τον ορισμό της παραγώγου πραγματικής συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής αλλά το ίδιο όμοιος είναι και ο χειρισμός παραδειγμάτων. Θυμηθείτε από τον Απειροστικό Λογισμό: $\frac{dc}{dx} = 0$, $\frac{dx}{dx} = 1$, $\frac{dx^2}{dx} = 2x$. Θα δούμε ότι αυτή η ομοιότητα υπάρχει σε πολλά αποτελέσματα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.1. *Έστω ότι η $f : A \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο z_0 του A. Τότε η f είναι συνεχής στο z_0.*

Απόδειξη. Είναι

$$f(z) = \tfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}(z - z_0) + f(z_0) \qquad \text{για } z \in A, z \neq z_0.$$

Επειδή $f'(z_0) \in \mathbb{C}$, συνεπάγεται

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f'(z_0) \cdot 0 + f(z_0) = f(z_0).$$

Άρα η f είναι συνεχής στον z_0. $\square$

Η Πρόταση 5.2 περιέχει τους αλγεβρικούς κανόνες παραγώγισης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.2. *Έστω ότι οι $f, g : A \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμες στο εσωτερικό σημείο z_0 του A. Τότε οι $f+g, f-g, fg : A \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμες στο z_0. Επίσης, αν $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in A$, τότε και η $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0. Τέλος,*

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0), \qquad (f-g)'(z_0) = f'(z_0) - g'(z_0),$$

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0), \quad \Big(\frac{f}{g}\Big)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ταυτόσημη με την απόδειξη των ανάλογων αποτελεσμάτων για πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής. $\square$

Στην Πρόταση 5.3 έχουμε τον κανόνα αλυσίδας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.3. *Έστω ότι η $f : A \to B$ είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο z_0 του A και ότι η $g : B \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο $w_0 = f(z_0)$ του B. Τότε η $g \circ f : A \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0. Επίσης,*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0)f'(z_0).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ταυτόσημη με την απόδειξη του ανάλογου αποτελέσματος για πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής. $\square$

Παράδειγμα 5.1.4. Βάσει της Πρότασης 5.2 και των παραδειγμάτων των σταθερών συναρτήσεων και της ταυτοτικής συνάρτησης, μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα ότι κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{C}$ και ότι η παράγωγος είναι κι αυτή πολυωνυμική συνάρτηση: αν $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, τότε $p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1}$.

Παράδειγμα 5.1.5. Κάθε ρητή συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της και η παράγωγός της είναι κι αυτή ρητή συνάρτηση.

Παράδειγμα 5.1.6. Αν $h(z) = (z^2 - 3z + 2)^{15} - 3(z^2 - 3z + 2)^2$, τότε, από τον κανόνα αλυσίδας, $h'(z) = \big(15(z^2 - 3z + 2)^{14} - 6(z^2 - 3z + 2)\big)(2z - 3)$.

Τέλος έχουμε τον κανόνα αντίστροφης συνάρτησης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.4. *Έστω ότι η $f : A \to B$ είναι ένα-προς-ένα στο A και επί του B, οπότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : B \to A$. Έστω ότι το z_0 είναι εσωτερικό σημείο του A και ότι το $w_0 = f(z_0)$ είναι εσωτερικό σημείο του B. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0 και $f'(z_0) \neq 0$ και η f^{-1} είναι συνεχής στο w_0, τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο w_0 και*

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Απόδειξη. Γράφουμε $w = f(z)$ και $z = f^{-1}(w)$ και σκεφτόμαστε ότι, επειδή η f^{-1} είναι συνεχής στο w_0, ισχύει $z = f^{-1}(w) \to f^{-1}(w_0) = z_0$ καθώς $w \to w_0$. Επομένως:

$$\lim_{w \to w_0} \tfrac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \to z_0} \tfrac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \lim_{z \to z_0} \tfrac{1}{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}} = \tfrac{1}{f'(z_0)}.$$

Άρα η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στον w_0 και $(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και z_0 εσωτερικό σημείο του A. Η f χαρακτηρίζεται* ***αναλυτική*** *στο z_0 αν υπάρχει $r > 0$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $D(z_0; r)$ (και, επομένως, $D(z_0; r) \subseteq A$).*

Παρατηρήστε ότι η έννοια της αναλυτικότητας είναι ισχυρότερη από την έννοια της παραγωγισιμότητας: για να είναι αναλυτική η συνάρτηση σε ένα σημείο πρέπει να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό αλλά και σε όλα τα γειτονικά σημεία.

Παράδειγμα 5.1.7. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 5.1.8. Κάθε ρητή συνάρτηση είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Πράγματι, έστω η ρητή συνάρτηση $r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ και έστω $z_1, \dots, z_n$ οι ρίζες του πολυωνύμου $q(z)$, οπότε το πεδίο ορισμού της $r(z)$ είναι το $A = \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$. Γνωρίζουμε ότι η $r(z)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A και παρατηρούμε ότι το A είναι ανοικτό σύνολο. Τότε για κάθε $z_0 \in A$ υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(z_0; r) \subseteq A$, οπότε η $r(z)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $D(z_0; r)$ και, επομένως, η $r(z)$ είναι αναλυτική στο z_0.

Παράδειγμα 5.1.9. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τύπο $f(z) = \overline{z}$. Θεωρούμε οποιοδήποτε z_0 και θα αποδείξουμε ότι το

$$\lim_{z\to z_0} \tfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \tfrac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0}$$

δεν υπάρχει, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο z_0.
Αν υπάρχει το όριο του $\frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0}$ καθώς το z πλησιάζει το z_0, τότε θα υπάρχει *και θα έχει την ίδια τιμή* και το όριο του $\frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0}$ καθώς το z πλησιάζει το z_0 *πάνω στην οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το* z_0 και, επίσης, θα υπάρχει *και θα έχει την ίδια τιμή* και το όριο του $\frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0}$ καθώς το z πλησιάζει το z_0 *πάνω στην κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το* z_0. Αν $z_0 = x_0 + iy_0$, τότε το πρώτο από τα δυο αυτά όρια είναι

$$\lim_{x\to x_0} \tfrac{\overline{(x+iy_0)}-\overline{(x_0+iy_0)}}{(x+iy_0)-(x_0+iy_0)} = \lim_{x\to x_0} \tfrac{x-x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} 1 = 1$$

και το δεύτερο όριο είναι

$$\lim_{y\to y_0} \tfrac{\overline{(x_0+iy)}-\overline{(x_0+iy_0)}}{(x_0+iy)-(x_0+iy_0)} = \lim_{y\to y_0} \tfrac{-iy+iy_0}{iy-iy_0} = \lim_{y\to y_0}(-1) = -1.$$

Επειδή τα δυο αυτά όρια δεν είναι ίσα, συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει το $\lim_{z\to z_0} \frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0}$ και, επομένως, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο z_0. Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο, οπότε δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο.

Παράδειγμα 5.1.10. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τύπο $f(z) = |z|^2$.
Είναι

$$\lim_{z\to 0} \tfrac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{z\to 0} \tfrac{|z|^2}{z} = \lim_{z\to 0} \overline{z} = 0.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0) = 0$.
Θεωρούμε οποιοδήποτε $z_0 \neq 0$ και θα αποδείξουμε ότι το

$$\lim_{z\to z_0} \tfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \tfrac{|z|^2-|z_0|^2}{z-z_0}$$

δεν υπάρχει, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο z_0.
Αν υπάρχει το όριο του $\frac{|z|^2-|z_0|^2}{z-z_0}$ καθώς το z πλησιάζει το z_0, τότε θα υπάρχει *και θα έχει την ίδια τιμή* και το όριο του $\frac{|z|^2-|z_0|^2}{z-z_0}$ καθώς το z πλησιάζει το z_0 *πάνω στην οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το* z_0 και, επίσης, θα υπάρχει *και θα έχει την ίδια τιμή* και το όριο του $\frac{|z|^2-|z_0|^2}{z-z_0}$ καθώς το z πλησιάζει το z_0 *πάνω στην κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το* z_0. Αν $z_0 = x_0 + iy_0$, τότε το πρώτο από τα δυο αυτά όρια είναι

$$\lim_{x\to x_0} \tfrac{|x+iy_0|^2-|x_0+iy_0|^2}{(x+iy_0)-(x_0+iy_0)} = \lim_{x\to x_0} \tfrac{x^2-{x_0}^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(x+x_0) = 2x_0$$

και το δεύτερο όριο είναι

$$\lim_{y\to y_0} \frac{|x_0+iy|^2-|x_0+iy_0|^2}{(x_0+iy)-(x_0+iy_0)} = \lim_{y\to y_0} \frac{y^2-y_0{}^2}{iy-iy_0} = -i\lim_{y\to y_0}(y+y_0) = -2iy_0.$$

Επειδή $z_0 \neq 0$, τα δυο αυτά όρια δεν είναι ίσα. Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{z\to z_0} \frac{|z|^2-|z_0|^2}{z-z_0}$ και, επομένως, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο z_0. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη μόνο στο 0, οπότε δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Το σύνολο των σημείων στα οποία η f είναι αναλυτική ονομάζεται* ***σύνολο αναλυτικότητας*** *της f.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.5. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και έστω $B \subseteq A$ το σύνολο των σημείων στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε το σύνολο αναλυτικότητας της f είναι το εσωτερικό του B. Ειδικώτερα, το σύνολο αναλυτικότητας της f είναι ανοικτό σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω U το σύνολο αναλυτικότητας της f.
Αν $z \in U$, τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $D(z; r)$, οπότε $D(z; r) \subseteq B$. Άρα ο z είναι εσωτερικό σημείο του B, δηλαδή $z \in B^o$.
Αντιστρόφως, αν $z \in B^o$, τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(z; r) \subseteq B$, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $D(z; r)$. Άρα η f είναι αναλυτική στο z, δηλαδή $z \in U$.
Άρα $U = B^o$. □

Παράδειγμα 5.1.11. Το σύνολο αναλυτικότητας κάθε πολυωνυμικής συνάρτησης είναι το $\mathbb{C}$.

Παράδειγμα 5.1.12. Το σύνολο αναλυτικότητας κάθε ρητής συνάρτησης είναι το πεδίο ορισμού της.

Παράδειγμα 5.1.13. Όπως είδαμε στα παραδείγματα 5.1.9 και 5.1.10, το σύνολο αναλυτικότητας της $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τύπο $f(z) = \overline{z}$ καθώς και της $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τύπο $f(z) = |z|^2$ είναι το κενό σύνολο.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq A$. Η f χαρακτηρίζεται* ***αναλυτική στο*** *Ω αν είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του Ω η, ισοδύναμα, αν το Ω περιέχεται στο σύνολο αναλυτικότητας της f.*

Προφανώς, το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο Ω στο οποίο η f είναι αναλυτική είναι το σύνολο αναλυτικότητας της f. Επίσης, είναι σαφές ότι, *αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο ενός ανοικτού συνόλου Ω, τότε η f είναι αναλυτική στο Ω*. Πράγματι, για κάθε $z \in \Omega$ υπάρχει $r > 0$ ώστε $D(z; r) \subseteq \Omega$. Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $D(z; r)$, οπότε είναι αναλυτική στο z. Δηλαδή, η f είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του Ω, οπότε είναι αναλυτική στο Ω.

Ασκήσεις.

5.1.1. Ελέγξτε την παραγωγισιμότητα των συναρτήσεων $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ και $|z|$ στα σημεία του $\mathbb{C}$.

5.1.2. Έστω ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Ορίζουμε το σύνολο $\Omega^* = \{z \,|\, \overline{z} \in \Omega\}$ και τη συνάρτηση $f^* : \Omega^* \to \mathbb{C}$ με τύπο $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$ για κάθε $z \in \Omega^*$.
Αποδείξτε ότι, αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο $z_0 \in \Omega$, τότε η f^* είναι παραγωγίσιμη στο $\overline{z_0} \in \Omega^*$.

5.1.3. Έστω ανοικτά σύνολα $U, V \subseteq \mathbb{C}$ και συναρτήσεις $f : V \to U$, $g : U \to \mathbb{C}$, $h : V \to \mathbb{C}$ ώστε η h να είναι 1-1 στο V και $h = g \circ f$. Αν η h είναι παραγωγίσιμη στο $w_0 \in V$, αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $z_0 = f(w_0)$, αν $g'(z_0) \neq 0$ και αν η f είναι συνεχής στο w_0, αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο w_0 και ότι $f'(w_0) = \frac{h'(w_0)}{g'(z_0)}$.

5.2 Οι εξισώσεις Cauchy - Riemann.

Τώρα θα συσχετίσουμε την παραγωγισιμότητα μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{C}$ (ως συνάρτηση του z) σε κάποιο εσωτερικό σημείο z_0 του A με τις μερικές παραγώγους των $u = \operatorname{Re} f : A \to \mathbb{R}$ και $v = \operatorname{Im} f : A \to \mathbb{R}$ (ως συναρτήσεις του (x, y)) στο ίδιο σημείο (x_0, y_0).

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και $z_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A και έστω u, v το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f στο A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0, τότε οι u, v έχουν μερικές παραγώγους ως προς x και y στο (x_0, y_0) και ισχύει*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{5.1}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το

$$\lim_{z \to z_0} \tfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \tag{5.2}$$

και έστω

$$f'(z_0) = \mu + i\nu, \qquad \mu, \nu \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

Επειδή υπάρχει το όριο του $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ καθώς το z πλησιάζει το z_0, τότε θα υπάρχει *και θα έχει την ίδια τιμή* και το όριο του $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ καθώς το z πλησιάζει το z_0 *πάνω στην οριζόντια ευθεία που διέρχεται από το* z_0 και, επίσης, θα υπάρχει *και θα έχει την ίδια τιμή* και το όριο του $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ καθώς το z πλησιάζει το z_0 *πάνω στην κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το* z_0.
Άρα από την (5.2) έχουμε, αντιστοίχως,

$$\lim_{x \to x_0} \tfrac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = f'(z_0), \qquad \lim_{y \to y_0} \tfrac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{iy - iy_0} = f'(z_0). \tag{5.4}$$

Από το πρώτο όριο στην (5.4) και από την (5.3) βρίσκουμε αμέσως

$$\lim_{x \to x_0} \tfrac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x - x_0} = \mu + i\nu,$$

οπότε, χωρίζοντας τα όρια του πραγματικού μέρους και του φανταστικού μέρους, έχουμε

$$\lim_{x \to x_0} \tfrac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} = \mu, \qquad \lim_{x \to x_0} \tfrac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} = \nu,$$

δηλαδή

$$\tfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \mu, \qquad \tfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \nu. \tag{5.5}$$

Με τον ίδιο τρόπο, από το δεύτερο όριο στην (5.4) και από την (5.3) βρίσκουμε

$$\lim_{y \to y_0} \tfrac{u(x_0, y) + iv(x_0, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{iy - iy_0} = \mu + i\nu,$$

οπότε, χωρίζοντας τα όρια του πραγματικού μέρους και του φανταστικού μέρους, έχουμε

$$\lim_{y \to y_0} \tfrac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} = \mu, \qquad \lim_{x \to x_0} \tfrac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} = -\nu,$$

δηλαδή

$$\tfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = \mu, \qquad \tfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\nu. \tag{5.6}$$

Συγκρίνοντας τις (5.5) και (5.6) παίρνουμε τις (5.1). □

Οι δυο ισότητες (5.1) ονομάζονται **εξισώσεις** ή **σύστημα εξισώσεων Cauchy - Riemann** στο σημείο (x_0, y_0). Συνοπτικά: εξισώσεις ή σύστημα εξισώσεων (C-R).

Παρατηρήστε ότι, αν η f είναι παραγωγίσιμη στον z_0 τότε από τις (5.3), (5.5) και (5.6) στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.1 συνεπάγεται

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Το αντίστροφο του Θεωρήματος 5.1 ισχύει αλλά με επιπλέον υποθέσεις πέρα από τις εξισώσεις (C-R) και αποτελεί το Θεώρημα 5.2.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.2. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ και $z_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A και έστω u, v το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f στο A. Αν οι u, v έχουν μερικές παραγώγους ως προς x και y σε κάθε σημείο (x, y) κάποιου δίσκου με κέντρο (x_0, y_0) και αν αυτές οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς στο (x_0, y_0) και αν ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) στο (x_0, y_0), τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (C-R) της (5.1), ορίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς μ και ν ως εξής:

$$\mu = \tfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \tfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \qquad \nu = -\tfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \tfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{5.7}$$

Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή οι $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ είναι συνεχείς στο εσωτερικό σημείο (x_0, y_0) του A, υπάρχει $r > 0$ ώστε να ισχύει

$$\left|\tfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) - \mu\right| < \tfrac{\epsilon}{4}, \quad \left|\tfrac{\partial u}{\partial y}(x, y) + \nu\right| < \tfrac{\epsilon}{4} \qquad \text{για κάθε } \ (x, y) \in D((x_0, y_0); r). \tag{5.8}$$

Θεωρούμε οποιοδήποτε σημείο $(x, y) \in D((x_0, y_0); r)$ και γράφουμε

$$u(x, y) - u(x_0, y_0) = u(x, y) - u(x_0, y) + u(x_0, y) - u(x_0, y_0). \tag{5.9}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού, υπάρχει x' ανάμεσα στους x, x_0 ώστε

$$u(x, y) - u(x_0, y) = \tfrac{\partial u}{\partial x}(x', y)(x - x_0) \tag{5.10}$$

και υπάρχει y' ανάμεσα στους y, y_0 ώστε

$$u(x_0, y) - u(x_0, y_0) = \tfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y')(y - y_0). \tag{5.11}$$

Προσέχουμε ότι οι x', y' εξαρτώνται από τους x, y. Παρατηρούμε, όμως, ότι τα σημεία (x', y), (x_0, y') ανήκουν στον $D((x_0, y_0); r)$. Άρα, λόγω των (5.8), ισχύει

$$\left|\tfrac{\partial u}{\partial x}(x', y) - \mu\right| < \tfrac{\epsilon}{2}, \qquad \left|\tfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y') + \nu\right| < \tfrac{\epsilon}{2}. \tag{5.12}$$

Συνδυάζοντας τις (5.9), (5.10) και (5.11), βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
u(x, y) &- u(x_0, y_0) - \big(\mu(x - x_0) - \nu(y - y_0)\big) \\
&= \big(u(x, y) - u(x_0, y) - \mu(x - x_0)\big) + \big(u(x_0, y) - u(x_0, y_0) + \nu(y - y_0)\big) \\
&= \big(\tfrac{\partial u}{\partial x}(x', y) - \mu\big)(x - x_0) + \big(\tfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y') + \nu\big)(y - y_0)
\end{aligned}$$

οπότε, λόγω των (5.12),

$$\begin{aligned}
\big|u(x, y) &- u(x_0, y_0) - \big(\mu(x - x_0) - \nu(y - y_0)\big)\big| \\
&\le \left|\tfrac{\partial u}{\partial x}(x', y) - \mu\right||x - x_0| + \left|\tfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y') + \nu\right||y - y_0| \\
&< \tfrac{\epsilon}{4}|x - x_0| + \tfrac{\epsilon}{4}|y - y_0| \\
&< \tfrac{\epsilon}{2}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, εργαζόμενοι με τη συνάρτηση v, βρίσκουμε ότι η αντίστοιχη της (5.13) σχέση είναι η

$$\big|v(x, y) - v(x_0, y_0) - \big(\nu(x - x_0) + \mu(y - y_0)\big)\big| < \tfrac{\epsilon}{2}\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \tag{5.14}$$

Οι σχέσεις (5.13) και (5.14) ισχύουν για κάθε $(x, y) \in D((x_0, y_0); r)$.
Τώρα παρατηρούμε ότι οι παραστάσεις μέσα στις απόλυτες τιμές των αριστερών μερών των (5.13) και (5.14) είναι, αντιστοίχως, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού

$$f(z) - f(z_0) - (\mu + i\nu)(z - z_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) - (\mu + i\nu)\big((x - x_0) + i(y - y_0)\big).$$

Επομένως, από τις (5.13) και (5.14) έχουμε αμέσως ότι

$$|f(z) - f(z_0) - (\mu + i\nu)(z - z_0)| < \epsilon\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \epsilon|z - z_0|$$

για κάθε $z \in D(z_0; r)$ και, επομένως,

$$\left|\tfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - (\mu + i\nu)\right| < \epsilon \qquad \text{για κάθε } \ z \in D(z_0; r).$$

Άρα

$$\lim_{z\to z_0} \tfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \mu + i\nu,$$

οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0 και $f'(z_0) = \mu + i\nu$. □

Παράδειγμα 5.2.1. Θα ξαναδούμε το παράδειγμα 5.1.3 στο πλαίσιο των εξισώσεων (C-R). Θεωρούμε την $f(z) = z^2$ και γράφουμε $f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, οπότε

$$u(x, y) = \text{Re}\, f(x, y) = x^2 - y^2, \qquad v(x, y) = \text{Im}\, f(x, y) = 2xy.$$

Βρίσκουμε

$$\tfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \tfrac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -2y, \quad \tfrac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 2y, \quad \tfrac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 2x$$

και βλέπουμε ότι οι μερικές παράγωγοι ορίζονται και είναι συνεχείς σε ολόκληρο το επίπεδο και ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) σε κάθε σημείο του επιπέδου. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.2, η $f(z) = z^2$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του επιπέδου και

$$f'(z) = \tfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\tfrac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 2x + i2y = 2z.$$

Παράδειγμα 5.2.2. Τώρα θα ξαναδούμε το παράδειγμα 5.1.9 στο νέο πλαίσιο. Θεωρούμε την $f(z) = \overline{z}$. Γράφουμε $f(z) = \overline{x + iy} = x - iy$, οπότε

$$u(x, y) = \text{Re}\, f(x, y) = x, \qquad v(x, y) = \text{Im}\, f(x, y) = -y.$$

Οι μερικές παράγωγοι

$$\tfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 1, \quad \tfrac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0, \quad \tfrac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0, \quad \tfrac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -1$$

δεν ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) σε κανένα σημείο (x, y). Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1, η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο και, επομένως, δεν είναι αναλυτική σε κανένα σημείο.

Παράδειγμα 5.2.3. Και τώρα πίσω στο παράδειγμα 5.1.10. Θεωρούμε την $f(z) = |z|^2$ και γράφουμε $f(z) = |x + iy|^2 = x^2 + y^2$, οπότε

$$u(x, y) = \text{Re}\, f(x, y) = x^2 + y^2, \qquad v(x, y) = \text{Im}\, f(x, y) = 0.$$

Οι μερικές παράγωγοι είναι

$$\tfrac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \tfrac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2y, \quad \tfrac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 0, \quad \tfrac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0$$

και ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) μόνο στο σημείο $(0, 0)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1, η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο εκτός, *ίσως*, του σημείου 0. Τώρα, επειδή οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς και ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) στο σημείο $(0, 0)$, από το Θεώρημα 5.2 συνεπάγεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και

$$f'(0) = \tfrac{\partial u}{\partial x}(0, 0) + i\tfrac{\partial v}{\partial x}(0, 0) = 0 + i0 = 0.$$

Παράδειγμα 5.2.4. Θεωρούμε την $f(z) = (\mathrm{Re}\, z)^2$. Γράφουμε $f(z) = (\mathrm{Re}\,(x+iy))^2 = x^2$, οπότε

$$u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(x,y) = x^2, \qquad v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(x,y) = 0.$$

Οι μερικές παράγωγοι είναι

$$\tfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2x, \quad \tfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0, \quad \tfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0, \quad \tfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Αυτές ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) μόνο στα σημεία $(0,y)$ με $y \in \mathbb{R}$. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.1, η f δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο εκτός, *ίσως*, στα σημεία $(0,y)$ του φανταστικού άξονα. Τώρα, επειδή οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς και ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) σε κάθε σημείο $(0,y)$ με $y \in \mathbb{R}$, από το Θεώρημα 5.2 συνεπάγεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε τέτοιο σημείο.
Άρα το σύνολο των σημείων στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη είναι η ευθεία των φανταστικών αριθμών. Επειδή το εσωτερικό αυτής της ευθείας (όπως κάθε ευθείας) είναι το κενό σύνολο, το σύνολο αναλυτικότητας της f είναι κενό.

Παράδειγμα 5.2.5. Θα δούμε τώρα ότι η υπόθεση της συνέχειας των μερικών παραγώγων στο σημείο (x_0, y_0) είναι απαραίτητη στο Θεώρημα 5.2.
Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Τότε είναι

$$u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(x,y) = 0.$$

Είναι προφανές ότι

$$\tfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0, \qquad \tfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0,$$

οπότε οι μερικές παράγωγοι της v υπάρχουν και είναι συνεχείς σε κάθε (x,y).
Για τις μερικές παραγώγους της u στο $(0,0)$ υπολογίζουμε

$$\tfrac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \tfrac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$

$$\tfrac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \tfrac{u(0,y)-u(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Ο υπολογισμός των μερικών παραγώγων της u στα άλλα σημεία είναι απλός και προκύπτει ότι

$$\tfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \tfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Βλέπουμε ότι οι μερικές παράγωγοι της u υπάρχουν σε κάθε (x,y) και είναι συνεχείς σε κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ αλλά *δεν είναι συνεχείς* στο $(0,0)$. Πράγματι, αν η $\frac{\partial u}{\partial x}$ ήταν συνεχής στο $(0,0)$, θα ίσχυε

$$\tfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \to 0$$

καθώς το (x,y) πλησιάζει το $(0,0)$ και, επομένως, και καθώς το (x,y) πλησιάζει το $(0,0)$ *πάνω στην ευθεία με εξίσωση* $y = x$. Δηλαδή, θα ίσχυε

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{x^3}{(x^2+x^2)^{3/2}} = 0$$

το οποίο είναι, φυσικά, λάθος!
Θα δούμε τώρα ότι η f *δεν είναι παραγωγίσιμη* στο 0. Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο 0 θα υπήρχε το όριο

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(xy)/\sqrt{x^2+y^2}}{x+iy}.$$

Το όριο αυτό θα είχε την ίδια τιμή με το όριο του $\frac{(xy)/\sqrt{x^2+y^2}}{x+iy}$ καθώς το (x,y) πλησιάζει το $(0,0)$ *πάνω σε μια οποιαδήποτε ευθεία που διέρχεται από το σημείο* 0. Θεωρούμε μια τέτοια ευθεία με εξίσωση $y=ax$ και βλέπουμε ότι, αν $a\neq 0$, το αντίστοιχο όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x\cdot ax)/\sqrt{x^2+(ax)^2}}{x+iax}=\frac{a}{(1+ia)\sqrt{1+a^2}}\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$$

δεν υπάρχει καν.

Τέος, έχουμε ένα πόρισμα του Θεωρήματος 5.2 το οποίο ουσιαστικά δίνει στο Θεώρημα 5.2 τη μορφή με την οποία συνήθως εφαρμόζεται.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.6. *Έστω $f:A\to\mathbb{C}$, έστω u,v το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f στο A και έστω ανοικτό σύνολο $\Omega\subseteq A$. Αν οι u,v έχουν μερικές παραγώγους οι οποίες είναι συνεχείς και ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) σε κάθε σημείο του Ω, τότε η f είναι αναλυτική στο Ω.*

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιοδήποτε σημείο z του Ω και κάποιον αντίστοιχο ανοικτό δίσκο με κέντρο το z και ο οποίος περιέχεται στο Ω (υπάρχει τέτοιος δίσκος, επειδή το Ω είναι ανοικτό σύνολο). Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.2, η f είναι παραγωγίσιμη στο z. Δηλαδή, η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του Ω και, επειδή το Ω είναι ανοικτό, η f είναι αναλυτική στο Ω. $\square$

Ασκήσεις.

5.2.1. Ξαναδείτε την άσκηση 5.1.1 στο πλαίσιο των εξισώσεων (C-R).

5.2.2. [α] Αποδείξτε ότι η

$$F(x,y)=\sqrt{|xy|}$$

ικανοποιεί τις εξισώσεις (C-R) στο 0 αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

[β] Αποδείξτε ότι η

$$G(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{αν } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{αν } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ικανοποιεί τις εξισώσεις (C-R) στο 0, ότι το $\frac{G(z)-G(0)}{z-0}$ έχει όριο όταν το $z\to 0$ πάνω σε οποιαδήποτε ευθεία που περιέχει το 0, αλλά ότι η G δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

5.2.3. Έστω $f:A\to\mathbb{C}$ και $z_0=(x_0,y_0)$ εσωτερικό σημείο του A, έστω u,v το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f στο A και έστω ότι οι u,v έχουν μερικές παραγώγους ως προς x και y σε κάθε σημείο (x,y) κάποιου δίσκου με κέντρο (x_0,y_0) και ότι αυτές οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς στο (x_0,y_0).

[α] Αν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{z\to z_0}\mathrm{Re}\,\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0.

[β] Αν υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το $\lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|$, αποδείξτε ότι είτε η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0 είτε η $\overline{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0.

5.2.4. Έστω ανοικτό και συνεκτικό $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ και f αναλυτική στο Ω. Στα παρακάτω χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της άκησης 2.4.6.

[α] Έστω ότι ισχύει $\mathrm{Re}\,f=0$ στο Ω. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο Ω.

[β] Γενικότερα, έστω ότι υπάρχει ευθεία l ώστε να ισχύει $f(z)\in l$ για κάθε $z\in\Omega$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο Ω.

[γ] Τι συμβαίνει αν στο [β], αντί για ευθεία l, υποθέσουμε ότι υπάρχει κύκλος C ώστε να ισχύει $f(z)\in C$ για κάθε $z\in\Omega$;

5.3 Παραγωγισιμότητα και συμμορφία.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : A \to \mathbb{C}$ συνεχής στο A και έστω καμπύλη $\gamma : [a,b] \to A$. Δηλαδή η τροχιά της γ περιέχεται στο πεδίο ορισμού της f. Τότε ορίζουμε τη συνάρτηση*

$$f(\gamma) = f \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{C},$$

η οποία είναι συνεχής στο $[a,b]$. Άρα η $f(\gamma)$ είναι καμπύλη και την ονομάζουμε **εικόνα της** γ **μέσω της** f.

Τώρα, θεωρούμε μια συνάρτηση

$$f : A \to \mathbb{C}$$

και εσωτερικό σημείο z_0 του A. Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0, ότι

$$f(z_0) = w_0, \qquad f'(z_0) \neq 0.$$

Θεωρούμε και οποιαδήποτε καμπύλη

$$\gamma : [t_0, b) \to A, \qquad \gamma(t_0) = z_0.$$

Δηλαδή, η καμπύλη γ έχει αρχή το σημείο z_0 και η τροχιά της περιέχεται στο A. Επειδή έχουμε συμφωνήσει ότι

$$\gamma'(t_0) \neq 0,$$

η γ έχει εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο z_0.
Τώρα, ορίζεται η καμπύλη

$$f(\gamma) : [t_0, b) \to \mathbb{C},$$

η εικόνα της γ μέσω της f, η οποία έχει αρχή το σημείο

$$f(\gamma)(t_0) = (f \circ \gamma)(t_0) = f(\gamma(t_0)) = f(z_0) = w_0$$

και το εφαπτόμενο διάνυσμά της στο σημείο w_0 είναι το

$$f(\gamma)'(t_0) = (f \circ \gamma)'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0) \neq 0. \tag{5.15}$$

Από την ισότητα (5.15) έχουμε δυο συμπεράσματα. Το πρώτο είναι ότι

$$|f(\gamma)'(t_0)| = |f'(z_0)||\gamma'(t_0)|.$$

Δηλαδή, το μέτρο του εφαπτόμενου διανύσματος της $f(\gamma)$ στην αρχή της w_0 είναι ίσο με το μέτρο του εφαπτόμενου διανύσματος της γ στην αρχή της z_0 πολλαπλασιασμένο με τον παράγοντα $|f'(z_0)| > 0$. Συνοπτικά, λέμε ότι:
Η f πολλαπλασιάζει τα μέτρα των εφαπτόμενων διανυσμάτων στο σημείο z_0 με τον παράγοντα $|f'(z_0)| > 0$ ή, ισοδύναμα, ότι *η f επιμηκύνει τα εφαπτόμενα διανύσματα στο σημείο z_0 κατά τον παράγοντα $|f'(z_0)| > 0$.*

Το δεύτερο συμπέρασμα είναι ότι

$$\arg f(\gamma)'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma'(t_0). \tag{5.16}$$

Δηλαδή, το όρισμα του εφαπτόμενου διανύσματος της $f(\gamma)$ στην αρχή της w_0 είναι ίσο με το όρισμα του εφαπτόμενου διανύσματος της γ στην αρχή της z_0 αυξημένο κατά τον αριθμό $\arg(f'(z_0))$. Συνοπτικά, λέμε ότι:
Η f αυξάνει τα ορίσματα των εφαπτόμενων διανυσμάτων στο σημείο z_0 κατά τη γωνία $\arg(f'(z_0))$ ή, ισοδύναμα, ότι *η f περιστρέφει τα εφαπτόμενα διανύσματα στο σημείο z_0 κατά την γωνία $\arg(f'(z_0))$.*

Παρατηρήστε ότι η επιμήκυνση και η περιστροφή των εφαπτόμενων διανυσμάτων στο σημείο z_0 είναι ομοιόμορφη για όλα αυτά τα διανύσματα: *ανεξάρτητα από την κατεύθυνσή τους όλα τα εφαπτόμενα διανύσματα επιμηκύνονται κατά τον ίδιο παράγοντα και περιστρέφονται κατά την ίδια γωνία*. Αφού, λοιπόν, δυο τέτοια εφαπτόμενα διανύσματα περιστρέφονται κατά την ίδια γωνία, συνεπάγεται, προφανώς, ότι η μεταξύ τους γωνία παραμένει αμετάβλητη! Ας το δούμε πιο αναλυτικά με καμπύλες.

Ας θεωρήσουμε δυο καμπύλες γ από τις παραπάνω, έστω γ_1 και γ_2. Η γωνία ανάμεσα στα εφαπτόμενα διανύσματα των γ_1 και γ_2 στο z_0 είναι η

$$\arg {\gamma_2}'(t_0)) - \arg {\gamma_1}'(t_0))$$

και η γωνία ανάμεσα στα εφαπτόμενα διανύσματα των $f(\gamma_1)$ και $f(\gamma_2)$ στο w_0 είναι η

$$\arg f(\gamma_2)'(t_0) - \arg f(\gamma_1)'(t_0).$$

Από την (5.16) για τις γ_1 και γ_2 βρίσκουμε ότι

$$\arg f(\gamma_2)'(t_0) - \arg f(\gamma_1)'(t_0) = \arg {\gamma_2}'(t_0) - \arg {\gamma_1}'(t_0),$$

δηλαδή ότι η γωνία ανάμεσα στα εφαπτόμενα διανύσματα των $f(\gamma_1)$ και $f(\gamma_2)$ στο w_0 είναι ίση με τη γωνία ανάμεσα στα εφαπτόμενα διανύσματα των γ_1 και γ_2 στο z_0. Συνοπτικά, λέμε ότι:
Η f αφήνει αμετάβλητες τις γωνίες ανάμεσα σε εφαπτόμενα διανύσματα στο σημείο z_0.

Αυτή η τελευταία ιδιότητα της f ονομάζεται **συμμορφία** της f στον z_0 και ισχύει, όπως είδαμε, με την υπόθεση ότι η f είναι παραγωγίσιμη στον z_0 και ότι $f'(z_0) \neq 0$.

Ασκήσεις.

5.3.1. Θεωρήστε την αναλυτική συνάρτηση $w = az + b$ με $a \neq 0$.

[α] Αποδείξτε ότι είναι ένα-προς-ένα στο z-επίπεδο και επί του w-επιπέδου.

[β] Αποδείξτε ότι απεικονίζει ευθείες και κύκλους στο z-επίπεδο σε ευθείες και κύκλους, αντιστοίχως, στο w-επίπεδο.

[γ] Θεωρήστε δυο ευθείες του z-επιπέδου με εξισώσεις $kx + ly = m$ και $k'x + l'y = m'$. Ποιά είναι η ισοδύναμη συνθήκη ώστε οι δυο ευθείες να τέμνονται; Κάτω από αυτήν τη συνθήκη βρείτε το σημείο τομής και εκφράστε τη γωνία των ευθειών στο σημείο τομής τους. Κατόπιν βρείτε τις εξισώσεις των εικόνων των δυο ευθειών στο w-επίπεδο και κάντε τα ίδια με αυτές. Επιβεβαιώστε έτσι ότι η $w = az + b$ αφήνει αμετάβλητες τις γωνίες των τεμνομένων ευθειών.

[δ] Αν θέλετε να δουλέψετε στο $\widehat{\mathbb{C}}$ σε ποιό σημείο του επεκτεταμένου w-επιπέδου πρέπει να απεικονίζει η συνάρτηση το ∞ του επεκτεταμένου z-επιπέδου; Αποδείξτε ότι τότε είναι ένα-προς-ένα στο επεκτεταμένο z-επίπεδο και επί του επεκτεταμένου w-επιπέδου. Με αυτήν την έννοια ερμηνεύστε το συμπέρασμα του [β] ως εξής: η συνάρτηση απεικονίζει γενικευμένους κύκλους του επεκτεταμένου z-επιπέδου σε γενικευμένους κύκλους του επεκτεταμένου w-επιπέδου.

5.3.2. Θεωρήστε την αναλυτική συνάρτηση $w = z^2$.

[α] Με οποιαδήποτε σταθερά $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$, θεωρήστε την υπερβολή $x^2 - y^2 = u_0$ και την υπερβολή $2xy = v_0$ στο z-επίπεδο (με $z = x + iy$). Τέμνονται και σε πόσα σημεία; Ποιά είναι η γωνία τους στα σημεία τομής τους;

[β] Με οποιαδήποτε σταθερά $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ με $x_0, y_0 \neq 0$, θεωρήστε την παραβολή $u = \frac{1}{4{y_0}^2}v^2 - {y_0}^2$ και την παραβολή $u = -\frac{1}{4{x_0}^2}v^2 + {x_0}^2$ στο w-επίπεδο (με $w = u + iv$). Τέμνονται και σε πόσα σημεία; Ποιά είναι η γωνία τους στα σημεία τομής τους;

5.3.3. Έστω $f : \Omega \to A$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και $\phi : A \to \mathbb{C}$ συνεχής στο σύνολο $A \subseteq \mathbb{C}$. Έστω καμπύλη γ στο Ω και $f(\gamma)$ η εικόνα της στο A μέσω της f. Αποδείξτε ότι $\int_{f(\gamma)} \phi(w)\, dw = \int_\gamma \phi(f(z)) f'(z)\, dz$.

5.4 Η εκθετική συνάρτηση.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Για κάθε* $z = x + iy$ *με* $x, y \in \mathbb{R}$ *ορίζουμε*

$$\exp z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Αν $z \in \mathbb{R}$, δηλαδή αν $z = x + i0$ με $x \in \mathbb{R}$, τότε $\exp z = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x = e^z$. Γι αυτό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο e^z αντί του $\exp z$ χωρίς κίνδυνο αντίφασης ανάμεσα στο σύμβολο e^z όπως το ορίσαμε μόλις τώρα και στο σύμβολο e^z όπως το έχουμε ορίσει στον Απειροστικό Λογισμό στην περίπτωση που ο z είναι πραγματικός. Δηλαδή, ορίζουμε

$$e^z = \exp z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Ας δούμε μερικές ιδιότητες. Αν $z = x + iy$ με $x, y \in \mathbb{R}$, τότε $|e^z| = |e^x||\cos y + i \sin y| = e^x$, δηλαδή

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$$

και $\arg(e^z) = y + k2\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$, δηλαδή

$$\arg(e^z) = \mathrm{Im}\, z + k2\pi \qquad \text{με } k \in \mathbb{Z}.$$

Επίσης $\overline{e^z} = e^x(\cos y - i \sin y) = e^x(\cos(-y) + i \sin(-y)) = e^{\overline{z}}$, οπότε

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}.$$

Μια βασική ιδιότητα του e^z είναι η εξής. Αν $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ με $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, τότε, βάσει των ιδιοτήτων της εκθετικής συνάρτησης στο $\mathbb{R}$ και των τριγονομετρικών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1 + x_2}(\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) = e^{z_1 + z_2}, \end{aligned}$$

διότι $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$. Άρα

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$

Μια άλλη βασική ιδιότητα είναι η εξής.

$$e^{z_2} = e^{z_1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad z_2 - z_1 = k2\pi i \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}.$$

Πράγματι, αν $z_2 - z_1 = k2\pi i$ με $k \in \mathbb{Z}$, τότε

$$e^{z_2} = e^{z_1} e^{k2\pi i} = e^{z_1}(\cos(k2\pi) + i \sin(k2\pi)) = e^{z_1}.$$

Αντιστρόφως, έστω $e^{z_2} = e^{z_1}$ και $z_2 - z_1 = x + iy$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε

$$e^x(\cos y + i \sin y) = e^{z_2 - z_1} = \tfrac{e^{z_2}}{e^{z_1}} = 1$$

και, επομένως,

$$e^x = 1, \qquad \cos y = 1, \qquad \sin y = 0.$$

Συνεπάγεται $x = 0$ και $y = k2\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. Άρα $z_2 - z_1 = k2\pi i$ με $k \in \mathbb{Z}$.

Βλέπουμε, δηλαδή, ότι η εκθετική συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο $2\pi i$ και, επομένως, δεν είναι ένα-προς-ένα.

Ο αριθμός 0 δεν είναι τιμή της εκθετικής συνάρτησης, διότι για κάθε $z = x + iy$ είναι $|e^z| = e^x > 0$. Από την άλλη μεριά, κάθε $w \neq 0$ είναι τιμή της εκθετικής συνάρτησης. Για να το αποδείξουμε λύνοντας την $e^z = w$ ως προς z, θεωρούμε οποιαδήποτε πολική αναπαράσταση

$$w = r(\cos\theta + i \sin\theta)$$

του w και, αφού γράψουμε $z = x + iy$, έχουμε

$$e^z = w$$
$$\Updownarrow$$
$$e^x(\cos y + i \sin y) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$\Updownarrow$$
$$e^x = r, \qquad \cos y = \cos\theta, \qquad \sin y = \sin\theta$$
$$\Updownarrow$$
$$x = \ln r, \qquad y = \theta + k2\pi \quad \text{με } k \in \mathbb{Z},$$

όπου με $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συμβολίζουμε τη γνωστή από τον Απειροστικό Λογισμό λογαριθμική συνάρτηση στο $(0, +\infty)$. Άρα, για κάθε $w \neq 0$, η εξίσωση $e^z = w$ έχει τις άπειρες λύσεις

$$z = \ln r + i(\theta + 2\pi k) \qquad \text{με } \ k \in \mathbb{Z}$$

ή, ισοδύναμα,

$$z = \ln|w| + i \arg w.$$

Συνοψίζουμε:

$$e^z = w \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = \ln|w| + i\arg w.$$

Θα μελετήσουμε τώρα την αναλυτικότητα της εκθετικής συνάρτησης

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της $\exp z$ είναι

$$u(x, y) = \text{Re } \exp(x, y) = e^x \cos y, \qquad v(x, y) = \text{Im } \exp(x, y) = e^x \sin y.$$

Άρα οι u, v έχουν μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y,$$

οι οποίες είναι συνεχείς και ικανοποιούν τις εξισώσεις (C-R) στο $\mathbb{C}$. Επομένως, η exp είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$.

Θα δούμε, τώρα, πώς η εκθετική συνάρτηση $w = e^z$ απεικονίζει διάφορα σημεία και σχήματα του z-επιπέδου σε σημεία και σχήματα του w-επιπέδου. Συμβολίζουμε: $z = x+iy$ και $w = u+iv$ με $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.

Αν το $y \in \mathbb{R}$ είναι σταθερό και το x διατρέχει το $\mathbb{R}$, δηλαδή αν το $z = x + iy$ διατρέχει την οριζόντια ευθεία h_y στο z-επίπεδο $\mathbb{C}$ η οποία τέμνει τον y-άξονα στο σημείο $(0, y)$ τότε το $w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ διατρέχει την ημιευθεία r_y στο w-επίπεδο $\mathbb{C}$, η οποία έχει κορυφή το 0 (δεν περιέχει το 0) και σχηματίζει γωνία y με τον θετικό u-ημιάξονα. Επίσης, αν το σημείο z κινείται πάνω στην οριζόντια ευθεία h_y από τα αριστερά προς τα δεξιά, δηλαδή αν το x αυξάνεται από το $-\infty$ προς το $+\infty$, τότε το αντίστοιχο σημείο $w = e^z$ κινείται πάνω στην ημιευθεία r_y από το 0 προς το ∞. Αν το y αυξηθεί κατά Δy, δηλαδή αν η οριζόντια ευθεία h_y μετακινηθεί προς τα πάνω, τότε η αντίστοιχη ημιευθεία r_y θα περιστραφεί με τη θετική φορά περιστροφής γύρω από το 0 κατά γωνία Δy. Αν $0 < \Delta y < 2\pi$, τότε η οριζόντια ζώνη στο z-επίπεδο ανάμεσα στις ευθείες h_y και $h_{y+\Delta y}$ θα απεικονιστεί στην γωνία στο w-επίπεδο ανάμεσα στις ημιευθείες r_y και $r_{y+\Delta y}$ (η οποία διαγράφεται πηγαίνοντας από την πρώτη ημιευθεία στη δεύτερη με τη θετική φορά περιστροφής). Αν $\Delta y = 2\pi$, τότε οι ημιευθείες r_y και $r_{y+\Delta y}$ συμπίπτουν και τότε η (ανοικτή) οριζόντια ζώνη στο z-επίπεδο ανάμεσα στις ευθείες h_y και $h_{y+\Delta y}$ θα απεικονιστεί σε ολόκληρο το w-επίπεδο εκτός της ημιευθεία $r_y = r_{y+\Delta y}$ (και εκτός του 0, φυσικά). Αν η ζώνη περιέχει μια τουλάχιστον από τις συνοριακές ευθείες της, τότε η εικόνα της θα είναι ολόκληρο το w-επίπεδο (εκτός του 0, φυσικά). Αν $\Delta y > 2\pi$, τότε η οριζόντια ζώνη στο z-επίπεδο ανάμεσα στις ευθείες h_y και $h_{y+\Delta y}$ θα απεικονιστεί σε ολόκληρο το w-επίπεδο (εκτός του 0, φυσικά) και "με επικάλυψη".

Αν το $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερό και το y διατρέχει το $\mathbb{R}$, δηλαδή αν το σημείο $z = x + iy$ διατρέχει την κατακόρυφη ευθεία v_x στο z-επίπεδο $\mathbb{C}$ η οποία τέμνει τον x-άξονα στο σημείο $(x, 0)$, τότε το $w = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ διατρέχει τον κύκλο $C(0; e^x)$, ας τον πούμε c_x, στο w-επίπεδο $\mathbb{C}$. Επίσης, αν το σημείο z κινείται πάνω στην κατακόρυφη ευθεία v_x από τα κάτω προς τα πάνω, δηλαδή αν το y αυξάνεται από το $-\infty$ προς το $+\infty$, τότε το αντίστοιχο σημείο $w = e^z$ κινείται πάνω στον κύκλο c_x διαγράφοντάς τον άπειρες φορές με τη θετική φορά περιστροφής. Αν το y αυξάνεται σε ένα διάστημα μήκους 2π, τότε το σημείο $w = e^z$ διαγράφει ολόκληρο τον κύκλο c_x μια φορά με τη θετική φορά περιστροφής. Αν το y αυξάνεται σε ένα διάστημα μήκους $\Delta y < 2\pi$, τότε το $w = e^z$ διαγράφει με τη θετική φορά περιστροφής ένα τόξο του κύκλου γωνίας Δy. Ενώ, αν $\Delta y > 2\pi$, τότε το $w = e^z$ διαγράφει με τη θετική φορά περιστροφής ολόκληρο τον κύκλο c_x "με επικάλυψη". Αν το x αυξηθεί κατά Δx, δηλαδή αν η κατακόρυφη ευθεία v_x μετακινηθεί προς τα δεξιά, τότε ο αντίστοιχος κύκλος c_x με ακτίνα e^x θα μεγαλώσει και θα γίνει ο κύκλος $c_{x+\Delta x}$ με ακτίνα $e^{x+\Delta x} = e^x e^{\Delta x}$. Η αρχική ακτίνα θα πολλαπλασιαστεί κατά τον παράγοντα $e^{\Delta x} > 1$. Η κατακόρυφη ζώνη στο z-επίπεδο ανάμεσα στις ευθείες v_x και $v_{x+\Delta x}$ θα απεικονιστεί στον δακτύλιο στο w-επίπεδο ανάμεσα στους κύκλους c_x και $c_{x+\Delta x}$.

Τα προηγούμενα μπορούν να συνδυαστούν. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

$$\Pi = \Pi(x_1, y_1; x_2, y_2) = \{x + iy \,|\, x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2\}$$

στο z-επίπεδο με πλευρές παράλληλες στους άξονες. Το Π είναι η τομή της οριζόντιας ζώνης ανάμεσα στις οριζόντιες ευθείες h_{y_1} και h_{y_2} και της κατακόρυφης ζώνης ανάμεσα στις κατακόρυφες ευθείες v_{x_1} και v_{y_2}. Αν υποθέσουμε ότι $(0 <)y_2 - y_1 < 2\pi$, τότε το Π θα απεικονιστεί στο w-επίπεδο στο "κυκλικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο"

$$R = R(0; e^{x_1}, e^{x_2}; y_1, y_2) = \{re^{i\theta} \,|\, e^{x_1} < r < e^{x_2}, y_1 < \theta < y_2\},$$

το οποίο είναι η τομή της γωνίας ανάμεσα στις ημιευθείες r_{y_1} και r_{y_2} (η οποία διαγράφεται πηγαίνοντας από την πρώτη ημιευθεία στη δεύτερη με τη θετική φορά περιστροφής) και του δακτύλιου ανάμεσα στους κύκλους c_{x_1} και c_{x_2} (με ακτίνες e^{x_1} και e^{x_2}, αντιστοίχως). Αν υποθέσουμε ότι $y_2 - y_1 = 2\pi$, τότε το "κυκλικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο" R θα είναι ο δακτύλιος

$$R(0; e^{x_1}, e^{x_2}) = \{re^{i\theta} \,|\, e^{x_1} < r < e^{x_2}\}$$

χωρίς το ευθύγραμμο τμήμα που ανήκει στην κοινή ημιευθεία $r_{y_1} = r_{y_2}$. Φυσικά, αν το αρχικό Π στο z-επίπεδο περιέχει μια τουλάχιστον από τις οριζόντιες πλευρές του, τότε η εικόνα R στο w-επίπεδο θα είναι ολόκληρος ο δακτύλιος $R = R(0; e^{x_1}, e^{x_2})$. Τέλος, αν υποθέσουμε ότι $y_2 - y_1 > 2\pi$, τότε το αρχικό Π στο z-επίπεδο θα απεικονιστεί στο w-επίπεδο σε ολόκληρο τον δακτύλιο $R = R(0; e^{x_1}, e^{x_2})$ "με επικάλυψη".

Ασκήσεις.

5.4.1. Αποδείξτε ότι ισχύει $|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}$ για κάθε z.

5.4.2. Έστω $z \to \infty$ πάνω σε μια οποιαδήποτε ημιευθεία. Ανάλογα με την ημιευθεία, μελετήστε την ύπαρξη του $\lim e^z$ στο $\overline{\mathbb{C}}$. Από ποιό χαρακτηριστικό της ημιευθείας εξαρτάται η ύπαρξη και η τιμή του ορίου;

5.4.3. Βρείτε τις εικόνες μέσω της εκθετικής συνάρτησης των: $\{x+iy \,|\, a < x < b, \theta < y < \theta+\pi\}$, $\{x + iy \,|\, a < x < b, \theta < y < \theta + 2\pi\}$, $\{x + iy \,|\, x < b, \theta < y < \theta + \pi\}$, $\{x + iy \,|\, x < b, \theta < y < \theta + 2\pi\}$, $\{x + iy \,|\, a < x, \theta < y < \theta + \pi\}$, $\{x + iy \,|\, a < x, \theta < y < \theta + 2\pi\}$.

5.4.4. Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\cos z = \tfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\,, \quad \sin z = \tfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\,, \quad \tan z = \tfrac{\sin z}{\cos z}\,, \quad \cot z = \tfrac{\cos z}{\sin z}\,.$$

[α] Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις αυτές αποτελούν επεκτάσεις στο $\mathbb{C}$ των γνωστών τριγωνομετρικών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$. Ποιά είναι τα πεδία ορισμού τους; Ποιά είναι τα σύνολα των περιόδων τους; Αποδείξτε τις σχέσεις

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w, \quad \cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w,$$

$$|\cos(x+iy)|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y, \quad |\sin(x+iy)|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y.$$

[β] Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι αναλυτικές στα πεδία ορισμού τους και βρείτε τις παραγώγους τους.

[γ] Μελετήστε τη συνάρτηση $w = \sin z$ στην κατακόρυφη ζώνη $\{x+iy \,|\, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$ και τη συνάρτηση $w = \cos z$ στην κατακόρυφη ζώνη $\{x+iy \,|\, 0 < x < \pi\}$. Πώς απεικονίζονται τα διάφορα οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα (μήκους π) και οι κατακόρυφες ευθείες αυτών των δυο ζωνών από τις αντίστοιχες δυο συναρτήσεις;

5.5 Η λογαριθμική συνάρτηση.

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε, για κάθε $w \neq 0$, την ισοδυναμία

$$e^z = w \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = \ln|w| + i \arg w.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Συμβολίζουμε*

$$\log w = \ln|w| + i \arg w \qquad \text{για κάθε } \ w \neq 0$$

και το σύμβολο $\log w$ *ονομάζεται* **λογάριθμος** *του* w.

Επειδή το $\arg w$ δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένο και έχει άπειρες τιμές οι οποίες ανά δύο διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π, συνεπάγεται ότι και το $\log w$ δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένο και έχει άπειρες τιμές οι οποίες ανά δύο διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του $i2\pi$. Όλες οι τιμές του $z = \log w$ έχουν το ίδιο πραγματικό μέρος $x = \ln|w|$ και επομένως βρίσκονται πάνω στην ίδια κατακόρυφη ευθεία v_x με εξίσωση $x = \ln|w|$. Αυτές οι τιμές του $\log w$ αποτελούν σημεία της ευθείας v_x και τα βρίσκουμε αν βρούμε ένα από αυτά: όλα τα άλλα προκύπτουν από αυτό που πήραμε πηγαίνοντας προς τα πάνω και προς τα κάτω κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Επομένως, κάθε κατακόρυφο ευθ. τμήμα πάνω στην ευθεία v_x, το οποίο έχει μήκος 2π και περιέχει ένα μόνο από τα δυο άκρα του, περιέχει ακριβώς μια τιμή-σημείο του $z = \log w$. Επομένως, κάθε οριζόντια ζώνη, η οποία έχει κατακόρυφο πλάτος 2π και η οποία περιέχει μόνο μία από τις δυο συνοριακές ευθείες της (την πάνω ή την κάτω), περιέχει, για κάθε $w \neq 0$, ακριβώς μία τιμή-σημείο του $z = \log w$. Ειδικώτερα, αν πάρουμε οποιονδήποτε θ_0 και θεωρήσουμε την οριζόντια ζώνη

$$Z_{\theta_0} = \{x+iy \,|\, \theta_0 < y \leq \theta_0 + 2\pi\} \quad \text{ή} \quad Z_{\theta_0} = \{x+iy \,|\, \theta_0 \leq y < \theta_0 + 2\pi\},$$

τότε στην ζώνη Z_{θ_0} περιέχεται ακριβώς μια τιμή του $z = \log w = \ln|w| + i \arg w$: εκείνη που έχει φανταστικό μέρος y ίσο με εκείνη την (μοναδική) τιμή θ του $\arg w$ για την οποία ισχύει, αντιστοίχως,

$$\theta_0 < \theta \leq \theta_0 + 2\pi \quad \text{ή} \quad \theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi.$$

Αν επιλέξουμε την ζώνη που ορίζεται από την γωνία $\theta_0 = -\pi$ και περιέχει την πάνω συνοριακή ευθεία της, δηλαδή την

$$Z_{\theta_0} = \{x+iy \,|\, -\pi < y \leq \pi\},$$

τότε εκείνη τη (μοναδική) τιμή του $z = \log w$, η οποία περιέχεται σε αυτήν την ζώνη, την ξεχωρίζουμε με τον εξής ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Συμβολίζουμε*

$$\operatorname{Log} w = \ln|w| + i \operatorname{Arg} w \qquad \textit{για κάθε} \;\; w \neq 0$$

και το σύμβολο Log w ονομάζεται **πρωτεύων λογάριθμος** *ή* **πρωτεύουσα τιμή του λογαρίθμου** *του w.*

Πράγματι, ο $\operatorname{Log} w$ είναι ακριβώς εκείνη η τιμή του $\log w$ που περιέχεται στην ζώνη $Z_{-\pi}$ αφού για το φανταστικό μέρος του ισχύει $-\pi < \operatorname{Arg} w \leq \pi$.

Επιστρέφοντας στην αρχική ισοδυναμία, βλέπουμε ότι γράφεται

$$e^z = w \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = \log w.$$

Δηλαδή, *οι τιμές του* $\log w$ *είναι ακριβώς όλες οι λύσεις της εξίσωσης* $e^z = w$

Παράδειγμα 5.5.1. Οι τιμές του λογαρίθμου του 1 είναι $\log 1 = \ln|1| + i(0 + k2\pi) = i2k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. Από αυτές η πρωτεύουσα τιμή είναι $\operatorname{Log} 1 = \ln|1| + i0 = 0$.
Οι τιμές του λογαρίθμου του -1 είναι $\log(-1) = \ln|-1| + i(\pi + k2\pi) = i(2k+1)\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. Από αυτές η πρωτεύουσα τιμή είναι $\operatorname{Log}(-1) = \ln|-1| + i\pi = i\pi$.
Οι τιμές του λογαρίθμου του i είναι $\log i = \ln|i| + i(\frac{\pi}{2} + k2\pi) = i(2k + \frac{1}{2})\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. Από αυτές η πρωτεύουσα τιμή είναι $\operatorname{Log} i = \ln|i| + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$.
Οι τιμές του λογαρίθμου του $-i$ είναι $\log(-i) = \ln|-i| + i(-\frac{\pi}{2} + k2\pi) = i(2k - \frac{1}{2})\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. Από αυτές η πρωτεύουσα τιμή είναι $\operatorname{Log}(-i) = \ln|-i| + i(-\frac{\pi}{2}) = -i\frac{\pi}{2}$.

Όπως έχουμε καταλάβει μέχρι τώρα, η εκθετική συνάρτηση $w = \exp z = e^z$ από το $\mathbb{C}$ επί του $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ δεν είναι ένα-προς-ένα. Μάλιστα, είναι *άπειρο-προς-ένα* αφού σε κάθε $w \neq 0$ αντιστοιχούν άπειρες τιμές του z. Άρα δεν μπορούμε να μιλάμε για αντίστροφη συνάρτηση, παρά μόνο μέσω του εξής μη συμβατικού ορισμού (πολύ συνηθισμένου σε ανάλογες περιπτώσεις στη Μιγαδική Ανάλυση).

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι η* **πλειότιμη λογαριθμική συνάρτηση**

$$\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$$

είναι η αντίστροφη συνάρτηση της εκθετικής $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Σύμφωνα με το συμβατικό ορισμό της έννοιας της συνάρτησης, η "συνάρτηση" που ορίσαμε δεν είναι συνάρτηση, διότι στο w δεν αντιστοιχεί μόνο μια τιμή $z = \log w$. Γι αυτό και λέμε *πλειότιμη συνάρτηση*. Αν θέλουμε να έχουμε αντίστροφη συνάρτηση της εκθετικής, πρέπει πρώτα να περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της ώστε να είναι (στο νέο πεδίο ορισμού) ένα-προς-ένα και κατόπιν να την αντιστρέψουμε. Κάτι παρόμοιο γίνεται σε πολλές περιπτώσεις στο Απειροστικό Λογισμό. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $y = x^2$ από το $(-\infty, +\infty)$ στο $[0, +\infty)$ δεν είναι ένα-προς-ένα στο $(-\infty, +\infty)$, οπότε την περιορίζουμε στο $[0, +\infty)$ (ένα μέρος του πεδίου ορισμού της), όπου η συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα και έχουμε την αντίστροφη συνάρτηση με τύπο $x = \sqrt{y}$ από το $[0, +\infty)$ στο $[0, +\infty)$ (με τη συμφωνία ότι το σύμβολο $\sqrt{y}$ παριστάνει την μη-αρνητική τετραγωνική ρίζα του y). Βέβαια, μπορούμε να περιορίσουμε την $y = x^2$ στο $(-\infty, 0]$ (ένα άλλο μέρος του πεδίου ορισμού της), όπου η συνάρτηση είναι πάλι ένα-προς-ένα και να έχουμε την αντίστροφη συνάρτηση με τύπο $x = -\sqrt{y}$ από το $[0, +\infty)$ στο $(-\infty, 0]$. Έτσι έχουμε *δυο* αντίστροφες συναρτήσεις της $y = x^2$ ανάλογα με το πεδίο ορισμού που θα επιλέξουμε και το οποίο θα γίνει το ανάλογο σύνολο τιμών της ανάλογης αντίστροφης συνάρτησης $x = \sqrt{y}$ ή $x = -\sqrt{y}$. Παλιότερα (αλλά ακόμη και τώρα) οι μαθηματικοί και τα μαθηματικά βιβλία μιλούσαν για μια *πλειότιμη συνάρτηση* με τύπο $x = \pm\sqrt{y}$ ή ακόμη και $x = \sqrt{y}$, χωρίς να προϋποθέτουν ότι το σύμβολο $\sqrt{y}$ χρησιμοποιείται μόνο για την μη-αρνητική τετραγωνική ρίζα. Υπήρχε λοιπόν μια γενικότερη έννοια συνάρτησης και ειδική περίπτωση ήταν η έννοια της *μονότιμης συνάρτησης*, δηλαδή η έννοια της *συνάρτησης* όπως τη μαθαίνουμε σήμερα. Άλλες ανάλογες περιπτώσεις στον Απειροστικό Λογισμό έχουμε με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ και τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις $x = \arccos y$, $x = \arcsin y$, $x = \arctan y$, $x = \operatorname{arccot} y$.

Τώρα θα περιγράψουμε πώς μπορούμε να ορίσουμε αντίστροφη συνάρτηση (με την αυστηρή έννοια) της εκθετικής περιορίζοντας κατάλληλα το πεδίο ορισμού της εκθετικής συνάρτησης. Για να καταλάβουμε, όμως, καλύτερα το τί θα ακολουθήσει θα ξαναγυρίσουμε στην $y = x^2$ του Απειροστικού Λογισμού. Όταν θεωρούμε την αντίστροφη συνάρτηση παίρνουμε ένα y στο $[0, +\infty)$ (το σύνολο τιμών της $y = x^2$) και βρίσκουμε ένα x τέτοιο ώστε $x^2 = y$. Υπάρχουν ακριβώς δυο τέτοια x, το $x = \sqrt{y}$ και το $x = -\sqrt{y}$. Άρα έχουμε δυο επιλογές για τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης: την επιλογή $x = \sqrt{y}$ για κάθε y στο $[0, +\infty)$ και την επιλογή $x = -\sqrt{y}$ για κάθε y στο $[0, +\infty)$. *Αυτό, όμως, δεν είναι καθόλου αλήθεια!!* Κάποιος μπορεί να κάνει άλλη επιλογή: να επιλέξει $x = \sqrt{y}$ για κάποια y στο $[0, +\infty)$ και $x = -\sqrt{y}$ για τα υπόλοιπα y στο $[0, +\infty)$, σχηματίζοντας, για παράδειγμα, την συνάρτηση με διπλό τύπο

$$x = \begin{cases} \sqrt{y}, & \text{αν } 0 \le y \le 1 \\ -\sqrt{y}, & \text{αν } 1 < y < +\infty \end{cases}$$

Και αυτή η τελευταία συνάρτηση *είναι* αντίστροφη συνάρτηση της $y = x^2$, αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της $y = x^2$ στο $(-\infty, -1) \cup [0, 1]$. Υπάρχουν άπειρες τέτοιες επιλογές ανάλογα με την επιλογή που θα κάνουμε κάθε φορά που βρίσκουμε μια τιμή του x, την $x = \sqrt{y}$ ή την $x = -\sqrt{y}$, για κάθε τιμή του y. Υπάρχει, όμως, ένα κριτήριο το οποίο περιορίζει τις επιλογές μας σε *ακριβώς δύο*: το κριτήριο της συνέχειας! Παρατηρήστε την συνάρτηση παραπάνω με τον διπλό τύπο: δεν είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, το $[0, +\infty)$. Αντιθέτως, η συνάρτηση με τύπο $x = \sqrt{y}$ για κάθε $y \in [0, +\infty)$ και η συνάρτηση με τύπο $x = -\sqrt{y}$ για κάθε $y \in [0, +\infty)$ είναι και οι δυο συνεχείς στο πεδίο ορισμού $[0, +\infty)$. Και γιατί έχουμε ακριβώς δύο επιλογές συνεχών αντίστροφων συναρτήσεων της $y = x^2$; Αυτό είναι άσκηση του Απειροστικού Λογισμού και θα την δούμε αμέσως τώρα. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι έχουμε κάποια αντίστροφη συνάρτηση $x = f(y)$ της $y = x^2$ με πεδίο ορισμού $[0, +\infty)$ (το σύνολο τιμών της $y = x^2$) η οποία είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$. Δηλαδή, είναι $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0, +\infty)$ και ισχύει $f(y)^2 = y$ για κάθε $y \in [0, +\infty)$. Η τιμή $f(0) = 0$ είναι μοναδική και ειδικά γι αυτήν μπορούμε να γράψουμε είτε $f(0) = \sqrt{0}$ είτε $f(0) = -\sqrt{0}$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $y_1, y_2 > 0$ ώστε $y_1 \neq y_2$ και $f(y_1) = \sqrt{y_1}$ και $f(y_2) = -\sqrt{y_2}$. Η f είναι συνεχής στο αντίστοιχο διάστημα $[y_1, y_2]$ ή $[y_2, y_1]$ και έχει τιμές με αντίθετο πρόσημο στα άκρα, οπότε θα υπάρχει κάποιο σημείο y του διαστήματος στο οποίο μηδενίζεται: $f(y) = 0$. Αυτό είναι άτοπο, διότι είναι $y > 0$ και πρέπει να είναι $f(y) = \sqrt{y}$ ή $f(y) = -\sqrt{y}$. Άρα δεν υπάρχουν τέτοια $y_1, y_2 > 0$. Επομένως, έχουμε ακριβώς δυο περιπτώσεις: *είτε ισχύει $f(y) = \sqrt{y}$ για κάθε $y > 0$ είτε ισχύει $f(y) = -\sqrt{y}$ για κάθε $y > 0$.* Προτρέχοντας ως προς την ορολογία, μπορούμε να λέμε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο *συνεχείς κλάδοι* της τετραγωνικής ρίζας στο $[0, +\infty)$, ο κλάδος $x = \sqrt{y}$ και ο κλάδος $x = -\sqrt{y}$.

Πάμε τώρα για ορισμό αντίστροφης της εκθετικής συνάρτησης.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$. Λέμε ότι η f είναι* **συνεχής κλάδος του λογαρίθμου** *στο σύνολο A αν*

(i) η f είναι συνεχής στο A και

(ii) για κάθε $w \in A$ η αντίστοιχη τιμή $z = f(w)$ είναι μια από τις τιμές του $\log w$ ή, ισοδύναμα, η $z = f(w)$ είναι λύση της εξίσωσης $e^z = \exp z = w$ ή, ισοδύναμα, ισχύει $e^{f(w)} = \exp f(w) = w$.

Το σύνολο A δεν μπορεί να περιέχει τον $w = 0$ διότι δεν ορίζεται τιμή του $\log 0$.

Η Πρόταση 5.7 δίνει αρκετά παραδείγματα συνεχών κλάδων του λογαρίθμου: είναι αυτά που χρησιμοποιούνται στην πράξη.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.7. *Θεωρούμε οποιονδήποτε θ_0, το αντίστοιχο σύνολο*

$$A_{\theta_0} = \{w = re^{i\theta} \,|\, 0 < r < +\infty, \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi\},$$

στο w-επίπεδο (δηλαδή το $\mathbb{C}$ χωρίς την ημιευθεία η οποία περιέχει το 0 και όλα τα w με γωνία θ_0) και την ανοικτή οριζόντια ζώνη

$$Z_{\theta_0} = \{x + iy \,|\, \theta_0 < y < \theta_0 + 2\pi\}$$

στο z-επίπεδο.
Σύμφωνα με προηγούμενη συζήτηση, για κάθε τιμή του w στο A_{θ_0} υπάρχει μοναδική τιμή του z στη ζώνη Z_{θ_0} ώστε $e^z = \exp z = w$. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$f : A_{\theta_0} \to Z_{\theta_0}$$

έτσι ώστε για κάθε $w \in A_{\theta_0}$ να είναι $f(w) = z$, όπου z είναι ακτιβώς αυτή η μοναδική τιμή του z στη ζώνη Z_{θ_0} ώστε $e^z = \exp z = w$.
Είναι προφανές ότι η f ικανοποιεί το (ii) του προηγούμενου ορισμού για το σύνολο A_{θ_0}. Η f είναι και συνεχής στο A_{θ_0}, οπότε ικανοποιεί και το (i) του προηγούμενου ορισμού. Άρα η f είναι συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο A_{θ_0}.

Απόδειξη. Έστω ότι η f δεν είναι συνεχής σε κάποιο w του A_{θ_0}. Τότε υπάρχει κάποια ακολουθία (w_n) στο A_{θ_0} για την οποία ισχύει

$$w_n \to w \qquad \text{και} \qquad f(w_n) \not\to f(w).$$

Το $f(w_n) \not\to f(w)$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(w_n) - f(w)| \geq \delta > 0$ για άπειρα n. Αυτά τα άπειρα n ορίζουν μια υποακολουθία της w_n και, τώρα, για απλούστευση όσων θα ακολουθήσουν, περιοριζόμαστε στην υποακολουθία και (αγνοώντας τους υπόλοιπους όρους της αρχικής ακολουθίας) ονομάζουμε (w_n) την υποακολουθία και έτσι έχουμε μια ακολουθία (w_n) στο σύνολο A_{θ_0} για την οποία ισχύει

$$w_n \to w \qquad \text{και} \qquad |f(w_n) - f(w)| \geq \delta > 0 \quad \text{για κάθε } n. \tag{5.17}$$

Θέτουμε, επίσης,

$$z = f(w) \qquad \text{και} \qquad z_n = f(w_n) \quad \text{για κάθε } n,$$

οπότε

$$e^z = w \qquad \text{και} \qquad e^{z_n} = w_n \quad \text{για κάθε } n \tag{5.18}$$

και η (5.17) ξαναγράφεται

$$w_n \to w \qquad \text{και} \qquad |z_n - z| \geq \delta > 0 \quad \text{για κάθε } n. \tag{5.19}$$

Επειδή $w_n, w \in A_{\theta_0}$, οι w_n, w έχουν πολικές αναπαραστάσεις

$$w = |w|e^{i\theta} \qquad \text{και} \qquad w_n = |w_n|e^{i\theta_n} \quad \text{για κάθε } n,$$

όπου

$$\theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi \qquad \text{και} \qquad \theta_0 < \theta_n < \theta_0 + 2\pi \quad \text{για κάθε } n.$$

Τώρα, επειδή το σύνολο τιμών της f είναι η ζώνη Z_{θ_0}, έχουμε ότι

$$z = \ln|w| + i\theta \qquad \text{και} \qquad z_n = \ln|w_n| + i\theta_n \quad \text{για κάθε } n.$$

Επειδή $w_n \to w$, συνεπάγεται $|w_n| \to |w|$ και, λόγω της συνέχειας της λογαριθμικής συνάρτησης του Απειροστικού Λογισμού, συνεπάγεται $\ln|w_n| \to \ln|w|$. Άρα η πραγματική ακολουθία $(\ln|w_n|)$ είναι φραγμένη. Επίσης, η πραγματική ακολουθία (θ_n) είναι φραγμένη, διότι περιέχεται στο διάστημα $(\theta_0, \theta_0+2\pi)$. Άρα η μιγαδική ακολουθία (z_n) είναι φραγμένη. Επομένως, από το Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass συνεπάγεται ότι υπάρχει υποακολουθία (z_{n_k}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο z' :

$$z_{n_k} \to z'. \tag{5.20}$$

Επειδή όλοι οι z_{n_k} ανήκουν στη ζώνη Z_{θ_0}, συνεπάγεται ότι ο z' είναι οριακό σημείο της ζώνης αυτής, οπότε ανήκει στην αντίστοιχη κλειστή ζώνη:

$$z' \in \overline{Z_{\theta_0}} = \{x + iy \,|\, \theta_0 \leq y \leq \theta_0 + 2\pi\}. \tag{5.21}$$

Για την αντίστοιχη (δηλαδή, με τους ίδιους δείκτες) υποακολουθία της (w_n) έχουμε, λόγω της (5.19),

$$w_{n_k} \to w.$$

Λόγω της συνέχειας της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης και λόγω των (5.18) και (5.20), συνεπάγεται

$$w_{n_k} = e^{z_{n_k}} \to e^{z'}$$

και, επομένως,

$$e^{z'} = w.$$

Πάλι λόγω της (5.18) έχουμε

$$e^{z'} = e^{z},$$

οπότε οι μιγαδικοί z' και z διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του $i2\pi$. Αυτομάτως καταλήγουμε σε άτοπο, διότι ο z ανήκει στην ανοικτή ζώνη Z_{θ_0}, ο z' ανήκει στην κλειστή ζώνη $\overline{Z_{\theta_0}}$ (δείτε την (5.21)) και οι ζώνες αυτές (ουσιαστικά, η ίδια ζώνη) έχουν πλάτος ακριβώς 2π.
Άρα η f είναι συνεχής σε κάθε w του A_{θ_0}. □

Επιλέγοντας, λοιπόν, ένα οποιοδήποτε πραγματικό θ_0, ορίζουμε έναν συνεχή κλάδο του λογαρίθμου $z = \log w$ με πεδίο ορισμού το σύνολο A_{θ_0} του w-επιπέδου και σύνολο τιμών τη ζώνη Z_{θ_0} του z-επιπέδου. Παρατηρήστε ότι αν, αντί του θ_0, θεωρήσουμε τον $\theta_0 + k2\pi$ με οποιονδήποτε $k \in \mathbb{Z}$, τότε το πεδίο ορισμού $A = A_{\theta_0+k2\pi}$ *μένει το ίδιο* (!) αλλά το σύνολο τιμών, δηλαδή η ζώνη $Z_{\theta_0+k2\pi}$ μετατοπίζεται προς τα πάνω ή προς τα κάτω κατά $k2\pi$. Οι ζώνες $Z_{\theta_0+k2\pi}$ με $k \in \mathbb{Z}$ είναι διαδοχικές και καλύπτουν ολόκληρο το z-επίπεδο (εκτός από τις συνοριακές ευθείες τους με εξισώσεις $y = k2\pi$). Συνοψίζουμε:

Αν από το w-επίπεδο αφαιρέσουμε μια οποιαδήποτε ημιευθεία με κορυφή το 0, τότε στο συμπληρωματικό ανοικτό σύνολο A ορίζονται άπειροι συνεχείς κλάδοι $z = \log w$ του λογαρίθμου. Καθένας από αυτούς απεικονίζει το A επί μιας συγκεκριμένης οριζόντιας ανοικτής ζώνης του z-επιπέδου πλάτους 2π. Οι διάφορες αυτές ζώνες, που αντιστοιχούν στους διάφορους κλάδους του λογαρίθμου (στο ίδιο σύνολο A), είναι ξένες ανά δύο, διαδοχικές και καλύπτουν το z-επίπεδο (εκτός από τις συνοριακές ευθείες τους). Φυσικά, αν αλλάξουμε την αρχική ημιευθεία η οποία καθορίζει το σύνολο A, τότε αλλάζουν και οι αντίστοιχες ζώνες και οι αντίστοιχοι συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου.

Παράδειγμα 5.5.2. Ένα πολύ συγκεκριμένο παράδειγμα συνεχούς κλάδου του λογαρίθμου έχουμε όταν πάρουμε $\theta_0 = -\pi$. Τότε το σύνολο

$$A_{-\pi}$$

είναι το w-επίπεδο εκτός του αρνητικού u-ημιάξονα (όπου $w = u + iv$) και το σύνολο τιμών του κλάδου του λογαρίθμου είναι η ζώνη

$$Z_{-\pi} = \{x + iy \,|\, -\pi < y < \pi\}.$$

Είναι φανερό ότι ο κλάδος αυτός είναι η συνάρτηση η οποία σε κάθε $w \in A$ αντιστοιχίζει την πρωτεύουσα τιμή $z = \operatorname{Log} w$ του $\log w$. Δηλαδή, έχουμε τον λεγόμενο **πρωτεύοντα κλάδο του λογαρίθμου**

$$\operatorname{Log} : A_{-\pi} \to Z_{-\pi}.$$

Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι στο ίδιο σύνολο $A_{-\pi}$ του w-επιπέδου, εκτός από τον πρωτεύοντα κλάδο του λογαρίθμου, ορίζονται άπειροι συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου. Καθένας από αυτούς απεικονίζει το $A_{-\pi}$ στην ανάλογη ζώνη $Z_{-\pi+k2\pi}$, η οποία είναι η $Z_{-\pi}$ μεταφερμένη κατακόρυφα κατά

$k2\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. Ο κλάδος αυτός προκύπτει από τον πρωτεύοντα κλάδο $z = \operatorname{Log} w$ προσθέτοντας τη σταθερά $ik2\pi$ (για να έχουμε κατακόρυφη μεταφορά κατά $k2\pi$) οπότε ο τύπος του είναι

$$z = \operatorname{Log} w + i2k\pi.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.8. *Έστω $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και $f : A \to \mathbb{C}$ η οποία είναι συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο σύνολο A. Αν το w_0 είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο του A, τότε η f είναι αυτομάτως παραγωγίσιμη στο w_0 και*

$$f'(w_0) = \frac{1}{w_0}.$$

Απόδειξη. Γράφουμε $z_0 = f(w_0)$ και $z = f(w)$ για κάθε $w \in A$. Επομένως, είναι $e^{z_0} = w_0$ και $e^z = w$. Επειδή η f είναι συνεχής, αν $w \to w_0$ συνεπάγεται $z \to z_0$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την παραγωγισιμότητα της εκθετικής συνάρτησης στο z_0, έχουμε ότι όταν $w \to w_0$, τότε

$$\tfrac{f(w)-f(w_0)}{w-w_0} = \tfrac{z-z_0}{e^z-e^{z_0}} = 1/\big(\tfrac{e^z-e^{z_0}}{z-z_0}\big) \to 1/(e^{z_0}) = 1/w_0.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο w_0 και $f'(w_0) = \frac{1}{w_0}$. □

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι αν η $f : A \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο σύνολο A, τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του A, δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του A. Και, επειδή το εσωτερικό του A είναι ανοικτό σύνολο, η f είναι *αναλυτική* στο εσωτερικό του A. Ειδικώτερα, και με πιο "χαλαρό" συμβολισμό:

Κάθε συνεχής κλάδος $z = \log w$ σε ανοικτό σύνολο A είναι αναλυτική συνάρτηση στο A και ισχύει

$$\frac{dz}{dw} = \frac{d \log w}{dw} = \frac{1}{w} \qquad \text{στο } A.$$

Γι αυτό κάθε συνεχής κλάδος του λογαρίθμου σε ανοικτό σύνολο A ονομάζεται και **αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου** *στο A.*

Παράδειγμα 5.5.3. Προηγουμένως ορίσαμε άπειρους συνεχείς κλάδους του λογαρίθμου στο ανοικτό σύνολο A, το οποίο προκύπτει αν από το w-επίπεδο αφαιρέσουμε μια οποιαδήποτε ημιευθεία με κορυφή το 0. Όλοι αυτοί οι κλάδοι είναι αναλυτικοί κλάδοι του λογαρίθμου στο A. Ειδικώτερα, ο πρωτεύων κλάδος του λογαρίθμου

$$\operatorname{Log} : A_{-\pi} \to Z_{-\pi}$$

είναι αναλυτικός στο $A_{-\pi}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.9. *Έστω $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και $f_1, f_2 : A \to \mathbb{C}$.*

[α] *Αν η f_1 είναι συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο A και ισχύει $f_2(w) - f_1(w) = ik2\pi$ στο A, όπου ο k είναι σταθερός (δηλαδή, ανεξάρτητος του w στο A) ακέραιος, τότε και η f_2 είναι συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο A.*

[β] *Αν, επιπλέον, το σύνολο A είναι συνεκτικό και αν οι f_1 και f_2 είναι συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου στο A, τότε ισχύει $f_2(w) - f_1(w) = ik2\pi$ στο A, όπου ο k είναι σταθερός (δηλαδή, ανεξάρτητος του w στο A) ακέραιος.*
Ειδικώτερα, αν οι f_1, f_2 έχουν την ίδια τιμή σε κάποιο $w_0 \in A$, τότε ταυτίζονται στο A.

Απόδειξη. [α] Η f_1 είναι συνεχής στο A και κάθε σταθερή συνάρτηση είναι συνεχής στο A. Άρα και η $f_2 = f_1 + ik2\pi$ είναι συνεχής στο A.
Επίσης, ισχύει $e^{f_1(w)} = w$ για κάθε $w \in A$. Άρα

$$e^{f_2(w)} = e^{f_1(w)+ik2\pi} = e^{f_1(w)}e^{ik2\pi} = w \cdot 1 = w$$

για κάθε $w \in A$. Άρα η f_2 είναι συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο A.

[β] Θεωρούμε τη συνάρτηση $k : A \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$k(w) = \tfrac{1}{i2\pi}(f_2(w) - f_1(w)) \qquad \text{για κάθε } \ w \in A.$$

Επειδή για κάθε $w \in A$ και οι δυο τιμές $f_2(w)$ και $f_1(w)$ είναι τιμές του $\log w$, συνεπάγεται ότι ο αριθμός $k(w)$ είναι ακέραιος. Άρα

$$k : A \to \mathbb{Z}.$$

Επίσης, επειδή και οι δυο συναρτήσεις f_1, f_2 είναι συνεχείς στο A, η k είναι συνεχής στο A.
Τώρα, η k είναι συνεχής *πραγματική* συνάρτηση στο συνεκτικό σύνολο A, οπότε έχει την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής. Αν υπάρχουν $w_1, w_2 \in A$ ώστε $k(w_1) \neq k(w_2)$ τότε η k πρέπει να έχει ως τιμές της κάθε πραγματικό αριθμό ανάμεσα στους $k(w_1)$ και $k(w_2)$, αλλά αυτό είναι αδύνατο διότι η k έχει μόνο ακέραιες τιμές. Άρα δεν υπάρχουν $w_1, w_2 \in A$ ώστε $k(w_1) \neq k(w_2)$ και, επομένως, η k είναι σταθερή συνάρτηση στο A. Δηλαδή, υπάρχει ένας σταθερός (δηλαδή, ανεξάρτητος του w στο A) ακέραιος k ώστε να ισχύει $\frac{1}{i2\pi}(f_2(w) - f_1(w)) = k$ ή, ισοδύναμα, $f_2(w) - f_1(w) = ik2\pi$ για κάθε $w \in A$.
Το τελευταίο συμπέρασμα είναι προφανές: αν ισχύει $f_2(w_0) = f_1(w_0)$, τότε, επειδή η $f_2 - f_1$ είναι σταθερή στο A, συνεπάγεται ότι ισχύει $f_2(w) - f_1(w) = f_2(w_0) - f_1(w_0) = 0$ για κάθε $w \in A$ οπότε $f_2(w) = f_1(w)$ για κάθε $w \in A$. □

Από την Πρόταση 5.9 έχουμε το εξής:
Αν στο συνεκτικό σύνολο A γνωρίζουμε έναν συνεχή κλάδο του λογαρίθμου, τότε παίρνουμε κάθε άλλο συνεχή κλάδο το λογαρίθμου στο A προσθέτοντας στον αρχικό μια οποιαδήποτε σταθερά της μορφής $ik2\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$. Δεν υπάρχουν άλλοι συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου στο A.

Μια παρατήρηση (και για τα επόμενα παραδείγματα). Όταν πρέπει να βρούμε έναν συνεχή κλάδο του λογαρίθμου σε ένα σύνολο A με μια δοσμένη τιμή z_0 σε ένα δοσμένο σημείο $w_0 \in A$, πρέπει να είναι εξασφαλισμένο ότι η τιμή z_0 είναι *αποδεκτή*. Θα πρέπει δηλαδή το z_0 να είναι μια από τις τιμές του $\log w_0$ ή, ισοδύναμα, $e^{z_0} = w_0$.

Παράδειγμα 5.5.4. Έστω $A = A_{-\pi}$ το w-επίπεδο εκτός του αρνητικού u-ημιάξονα (όπου $w = u + iv$). Θέλουμε να βρούμε συνεχή κλάδο του λογαρίθμου στο A με τιμή $z = 0$ για $w = 1$.
Στο A γνωρίζουμε ότι ο πρωτεύων κλάδος Log του λογαρίθμου είναι συνεχής κλάδος του λογαρίθμου και έχει τιμή $z = \operatorname{Log} 1 = 0$ για $w = 1$. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.9[β], επειδή το A είναι συνεκτικό, δεν υπάρχει άλλος τέτοιος συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο A.
Η απάντησή μας μπορεί να δοθεί και με (φαινομενικά) άλλο τρόπο. Θεωρούμε τις οριζόντιες ζώνες στο z-επίπεδο που αντιστοιχούν στο σύνολο A, δηλαδή τις

$$Z_{-\pi+k2\pi} = \{x + iy \,|\, -\pi + k2\pi < y < \pi + k2\pi\} \qquad \text{με } \ k \in \mathbb{Z}$$

και επιλέγουμε εκείνην η οποία περιέχει την τιμή $z = 0$. Η ζώνη αυτή είναι εκείνη που αντιστοιχεί στον $k = 0$, δηλαδή η

$$Z_{-\pi} = \{x + iy \,|\, -\pi < y < \pi\}.$$

Κατόπιν θεωρούμε τον συνεχή κλάδο f του λογαρίθμου που απεικονίζει το A στην ζώνη $Z_{-\pi}$ και ο τύπος του είναι

$$f(w) = \ln r + i\theta \qquad \text{για } \ w = re^{i\theta} \ \text{ και } \ r = |w| > 0, \ \ -\pi < \theta < \pi,$$

όπου θ είναι η μοναδική τιμή του ορίσματος $\arg w$ του w η οποία περιέχεται στο διάστημα $(-\pi, \pi)$. Και πάλι, σύμφωνα με την Πρόταση 5.9[β], επειδή το A είναι συνεκτικό, δεν υπάρχει άλλος τέτοιος συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο A.

Παράδειγμα 5.5.5. Έστω $A = A_{-\pi}$ το w-επίπεδο εκτός του αρνητικού u-ημιάξονα (όπου $w = u + iv$). Θέλουμε να βρούμε συνεχή κλάδο του λογαρίθμου στο A με τιμή $z = i4\pi$ για $w = 1$.
Θεωρούμε τις οριζόντιες ζώνες στο z-επίπεδο που αντιστοιχούν στο σύνολο A, δηλαδή τις

$$Z_{-\pi+k2\pi} = \{x + iy \,|\, -\pi + k2\pi < y < \pi + k2\pi\} \qquad \text{με } \ k \in \mathbb{Z}$$

και επιλέγουμε εκείνην η οποία περιέχει την τιμή $z = i4\pi$. Η ζώνη αυτή είναι εκείνη που αντιστοιχεί στον $k = 2$, δηλαδή η

$$Z_{3\pi} = \{x + iy \,|\, 3\pi < y < 5\pi\}.$$

Κατόπιν θεωρούμε τον συνεχή κλάδο f του λογαρίθμου που απεικονίζει το A στην ζώνη $Z_{3\pi}$ και ο τύπος του είναι

$$f(w) = \ln r + i\theta \qquad \text{για } \ w = re^{i\theta} \ \text{ και } \ r = |w| > 0, \ \ 3\pi < \theta < 5\pi,$$

όπου θ είναι η μοναδική τιμή του ορίσματος $\arg w$ του w η οποία περιέχεται στο διάστημα $(3\pi, 5\pi)$. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.9[β], επειδή το A είναι συνεκτικό, δεν υπάρχει άλλος τέτοιος συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο A.

Παράδειγμα 5.5.6. Έστω $A = A_0$ το w-επίπεδο εκτός του θετικού u-ημιάξονα (όπου $w = u+iv$). Θέλουμε να βρούμε συνεχή κλάδο του λογαρίθμου στο A με τιμή $z = i(\frac{\pi}{2} + 4\pi)$ για $w = i$. Θεωρούμε τις οριζόντιες ζώνες στο z-επίπεδο που αντιστοιχούν στο σύνολο A, δηλαδή τις

$$Z_{0+k2\pi} = \{x + iy \,|\, k2\pi < y < 2\pi + k2\pi\} \qquad \text{με } \ k \in \mathbb{Z}$$

και επιλέγουμε εκείνην η οποία περιέχει την τιμή $z = i(\frac{\pi}{2} + 4\pi)$. Η ζώνη αυτή είναι εκείνη που αντιστοιχεί στον $k = 2$, δηλαδή η

$$Z_{4\pi} = \{x + iy \,|\, 4\pi < y < 6\pi\}.$$

Κατόπιν θεωρούμε τον συνεχή κλάδο f του λογαρίθμου που απεικονίζει το A στην ζώνη $Z_{4\pi}$ και ο τύπος του είναι

$$f(w) = \ln r + i\theta \qquad \text{για } \ w = re^{i\theta} \ \text{ και } \ r = |w| > 0, \ \ 4\pi < \theta < 6\pi,$$

όπου θ είναι η μοναδική τιμή του ορίσματος $\arg w$ του w η οποία περιέχεται στο διάστημα $(4\pi, 6\pi)$. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.9[β], επειδή το A είναι συνεκτικό, δεν υπάρχει άλλος τέτοιος συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στο A.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.10. *Δεν ορίζεται συνεχής κλάδος του λογαρίθμου σε οποιονδήποτε κύκλο $C(0; r)$ με $r > 0$.*
Άρα δεν ορίζεται συνεχής κλάδος του λογαρίθμου σε κανένα σύνολο A το οποίο περιέχει κύκλο με κέντρο 0.

Απόδειξη. Έστω ότι ορίζεται συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στον κύκλο $C(0; r)$, δηλαδή

$$f : C(0; r) \to \mathbb{C}$$

η οποία είναι συνεχής στον $C(0; r)$ και για κάθε $w \in C(0; r)$ ισχύει $e^{f(w)} = w$.
Θεωρούμε τον πρωτεύοντα κλάδο Log του λογαρίθμου, ο οποίος είναι συνεχής συνάρτηση στο w-επίπεδο εκτός από τον αρνητικό u-ημιάξονα.
Το κοινό μέρος του συνόλου στο οποίο είναι ορισμένος ο Log και του κύκλου $C(0; r)$ είναι το

$$B = C(0; r) \setminus \{-r\}.$$

Άρα ο περιορισμός της f στο B και ο περιορισμός του Log στο B είναι δυο συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου στο B. Επειδή το B είναι συνεκτικό, υπάρχει (σταθερός) ακέραιος k ώστε να ισχύει

$$\operatorname{Log} w = f(w) + ik2\pi \qquad \text{για κάθε } \ w \in B. \tag{5.22}$$

Τώρα θεωρούμε δυο ακολουθίες στο B. Τις (w_n') και (w_n'') με τύπους

$$w_n' = re^{i(\pi - \pi/n)}, \qquad w_n'' = re^{i(-\pi + \pi/n)} \qquad \text{για κάθε } \ n.$$

Και οι δυο ακολουθίες “κινούνται” πάνω στον κύκλο $C(0;r)$ προς το σημείο $-r$. Η πρώτη είναι στο άνω ημικύκλιο και πλησιάζει το $-r$ και η δεύτερη είναι στο κάτω ημικύκλιο και πλησιάζει κι αυτή το $-r$.
Επειδή η f είναι ορισμένη και συνεχής σε ολόκληρο τον κύκλο $C(0;r)$, συνεπάγεται

$$f(w'_n) \to f(-r), \qquad f(w''_n) \to f(-r)$$

και, επομένως,

$$f(w'_n) - f(w''_n) \to 0.$$

Από την (5.22) συνεπάγεται

$$\operatorname{Log} w'_n - \operatorname{Log} w''_n \to 0.$$

Όμως,

$$\operatorname{Log} w'_n - \operatorname{Log} w''_n = \big(\ln r + i(\pi - \pi/n)\big) - \big(\ln r + i(-\pi + \pi/n)\big) = i(2\pi - 2\pi/n) \to i2\pi$$

και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα δεν ορίζεται συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στον κύκλο $C(0;r)$.
Αν ορίζεται συνεχής κλάδος f του λογαρίθμου σε κάποιο σύνολο A το οποίο περιέχει κύκλο με κέντρο 0, τότε ο περιορισμός της f στον κύκλο θα ήταν συνεχής κλάδος του λογαρίθμου στον κύκλο και αυτό, όπως είδαμε, είναι αδύνατο. □

Παράδειγμα 5.5.7. Δεν ορίζεται συνεχής κλάδος του λογαρίθμου σε δακτύλιο με κέντρο 0 ούτε, φυσικά, στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Ασκήσεις.

5.5.1. Βρείτε τις εικόνες μέσω του Log των συνόλων $\{w \,|\, r_1 \le |w| \le r_2\} \setminus [-r_2, -r_1]$, $\{w \,|\, 0 < |w| \le r_2\} \setminus [-r_2, 0)$, $\{w \,|\, r_1 \le |w| < +\infty\} \setminus (-\infty, -r_1]$.

5.5.2. Δουλέψτε με τα παρακάτω στις περιπτώσεις $\theta_0 = -\pi$ και $\theta_0 = 0$.

Θεωρήστε το σύνολο A_{θ_0}, δηλαδή το w-επίπεδο χωρίς την ημιευθεία η οποία περιέχει το 0 και τους w με γωνία θ_0. Θεωρήστε και θ_1, θ_2 με $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_0 + 2\pi$ καθώς και r_1, r_2 με $0 < r_1 < r_2 < +\infty$. Ζωγραφίστε το σύνολο $P = \{w = re^{i\theta} \,|\, r_1 < r < r_2, \theta_1 < \theta < \theta_2\}$ καθώς και τις εικόνες αυτού του συνόλου μέσω των διαφόρων συνεχών κλάδων του λογαρίθμου στο σύνολο A_{θ_0}. (Να χρησιμοποιήσετε τουλάχιστον τρεις τέτοιους κλάδους.)

5.5.3. Ζωγραφίστε τα σύνολα $P = \{w = re^{i\theta} \,|\, 1 < r < 2, -\frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}\}$ και $Q = \{w = re^{i\theta} \,|\, 1 < r < 2, \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4}\}$. Γνωρίζουμε ότι ορίζεται συνεχής κλάδος f του λογαρίθμου σε συγκεκριμένο σύνολο A μεγαλύτερο του P και συνεχής κλάδος g του λογαρίθμου σε συγκεκριμένο σύνολο B μεγαλύτερο του Q. (Ποιά είναι δυο τέτοια συγκεκριμένα σύνολα A και B;) Άρα οι f και g (δηλαδή, οι περιορισμοί τους στα P και Q) είναι συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου στα P και Q, αντιστοίχως.

Θεωρώντας, λοιπόν, δεδομένη την ύπαρξη δυο τέτοιων συνεχών κλάδων f και g του λογαρίθμου στα P και Q, αντιστοίχως, απαντήστε στο εξής ερώτημα: είναι δυνατόν να ταυτίζονται οι f και g στην τομή $P \cap Q$;

5.5.4. Αν ορίσουμε $w^a = e^{a \operatorname{Log} w}$ για κάθε $w \in D(0;1)$, αποδείξτε ότι $\lim_{x \to +\infty} \big(1 + \frac{z}{x}\big)^x = e^z$ για κάθε z. (Χρησιμοποιήστε ιδιότητες ορίων πραγματικών συναρτήσεων.)

5.5.5. Έστω $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Αν το A είναι συνεκτικό και αν f_1 και f_2 είναι δυο (διαφορετικοί) συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου στο A, αποδείξτε ότι $f_1(A) \cap f_2(A) = \emptyset$. (Παρατηρήστε πώς αυτό επιβεβαιώνεται στην ειδική περίπτωση που το A είναι το $\mathbb{C}$ εκτός από μια ημιευθεία με κορυφή 0 και που τότε οι διάφοροι συνεχείς κλάδοι του λογαρίθμου στο A απεικονίζουν το A σε ξένες ανά δύο οριζόντιες ζώνες.)

5.6 Η n-οστή δύναμη και οι n-οστές ρίζες.

Έστω $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. Η συνάρτηση

$$w = z^n$$

είναι, προφανώς, αναλυτική στο z-επίπεδο $\mathbb{C}$ και έχουμε ότι

$$w = z^n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0.$$

Για να δούμε τί γίνεται όταν $z \neq 0$ και $w \neq 0$ χρησιμοποιούμε πολικές αναπαραστάσεις των z και w. Θεωρούμε οποιεσδήποτε πολικές αναπαραστάσεις

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}, \qquad w = s(\cos\phi + i\sin\phi) = se^{i\phi}$$

και έχουμε

$$z^n = w$$

$$\Updownarrow$$

$$r^n e^{in\theta} = se^{i\phi}$$

$$\Updownarrow$$

$$r^n = s, \qquad n\theta = \phi + k2\pi \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Updownarrow$$

$$r = \sqrt[n]{r}, \qquad \theta = \tfrac{\phi}{n} + \tfrac{k}{n}2\pi \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}.$$

Άρα, για κάθε $w \neq 0$, η εξίσωση $z^n = w$ έχει τις λύσεις

$$z = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\phi+2\pi k}{n}} \qquad \text{με } \ k \in \mathbb{Z}$$

ή, ισοδύναμα,

$$z = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\arg w}{n}}.$$

Συνοψίζουμε:

$$z^n = w \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\arg w}{n}}.$$

Από αυτό το συμπέρασμα φαίνεται ότι η εξίσωση $z^n = w$ έχει άπειρες λύσεις ως προς z διότι το $\arg w$ έχει άπειρες τιμές, αλλά αυτό δεν είναι σωστό: θα δούμε ότι η παράσταση $e^{i\frac{\arg w}{n}}$ έχει ακριβώς n διαφορετικές τιμές. Πράγματι, αν ϕ είναι μια οποιαδήποτε, έστω σταθερή, τιμή του $\arg w$ και ϕ' είναι μια οποιαδήποτε άλλη τιμή του $\arg w$, έχουμε ότι $\phi' - \phi = m2\pi$ για κάποιον $m \in \mathbb{Z}$ και τότε

$$e^{i\frac{\phi'}{n}} = e^{i\frac{\phi}{n}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\phi'}{n} = \frac{\phi}{n} + k2\pi \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{m2\pi}{n} = k2\pi \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Updownarrow$$

$$m = nk \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}.$$

Βλέπουμε, δηλαδή, ότι ισχύει $e^{i\frac{\phi'}{n}} = e^{i\frac{\phi}{n}}$ αν και μόνο αν $\phi' - \phi = m2\pi$ και ο m είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του n. Άρα οι τιμές του m που δίνουν διαφορετικές ανά δύο τιμές του $e^{i\frac{\phi'}{n}}$ είναι ακριβώς οι $0, 1, \ldots, n-1$ και οι αντίστοιχες διαφορετικές ανά δύο τιμές του $e^{i\frac{\phi'}{n}}$ είναι οι

$$e^{i\frac{\phi+m2\pi}{n}} \qquad \text{με } m = 0, 1, \ldots, n-1$$

ή, πιο αναλυτικά,

$$e^{i\frac{\phi}{n}}, e^{i\frac{\phi}{n}+\frac{2\pi}{n}}, \ldots\ldots, e^{i\frac{\phi}{n}+(n-1)\frac{2\pi}{n}}.$$

Επομένως, όταν $z, w \neq 0$ η εξίσωση $z^n = w$ έχει ακριβώς n λύσεις ως προς z, τις

$$z = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\phi+m2\pi}{n}} \qquad \text{με } m = 0, 1, \ldots, n-1$$

ή, πιο αναλυτικά,

$$\sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\phi}{n}},\ \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\phi}{n}+\frac{2\pi}{n}}, \ldots\ldots,\ \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\phi}{n}+(n-1)\frac{2\pi}{n}},$$

όπου ϕ είναι μια οποιαδήποτε τιμή του $\arg w$, και βλέπουμε ότι όλες αυτές οι n λύσεις έχουν το ίδιο μέτρο $|z| = \sqrt[n]{|w|}$ και, με τη σειρά που τις έχουμε γράψει, καθεμιά από τη δεύτερη και μετά προκύπτει από την προηγούμενή της με στροφή κατά γωνία $\frac{2\pi}{n}$ και η πρώτη προκύπτει από την τελευταία πάλι με στροφή κατά γωνία $\frac{2\pi}{n}$. Άρα οι λύσεις της $z^n = w$ είναι οι κορυφές ενός κανονικού n-γώνου με κέντρο 0 και ακτίνα $\sqrt[n]{|w|}$.

Παράδειγμα 5.6.1. Αν $w = 1$, οι λύσεις της $z^n = 1$ ονομάζονται **n-οστές ρίζες της μονάδας**. Μια από τις τιμές του $\arg 1$ είναι η $\phi = 0$, οπότε οι n-οστές ρίζες της μονάδας είναι οι μιγαδικοί

$$e^{i\frac{m2\pi}{n}} \qquad \text{με } m = 0, 1, \ldots, n-1$$

ή, πιο αναλυτικά,

$$1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, \ldots\ldots, e^{i(n-1)\frac{2\pi}{n}}.$$

Η πρώτη μη-τετριμμένη από αυτές τις n-οστές ρίζες συμβολίζεται

$$\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

και ονομάζεται **πρωτεύουσα n-οστή ρίζα της μονάδας**. Προφανώς, όλες οι άλλες προκύπτουν από αυτήν ως εξής:

$$\omega_n{}^m \qquad \text{με } m = 0, 1, \ldots, n-1$$

ή, πιο αναλυτικά,

$$1, \omega_n, \ldots\ldots, \omega_n{}^{n-1}.$$

Βάσει του τελευταίου παραδείγματος, βλέπουμε ότι οι λύσεις της $z^n = w$ γράφονται

$$z_0\omega_n{}^m = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\phi}{n}}\omega_n{}^m \qquad \text{με } m = 0, 1, \ldots, n-1,$$

όπου $z_0 = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\phi}{n}}$ είναι μια από τις λύσεις αυτές, ή, πιο αναλυτικά,

$$z_0, z_0\omega_n, \ldots\ldots, z_0\omega_n{}^{n-1}.$$

Θα δούμε, τώρα, πώς η συνάρτηση $w = z^n$ απεικονίζει διάφορα σημεία και σχήματα του z-επιπέδου σε σημεία και σχήματα του w-επιπέδου. Συμβολίζουμε: $z = re^{i\theta}$ και $w = se^{i\phi}$, αφήνοντας κατά μέρος τους $z = 0$ και $w = 0$. Οδηγός μας θα είναι οι σχέσεις:

$$w = z^n \quad \Longleftrightarrow \quad |w| = |z|^n,\ \arg w = n \arg z$$

ή, ισοδύναμα,

$$w = z^n \quad \Longleftrightarrow \quad s = r^n, \;\; \phi = n\theta.$$

Αν το $\theta \in \mathbb{R}$ είναι σταθερό και το r διατρέχει το $(0, +\infty)$, δηλαδή αν το $z = re^{i\theta}$ διατρέχει την ημιευθεία r_θ στο z-επίπεδο $\mathbb{C}$, η οποία έχει κορυφή το 0 (δεν περιέχει το 0) και σχηματίζει γωνία θ με τον θετικό x-ημιάξονα, τότε το $w = z^n = r^n e^{in\theta}$ διατρέχει την ημιευθεία r_ϕ στο w-επίπεδο $\mathbb{C}$, η οποία έχει κορυφή το 0 (δεν περιέχει το 0) και σχηματίζει γωνία $\phi = n\theta$ με τον θετικό u-ημιάξονα. Επίσης, αν το σημείο z κινείται πάνω στην ημιευθεία r_θ από το 0 προς το ∞, δηλαδή αν το r αυξάνεται από το 0 προς το $+\infty$, τότε το αντίστοιχο σημείο $w = z^n$ κινείται πάνω στην ημιευθεία r_ϕ από το 0 προς το ∞. Αν το θ αυξηθεί κατά $\Delta\theta$, δηλαδή αν η ημιευθεία r_θ περιστραφεί με τη θετική φορά κατά γωνία $\Delta\theta$, τότε η αντίστοιχη ημιευθεία r_ϕ θα περιστραφεί με τη θετική φορά κατά γωνία $\Delta\phi = n\Delta\theta$. Αν $0 < \Delta\theta < \frac{2\pi}{n}$, τότε η γωνία στο z-επίπεδο ανάμεσα στις ημιευθείες r_θ και $r_{\theta+\Delta\theta}$ (η οποία διαγράφεται πηγαίνοντας από την πρώτη ημιευθεία στη δεύτερη με τη θετική φορά περιστροφής) θα απεικονιστεί στην γωνία στο w-επίπεδο ανάμεσα στις ημιευθείες r_ϕ και $r_{\phi+\Delta\phi}$ (η οποία διαγράφεται πηγαίνοντας από την πρώτη ημιευθεία στη δεύτερη με τη θετική φορά περιστροφής). Αν $\Delta\theta = \frac{2\pi}{n}$, τότε οι ημιευθείες r_ϕ και $r_{\phi+\Delta\phi}$ συμπίπτουν και τότε η (ανοικτή) γωνία στο z-επίπεδο ανάμεσα στις ημιευθείες r_θ και $r_{\theta+\Delta\theta}$ θα απεικονιστεί σε ολόκληρο το w-επίπεδο εκτός της ημιευθεία $r_\phi = r_{\phi+\Delta\phi}$ (και εκτός του 0, φυσικά). Αν η αρχική γωνία περιέχει μια τουλάχιστον από τις συνοριακές ημιευθείες της, τότε η εικόνα της θα είναι ολόκληρο το w-επίπεδο (εκτός του 0, φυσικά). Αν $\Delta\theta > \frac{2\pi}{n}$, τότε η γωνία στο z-επίπεδο ανάμεσα στις ημιευθείες r_θ και $r_{\theta+\Delta\theta}$ θα απεικονιστεί σε ολόκληρο το w-επίπεδο (εκτός του 0, φυσικά) και "με επικάλυψη".

Αν το $r \in (0, +\infty)$ είναι σταθερό και το θ διατρέχει το $\mathbb{R}$, δηλαδή αν το σημείο $z = re^{i\theta}$ διατρέχει τον κύκλο $C(0; r)$, τότε το $w = z^n = r^n e^{in\theta}$ διατρέχει τον κύκλο $C(0; r^n)$ στο w-επίπεδο $\mathbb{C}$. Επίσης, αν το σημείο z κινείται πάνω στον κύκλο $C(0; r)$ διαγράφοντάς τον μια φορά με τη θετική φορά περιστροφής, δηλαδή αν το θ αυξάνεται σε ένα διάστημα μήκους 2π, τότε το αντίστοιχο σημείο $w = z^n$ κινείται πάνω στον κύκλο $C(0; r^n)$ διαγράφοντάς τον n φορές με τη θετική φορά περιστροφής. Αν το θ αυξάνεται σε ένα διάστημα μήκους $\frac{2\pi}{n}$, τότε το σημείο $w = z^n$ διαγράφει ολόκληρο τον κύκλο $C(0; r^n)$ μια φορά με τη θετική φορά περιστροφής. Αν το σημείο z κινείται πάνω στον κύκλο $C(0; r)$ με τη θετική φορά περιστροφής διαγράφοντας ένα τόξο γωνίας $\Delta\theta < \frac{2\pi}{n}$, τότε το $w = z^n$ διαγράφει με τη θετική φορά περιστροφής ένα τόξο του κύκλου $C(0; r^n)$ γωνίας $n\Delta\theta$. Ενώ, αν $\Delta\theta > \frac{2\pi}{n}$, τότε το $w = z^n$ διαγράφει με τη θετική φορά περιστροφής ολόκληρο τον κύκλο $C(0; r^n)$ "με επικάλυψη". Αν το r αυξηθεί, δηλαδή αν ο κύκλος $C(0; r)$ μεγαλώσει, τότε ο αντίστοιχος κύκλος $C(0; r^n)$ θα μεγαλώσει. Ο δακτύλιος στο z-επίπεδο ανάμεσα στους κύκλους $C(0; r_1)$ και $C(0; r_2)$, όπου $0 < r_1 < r_2$, θα απεικονιστεί στον δακτύλιο στο w-επίπεδο ανάμεσα στους κύκλους $C(0; {r_1}^n)$ και $C(0; {r_2}^n)$.

Είδαμε πιο πριν, για κάθε $w \neq 0$, την ισοδυναμία

$$z^n = w \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\arg w}{n}}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Συμβολίζουμε*

$$w^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\arg w}{n}} \qquad \text{για κάθε } \; w \neq 0$$

*και το σύμβολο $w^{\frac{1}{n}}$ ονομάζεται n-**οστή ρίζα** του w.*

Είδαμε ότι η παράσταση $z = w^{\frac{1}{n}}$ έχει ακριβώς n τιμές οι οποίες βρίσκονται στις κορυφές κανονικού n-γώνου πάνω στον κύκλο $C(0; \sqrt[n]{|w|})$ του z-επιπέδου. Επομένως, κάθε τόξο αυτού του κύκλου, το οποίο αντιστοιχεί σε κεντρική γωνία $\frac{2\pi}{n}$ και περιέχει ένα μόνο από τα δυο άκρα του, περιέχει ακριβώς μια τιμή-σημείο της $z = w^{\frac{1}{n}}$. Επομένως, κάθε γωνία στο z-επίπεδο, η οποία έχει άνοιγμα $\frac{2\pi}{n}$ και η οποία περιέχει μόνο μία από τις δυο συνοριακές ημιευθείες της, περιέχει, για κάθε $w \neq 0$, ακριβώς μία τιμή-σημείο της $z = w^{\frac{1}{n}}$. Ειδικώτερα, αν πάρουμε οποιοδήποτε θ_0 και θεωρήσουμε την γωνία

$$A_{\theta_0} = \{re^{i\theta} \,|\, \theta_0 < \theta \leq \theta_0 + \tfrac{2\pi}{n}\} \quad \text{ή} \quad A_{\theta_0} = \{re^{i\theta} \,|\, \theta_0 \leq \theta < \theta_0 + \tfrac{2\pi}{n}\},$$

τότε στην γωνία A_{θ_0} περιέχεται ακριβώς μια τιμή του $z = w^{\frac{1}{n}}$.

Επιστρέφοντας στην αρχική ισοδυναμία, βλέπουμε ότι γράφεται

$$z^n = w \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = w^{\frac{1}{n}}.$$

Δηλαδή, *οι τιμές του* $w^{\frac{1}{n}}$ *είναι ακριβώς όλες οι λύσεις της εξίσωσης* $e^z = w$

Όπως έχουμε καταλάβει μέχρι τώρα, η συνάρτηση $w = z^n$ από το $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ επί του $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι n-προς-ένα. Άρα δεν μπορούμε να μιλάμε για αντίστροφη συνάρτηση, παρά μόνο μέσω του εξής μη συμβατικού ορισμού.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι η* **πλειότιμη συνάρτηση** n*-οστή ρίζα*

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni w \mapsto z = w^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

είναι η αντίστροφη συνάρτηση της n*-οστής δύναμης* $\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \mapsto w = z^n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Σύμφωνα με τον συμβατικό ορισμό της έννοιας της συνάρτησης, η "συνάρτηση" που ορίσαμε δεν είναι συνάρτηση, διότι στο w δεν αντιστοιχεί μόνο μια τιμή $z = w^{\frac{1}{n}}$. Γι αυτό και λέμε *πλειότιμη συνάρτηση*. Αν θέλουμε να έχουμε αντίστροφη συνάρτηση της n-οστής δύναμης, πρέπει πρώτα να περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της ώστε να είναι (στο νέο πεδίο ορισμού) ένα-προς-ένα και κατόπιν να την αντιστρέψουμε.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω* $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *και συνάρτηση* $f : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Λέμε ότι η* f *είναι* **συνεχής κλάδος της** n**-οστής ρίζας** *στο σύνολο* A *αν*

(i) *η* f *είναι συνεχής στο* A *και*

(ii) *για κάθε* $w \in A$ *η αντίστοιχη τιμή* $z = f(w)$ *είναι μια από τις τιμές της* $w^{\frac{1}{n}}$ *ή, ισοδύναμα, η* $z = f(w)$ *είναι λύση της εξίσωσης* $z^n = w$ *ή, ισοδύναμα, ισχύει* $f(w)^n = w$.

Η Πρόταση 5.11 δίνει αρκετά παραδείγματα συνεχών κλάδων της n-οστής ρίζας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.11. *Θεωρούμε οποιονδήποτε* ϕ_0, *το αντίστοιχο σύνολο*

$$A_{\phi_0} = \{w = se^{i\phi} \mid \phi_0 < \phi < \phi_0 + 2\pi\},$$

στο w*-επίπεδο (δηλαδή το* $\mathbb{C}$ *χωρίς την ημιευθεία η οποία περιέχει το* 0 *και όλα τα* w *με γωνία* ϕ_0*) και την ανοικτή γωνία*

$$B_{\phi_0/n} = \{z = re^{i\theta} \mid \tfrac{\phi_0}{n} < \theta < \tfrac{\phi_0}{n} + \tfrac{2\pi}{n}\}$$

στο z*-επίπεδο.*

Σύμφωνα με προηγούμενη συζήτηση, για κάθε τιμή του w *στο* A_{ϕ_0} *υπάρχει μοναδική τιμή του* z *στην γωνία* $B_{\phi_0/n}$ *ώστε* $z^n = w$. *Ορίζουμε την συνάρτηση*

$$f : A_{\phi_0} \to B_{\phi_0/n}$$

έτσι ώστε για κάθε $w \in A_{\phi_0}$ *να είναι* $f(w) = z$, *όπου* z *είναι ακριβώς αυτή η μοναδική τιμή του* z *στην γωνία* $B_{\phi_0/n}$ *ώστε* $z^n = w$.

Είναι προφανές ότι η f *ικανοποιεί το* (ii) *του προηγούμενου ορισμού για το σύνολο* A_{ϕ_0}. *Η* f *είναι και συνεχής στο* A_{ϕ_0}, *οπότε ικανοποιεί και το* (i) *του προηγούμενου ορισμού. Άρα η* f *είναι συνεχής κλάδος της* n*-οστής ρίζας στο* A_{ϕ_0}.

Απόδειξη. Έστω ότι η f δεν είναι συνεχής σε κάποιο w του A_{ϕ_0}. Τότε υπάρχει κάποια ακολουθία (w_k) στο A_{ϕ_0} για την οποία ισχύει

$$w_k \to w \qquad \text{και} \qquad f(w_k) \not\to f(w).$$

Το $f(w_k) \not\to f(w)$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f(w_k) - f(w)| \geq \delta > 0$ για άπειρα k. Αυτά τα άπειρα k ορίζουν μια υποακολουθία της (w_k) και, τώρα, για απλούστευση όσων θα ακολουθήσουν, περιοριζόμαστε στην υποακολουθία και (αγνοώντας τους υπόλοιπους όρους της αρχικής ακολουθίας) ονομάζουμε (w_k) την υποακολουθία και έτσι έχουμε μια ακολουθία (w_k) στο σύνολο A_{ϕ_0} για την οποία ισχύει

$$w_k \to w \qquad \text{και} \qquad |f(w_k) - f(w)| \geq \delta > 0 \quad \text{για κάθε } k. \tag{5.23}$$

Θέτουμε, επίσης,

$$z = f(w) \qquad \text{και} \qquad z_k = f(w_k) \quad \text{για κάθε } k,$$

οπότε

$$z^n = w \qquad \text{και} \qquad {z_k}^n = w_k \quad \text{για κάθε } k \tag{5.24}$$

και η (5.23) ξαναγράφεται

$$w_k \to w \qquad \text{και} \qquad |z_k - z| \geq \delta > 0 \quad \text{για κάθε } k. \tag{5.25}$$

Επειδή $w_k, w \in A_{\phi_0}$, οι w_k, w έχουν πολικές αναπαραστάσεις

$$w = |w|e^{i\phi} \qquad \text{και} \qquad w_k = |w_k|e^{i\phi_k} \quad \text{για κάθε } k,$$

όπου

$$\phi_0 < \phi < \phi_0 + 2\pi \qquad \text{και} \qquad \phi_0 < \phi_k < \phi_0 + 2\pi \quad \text{για κάθε } k.$$

Τώρα, επειδή το σύνολο τιμών της f είναι η γωνία $B_{\phi_0/n}$, έχουμε ότι

$$z = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\phi}{n}} \qquad \text{και} \qquad z_k = \sqrt[n]{|w_k|}\, e^{i\frac{\phi_k}{n}} \quad \text{για κάθε } k.$$

Επειδή $w_k \to w$, συνεπάγεται $\sqrt[n]{|w_k|} \to \sqrt[n]{|w|}$. Άρα η ακολουθία $(\sqrt[n]{|w_k|})$ είναι φραγμένη. Άρα η μιγαδική ακολουθία (z_k) είναι φραγμένη. Επομένως, από το Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass συνεπάγεται ότι υπάρχει υποακολουθία (z_{k_m}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο z' :

$$z_{k_m} \to z'. \tag{5.26}$$

Επειδή όλοι οι z_{k_m} ανήκουν στην γωνία $B_{\phi_0/n}$, συνεπάγεται ότι ο z' είναι οριακό σημείο της γωνίας αυτής, οπότε ανήκει στην αντίστοιχη κλειστή γωνία:

$$z' \in \overline{B_{\phi_0/n}} = \{re^{i\theta} \,|\, \tfrac{\phi_0}{n} \leq \theta \leq \tfrac{\phi_0}{n} + \tfrac{2\pi}{n}\}. \tag{5.27}$$

Για την αντίστοιχη (δηλαδή, με τους ίδιους δείκτες) υποακολουθία της (w_k) έχουμε, λόγω της (5.25),

$$w_{k_m} \to w.$$

Λόγω της συνέχειας της n-οστής δύναμης και λόγω των (5.24) και (5.26), συνεπάγεται

$$w_{k_m} = {z_{k_m}}^n \to z'^n$$

και, επομένως,

$$z'^n = w.$$

Πάλι λόγω της (5.24) έχουμε

$$z'^n = z^n,$$

οπότε οι μιγαδικοί z' και z σχηματίζουν, με το 0 ως κορυφή, γωνία ίση με ακέραιο πολλαπλάσιο του $\frac{2\pi}{n}$. Αυτομάτως καταλήγουμε σε άτοπο, διότι ο z ανήκει στην ανοικτή γωνία $B_{\phi_0/n}$, ο z' ανήκει στην κλειστή γωνία $\overline{B_{\phi_0/n}}$ (δείτε την (5.27)) και οι γωνίες αυτές (ουσιαστικά, η ίδια γωνία) έχουν άνοιγμα ακριβώς $\frac{2\pi}{n}$.
Άρα η f είναι συνεχής σε κάθε w του A_{ϕ_0}. $\square$

Επιλέγοντας, λοιπόν, ένα οποιοδήποτε πραγματικό ϕ_0, ορίζουμε έναν συνεχή κλάδο της n-οστής ρίζας $z = w^{\frac{1}{n}}$ με πεδίο ορισμού το σύνολο A_{ϕ_0} του w-επιπέδου και σύνολο τιμών την γωνία $B_{\phi_0/n}$ του z-επιπέδου. Παρατηρήστε ότι αν, αντί του ϕ_0, θεωρήσουμε τον $\phi_0 + k2\pi$ με οποιονδήποτε $k = 0, 1, \ldots, n-1$, τότε το πεδίο ορισμού $A = A_{\phi_0+k2\pi}$ *μένει το ίδιο* αλλά το σύνολο τιμών, δηλαδή η γωνία $B_{(\phi_0+k2\pi)/n}$ περιστρέφεται με τη θετική ή την αρνητική φορά περιστροφής κατά γωνία $k\frac{2\pi}{n}$. Οι n γωνίες $B_{(\phi_0+k2\pi)/n}$ με $k = 0, 1, \ldots, n-1$ είναι διαδοχικές και καλύπτουν ολόκληρο το z-επίπεδο (εκτός από τις ενδιάμεσες συνοριακές ημιευθείες τους και το 0). Συνοψίζουμε:

Αν από το w-επίπεδο αφαιρέσουμε μια οποιαδήποτε ημιευθεία με κορυφή το 0, τότε στο συμπληρωματικό ανοικτό σύνολο A ορίζονται n συνεχείς κλάδοι $z = w^{\frac{1}{n}}$ της n-οστής ρίζας. Καθένας από αυτούς απεικονίζει το A επί μιας συγκεκριμένης ανοικτής γωνίας του z-επιπέδου ανοίγματος $\frac{2\pi}{n}$. Οι διάφορες αυτές γωνίες, που αντιστοιχούν στους διάφορους κλάδους της n-οστής ρίζας (στο ίδιο σύνολο A), είναι ξένες ανά δύο, διαδοχικές και καλύπτουν το z-επίπεδο (εκτός από τις συνοριακές ημιευθείες τους και το 0). Φυσικά, αν αλλάξουμε την αρχική ημιευθεία η οποία καθορίζει το σύνολο A, τότε αλλάζουν και οι αντίστοιχες γωνίες και οι αντίστοιχοι συνεχείς κλάδοι της n-οστής ρίζας.

Παράδειγμα 5.6.2. Ένα συγκεκριμένο παράδειγμα συνεχούς κλάδου της n-οστής ρίζας έχουμε όταν πάρουμε $\phi_0 = -\pi$. Τότε το σύνολο

$$A_{-\pi}$$

είναι το w-επίπεδο εκτός του αρνητικού u-ημιάξονα (όπου $w = u + iv$) και το σύνολο τιμών του κλάδου της n-οστής ρίζας είναι η γωνία

$$B_{-\pi/n} = \{re^{i\theta} \mid -\tfrac{\pi}{n} < \theta < \tfrac{\pi}{n}\}.$$

Ο κλάδος αυτός της n-οστής ρίζας έχει τύπο

$$z = \sqrt[n]{s}\, e^{i\frac{\phi}{n}} \qquad \text{για } \ w = se^{i\phi} \ \text{ με } \ -\pi < \phi < \pi.$$

Είναι φανερό ότι ο τύπος αυτός γράφεται

$$z = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\operatorname{Arg} w}{n}}.$$

Πρέπει να θυμόμαστε ότι στο ίδιο σύνολο $A_{-\pi}$ του w-επιπέδου, μαζί με τον παραπάνω κλάδο της n-οστής ρίζας, ορίζονται n συνεχείς κλάδοι της n-οστής ρίζας. Καθένας από αυτούς απεικονίζει το $A_{-\pi}$ στην ανάλογη γωνία $B_{(-\pi+k2\pi)/n}$ με $k = 0, 1, \ldots, n-1$, η οποία προκύπτει αν περιστρέψουμε την $B_{-\pi/n}$ με τη θετική φορά κατά γωνία $k\frac{2\pi}{n}$. Ο κλάδος αυτός προκύπτει από τον παραπάνω κλάδο $z = f(w)$ πολλαπλασιάζοντας με τη σταθερά $e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ (για να έχουμε περιστροφή κατά γωνία $k\frac{2\pi}{n}$) οπότε ο τύπος του είναι

$$z = f(w)e^{ik\frac{2\pi}{n}} = f(w){\omega_n}^k,$$

όπου ω_n είναι η πρωτεύουσα n-οστή ρίζα της μονάδας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.12. *Έστω $A \subseteq \mathbb{C}\setminus\{0\}$ και $f : A \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ η οποία είναι συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας στο σύνολο A. Αν το w_0 είναι οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο του A, τότε η f είναι αυτομάτως παραγωγίσιμη στο w_0 και*

$$f'(w_0) = \frac{f(w_0)}{nw_0}.$$

Απόδειξη. Γράφουμε $z_0 = f(w_0)$ και $z = f(w)$ για κάθε $w \in A$. Επομένως, είναι ${z_0}^n = w_0$ και $z^n = w$. Επειδή η f είναι συνεχής, αν $w \to w_0$ συνεπάγεται $z \to z_0$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την παραγωγισιμότητα της n-οστής δύναμης στο z_0, έχουμε ότι όταν $w \to w_0$, τότε

$$\tfrac{f(w)-f(w_0)}{w-w_0} = \tfrac{z-z_0}{z^n-{z_0}^n} = 1/\big(\tfrac{z^n-{z_0}^n}{z-z_0}\big) \to 1/(n{z_0}^{n-1}) = z_0/(nw_0) = f(w_0)/(nw_0).$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο w_0 και $f'(w_0) = \frac{f(w_0)}{nw_0}$. □

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι αν η $f : A \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας στο σύνολο A, τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του A, δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του A. Και, επειδή το εσωτερικό του A είναι ανοικτό σύνολο, η f είναι *αναλυτική* στο εσωτερικό του A. Ειδικώτερα, και με πιο "χαλαρό" συμβολισμό:

Κάθε συνεχής κλάδος $z = w^{\frac{1}{n}}$ σε ανοικτό σύνολο A είναι αναλυτική συνάρτηση στο A και ισχύει

$$\frac{dz}{dw} = \frac{dw^{\frac{1}{n}}}{dw} = \frac{w^{\frac{1}{n}}}{nw} \qquad \text{στο } A.$$

Γι αυτό κάθε συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας σε ανοικτό σύνολο A ονομάζεται και **αναλυτικός κλάδος της n-οστής ρίζας** *στο A.*

Παράδειγμα 5.6.3. Προηγουμένως ορίσαμε n συνεχείς κλάδους της n-οστής ρίζας στο ανοικτό σύνολο A, το οποίο προκύπτει αν από το w-επίπεδο αφαιρέσουμε μια οποιαδήποτε ημιευθεία με κορυφή το 0. Όλοι αυτοί οι κλάδοι είναι αναλυτικοί κλάδοι της n-οστής ρίζας στο A.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.13. *Έστω $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και $f_1, f_2 : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Έστω, επίσης, ω_n η πρωτεύουσα n-οστή ρίζα της μονάδας.*

[α] *Αν η f_1 είναι συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας στο A και ισχύει $\frac{f_2(w)}{f_1(w)} = {\omega_n}^k$ στο A, όπου ο $k = 0, 1, \dots, n-1$ είναι σταθερός (δηλαδή, ανεξάρτητος του w στο A), τότε και η f_2 είναι συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας στο A.*

[β] *Αν, επιπλέον, το σύνολο A είναι συνεκτικό και αν οι f_1 και f_2 είναι συνεχείς κλάδοι της n-οστής ρίζας στο A, τότε ισχύει $\frac{f_2(w)}{f_1(w)} = {\omega_n}^k$ στο A, όπου ο $k = 0, 1, \dots, n-1$ είναι σταθερός (δηλαδή, ανεξάρτητος του w στο A).*

Ειδικώτερα, αν οι f_1, f_2 έχουν την ίδια τιμή σε κάποιο $w_0 \in A$, τότε ταυτίζονται στο A.

Απόδειξη. [α] Η f_1 είναι συνεχής στο A και κάθε σταθερή συνάρτηση είναι συνεχής στο A. Άρα και η $f_2 = f_1 {\omega_n}^k$ είναι συνεχής στο A.

Επίσης, ισχύει $f_1(w)^n = w$ για κάθε $w \in A$. Άρα

$$f_2(w)^n = f_1(w)^n ({\omega_n}^k)^n = w({\omega_n}^n)^k = w \cdot 1 = w$$

για κάθε $w \in A$. Άρα η f_2 είναι συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας στο A.

[β] Επειδή για κάθε $w \in A$ οι δυο τιμές $f_2(w)$ και $f_1(w)$ είναι τιμές του $w^{\frac{1}{n}}$, συνεπάγεται ότι για κάθε $w \in A$ ισχύει

$$\left(\tfrac{f_2(w)}{f_1(w)}\right)^n = \tfrac{f_2(w)^n}{f_1(w)^n} = \tfrac{w}{w} = 1.$$

Άρα για κάθε $w \in A$ ο αριθμός $\frac{f_2(w)}{f_1(w)}$ είναι n-οστή ρίζα της μονάδας. Άρα έχουμε

$$\tfrac{f_2}{f_1} : A \to \{1, \omega_n, \dots, {\omega_n}^{n-1}\}$$

και το δεύτερο σύνολο αποτελείται από n μεμονωμένα σημεία, τις κορυφές ενός κανονικού n-γώνου στον μοναδιαίο κύκλο $C(0;1)$ μια από τις οποίες είναι το 1.

Η συνάρτηση $\frac{f_2}{f_1}$ είναι συνεχής και το A είναι συνεκτικό, οπότε και το σύνολο τιμών $\frac{f_2}{f_1}(A)$ πρέπει να είναι συνεκτικό. Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν το σύνολο τιμών είναι μονοσύνολο. Άρα η $\frac{f_2}{f_1}$ είναι σταθερή στο A και, επομένως, ισχύει $\frac{f_2(w)}{f_1(w)} = {\omega_n}^k$ στο A, όπου ο $k = 0, 1, \dots, n-1$ είναι σταθερός (δηλαδή, ανεξάρτητος του w στο A).

Το τελευταίο συμπέρασμα είναι προφανές: αν ισχύει $f_2(w_0) = f_1(w_0)$, τότε, επειδή η $\frac{f_2}{f_1}$ είναι σταθερή στο A, συνεπάγεται ότι ισχύει $\frac{f_2(w)}{f_1(w)} = \frac{f_2(w_0)}{f_1(w_0)} = 1$ για κάθε $w \in A$ οπότε $f_2(w) = f_1(w)$ για κάθε $w \in A$. $\square$

Από την Πρόταση 5.13 έχουμε το εξής:
Αν στο συνεκτικό σύνολο A γνωρίζουμε έναν συνεχή κλάδο της n-οστής ρίζας, τότε παίρνουμε κάθε άλλο συνεχή κλάδο της n-οστής ρίζας στο A πολλαπλασιάζοντας τον αρχικό με μια οποιαδήποτε σταθερή n-οστή ρίζα της μονάδας. Δεν υπάρχουν άλλοι συνεχείς κλάδοι της n-οστής ρίζας στο A.

Μια παρατήρηση (και για τα επόμενα παραδείγματα). Όταν πρέπει να βρούμε έναν συνεχή κλάδο της n-οστής ρίζας σε ένα σύνολο A με μια δοσμένη τιμή z_0 σε ένα δοσμένο σημείο $w_0 \in A$, πρέπει να είναι εξασφαλισμένο ότι η τιμή z_0 είναι *αποδεκτή*. Θα πρέπει δηλαδή το z_0 να είναι μια από τις τιμές της ${w_0}^{\frac{1}{n}}$ ή, ισοδύναμα, ${z_0}^n = w_0$.

Παράδειγμα 5.6.4. Έστω $A = A_{-\pi}$ το w-επίπεδο εκτός του αρνητικού u-ημιάξονα (όπου $w = u + iv$). Θέλουμε να βρούμε συνεχή κλάδο της τετραγωνικής ρίζας $z = w^{\frac{1}{2}}$ στο A με τιμή $z = 1$ για $w = 1$.
Στο A γνωρίζουμε από το παράδειγμα 5.6.2 τον συνεχή κλάδο της τετραγωνικής ρίζας, ο οποίος απεικονίζει το A στη γωνία

$$B_{-\pi/2} = \{re^{i\theta} \,|\, -\tfrac{\pi}{2} < \theta < \tfrac{\pi}{2}\},$$

δηλαδή στο δεξιό ημιεπίπεδο του z-επιπέδου, και έχει τύπο

$$z = \sqrt{s}\, e^{i\frac{\phi}{2}} = \sqrt{|w|}\, e^{i\frac{\operatorname{Arg} w}{2}} \qquad \text{για } \ w = se^{i\phi} \ \text{ με } \ -\pi < \phi < \pi.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 5.13[β], επειδή το A είναι συνεκτικό, δεν υπάρχει άλλος τέτοιος συνεχής κλάδος της τετραγωνικής ρίζας στο A.

Παράδειγμα 5.6.5. Έστω $A = A_{-\pi}$ το w-επίπεδο εκτός του αρνητικού u-ημιάξονα (όπου $w = u+iv$). Θέλουμε να βρούμε συνεχή κλάδο της τετραγωνικής ρίζας $z = w^{\frac{1}{2}}$ στο A με τιμή $z = -1$ για $w = 1$.
Ήδη μιλήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα για ένα συνεχή κλάδο της τετραγωνικής ρίζας στο A. Από την Πρόταση 5.13[β] γνωρίζουμε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο κλάδοι της τετραγωνικής ρίζας στο συγκεκριμένο συνεκτικό σύνολο A. Τον δεύτερο κλάδο τον βρίσκουμε θεωρώντας την πρωτεύουσα τετραγωνική ρίζα του 1, δηλαδή τον αριθμό

$$\omega_2 = e^{i\frac{2\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1.$$

(Δεν θέλει πολλή σκέψη: οι τετραγωνικές ρίζες του 1 είναι οι λύσεις της $z^2 = 1$, δηλαδή οι αριθμοί $1, -1$.)
Άρα ο δεύτερος κλάδος της τετραγωνικής ρίζας έχει τύπο

$$z = \sqrt{s}\, e^{i\frac{\phi}{2}} {\omega_2}^1 = -\sqrt{s}\, e^{i\frac{\phi}{2}} \qquad \text{για } \ w = se^{i\phi} \ \text{ με } \ -\pi < \phi < \pi,$$

δηλαδή ακριβώς ο αντίθετος του προηγούμενου κλάδου. Ο κλάδος αυτός απεικονίζει το A στη γωνία

$$B_{(-\pi+2\pi)/2} = B_{\pi/2} = \{re^{i\theta} \,|\, \tfrac{\pi}{2} < \theta < \tfrac{3\pi}{2}\},$$

δηλαδή στο αριστερό ημιεπίπεδο του z-επιπέδου.
Σύμφωνα με την Πρόταση 5.13[β], επειδή το A είναι συνεκτικό, δεν υπάρχει άλλος τέτοιος συνεχής κλάδος της τετραγωνικής ρίζας στο A.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.14. *Δεν ορίζεται συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας σε οποιονδήποτε κύκλο $C(0;r)$ με $r > 0$.*
Άρα δεν ορίζεται συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας σε κανένα σύνολο A το οποίο περιέχει κύκλο με κέντρο 0.

Απόδειξη. Έστω ότι ορίζεται συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας στον κύκλο $C(0;r)$, δηλαδή

$$g : C(0;r) \to \mathbb{C}$$

η οποία είναι συνεχής στον $C(0;r)$ και για κάθε $w \in C(0;r)$ ισχύει $g(w)^n = w$.
Θεωρούμε τον συνεχή κλάδο f της n-οστής ρίζας, ο οποίος ορίστηκε στο παράδειγμα 5.6.2 και ο οποίος είναι συνεχής συνάρτηση στο w-επίπεδο εκτός από τον αρνητικό u-ημιάξονα.
Το κοινό μέρος του συνόλου στο οποίο είναι ορισμένη η f και του κύκλου $C(0;r)$ είναι το

$$B = C(0;r) \setminus \{-r\}.$$

Άρα ο περιορισμός της g στο B και ο περιορισμός της f στο B είναι δυο συνεχείς κλάδοι της n-οστής ρίζας στο B. Επειδή το B είναι συνεκτικό, υπάρχει (σταθερός) ακέραιος k ώστε να ισχύει

$$f(w) = g(w){\omega_n}^k \qquad \text{για κάθε } \ w \in B. \tag{5.28}$$

Τώρα θεωρούμε δυο ακολουθίες στο B. Τις (w'_k) και (w''_k) με τύπους

$$w'_k = re^{i(\pi-\pi/k)}, \qquad w''_k = re^{i(-\pi+\pi/k)} \qquad \text{για κάθε } \ k.$$

Και οι δυο ακολουθίες “κινούνται” πάνω στον κύκλο $C(0;r)$ προς το σημείο $-r$. Η πρώτη είναι στο άνω ημικύκλιο και πλησιάζει το $-r$ και η δεύτερη είναι στο κάτω ημικύκλιο και πλησιάζει κι αυτή το $-r$.
Επειδή η g είναι ορισμένη και συνεχής σε ολόκληρο τον κύκλο $C(0;r)$, συνεπάγεται

$$g(w'_k) \to g(-r), \qquad g(w''_k) \to g(-r)$$

και, επομένως,

$$\tfrac{g(w'_k)}{g(w''_k)} \to 1.$$

Από την (5.28) συνεπάγεται

$$\tfrac{f(w'_k)}{f(w''_k)} \to 1.$$

Όμως,

$$\tfrac{f(w'_k)}{f(w''_k)} = \tfrac{\sqrt[n]{r}e^{i\frac{1}{n}(\pi-\pi/k)}}{\sqrt[n]{r}e^{i\frac{1}{n}(-\pi+\pi/k)}} = e^{i\frac{1}{n}(2\pi-2\pi/k)} \to e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

και καταλήγουμε σε άτοπο.
Άρα δεν ορίζεται συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας στον κύκλο $C(0;r)$.
Αν ορίζεται συνεχής κλάδος g της n-οστής ρίζας σε κάποιο σύνολο A το οποίο περιέχει κύκλο με κέντρο 0, τότε ο περιορισμός της g στον κύκλο θα ήταν συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας στον κύκλο και αυτό, όπως είδαμε, είναι αδύνατο. □

Παράδειγμα 5.6.6. Δεν ορίζεται συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας σε δακτύλιο με κέντρο 0 ούτε στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Ασκήσεις.

5.6.1. Υπολογίστε τα $(-1)^{\frac{1}{2}}$, $(-1)^{\frac{1}{3}}$, $(-1)^{\frac{1}{4}}$, $i^{\frac{1}{2}}$, $i^{\frac{1}{3}}$, $i^{\frac{1}{4}}$, $(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})^{\frac{1}{2}}$, $(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})^{\frac{1}{3}}$, $(\frac{1-i\sqrt{3}}{2})^{\frac{1}{4}}$.

5.6.2. Έστω η $f : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$f(u,v) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}+u}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}-u}{2}}, & \text{αν } u \in \mathbb{R},\, v > 0 \\ \sqrt{u}, & \text{αν } u > 0,\, v = 0 \\ \sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}+u}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}-u}{2}}, & \text{αν } u \in \mathbb{R},\, v < 0 \end{cases}$$

όπου $w = u + iv = (u, v)$.

[α] Αποδείξτε ότι $f(w)^2 = w$ για κάθε $w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ καθώς και ότι η f ταυτίζεται με τον συνεχή κλάδο της τετραγωνικής ρίζας που είδαμε στο παράδειγμα 5.6.4.

[β] Αποδείξτε ότι η f είναι ένα-προς-ένα και επί του $\{z \,|\, \mathrm{Re}\, z > 0\}$.

[γ] Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, χρησιμοποιώντας είτε τον τύπο της f είτε ακολουθίες και την ταυτότητα στο [α].

[δ] Αποδείξτε ότι η f είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ (με σύντομο τρόπο).

5.6.3. Πόσοι και ποιοί (με τύπους) είναι οι αναλυτικοί κλάδοι της τετραγωνικής ρίζας στο $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$; Ποιά είναι τα σύνολα τιμών τους;

5.6.4. Πόσοι και ποιοί (με τύπους) είναι οι αναλυτικοί κλάδοι της κυβικής ρίζας στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$; Ποιά είναι τα σύνολα τιμών τους;

5.6.5. Έστω συνεχής κλάδος $f : A \to \mathbb{C}$ του λογαρίθμου στο σύνολο $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Αποδείξτε ότι η $g : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ που ορίζεται με τύπο $g = e^{\frac{1}{n} f}$ είναι συνεχής κλάδος της n-οστής ρίζας στο A.

Κεφάλαιο 6

Το τοπικό θεώρημα του Cauchy.

6.1 Το Θεώρημα του Cauchy για τρίγωνα.

Θυμόμαστε ότι οι καμπύλες $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι από τον ορισμό τους συνεχείς συναρτήσεις και ότι έχουμε κάνει την επιπλέον παραδοχή ότι οι καμπύλες που θα εξετάζουμε θα είναι τμηματικά ομαλές.

ΛΗΜΜΑ 6.1. *Έστω καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ και $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής στο γ^*. Αν υπάρχει συνάρτηση F ώστε $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \gamma^*$, τότε*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Ειδικώτερα, αν η γ είναι κλειστή καμπύλη, δηλαδή αν $\gamma(b) = \gamma(a)$, τότε

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Απόδειξη. Είναι

$$\begin{aligned} \textstyle\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\gamma F'(z)\, dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)\, dt \\ = (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

□

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι η καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ είναι στο σύνολο A αν $\gamma^* \subseteq A$ ή, ισοδύναμα, $\gamma(t) \in A$ για κάθε $t \in [a, b]$ ή, ισοδύναμα, $\gamma : [a, b] \to A$.*

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν το Ω είναι ανοικτό σύνολο και για τις $f, F : \Omega \to \mathbb{C}$ ισχύει $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Omega$, τότε η F χαρακτηρίζεται* **παράγουσα** *της f στο Ω.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.1. *Έστω ανοικτό σύνολο Ω.*
[α] *Αν για την $F : \Omega \to \mathbb{C}$ ισχύει $F'(z) = 0$ για κάθε $z \in \Omega$, τότε η F είναι σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του Ω.*
[β] *Έστω $f, F_1, F_2 : \Omega \to \mathbb{C}$ και έστω ότι η F_1 είναι παράγουσα της f στο Ω. Τότε η F_2 είναι κι αυτή παράγουσα της f στο Ω αν και μόνο αν η $F_2 - F_1$ είναι σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του Ω.*
Ειδικώτερα, αν δυο παράγουσες της f στο Ω έχουν ίσες τιμές σε κάποιο $z_0 \in \Omega$, τότε οι δυο αυτές παράγουσες ταυτίζονται στη συνεκτική συνιστώσα του Ω η οποία περιέχει το z_0.

Απόδειξη. [α] Έστω U οποιαδήποτε συνεκτική συνιστώσα του Ω. Το U είναι ανοικτό και συνεκτικό σύνολο, οπότε για κάθε $z_1, z_2 \in U$ υπάρχει καμπύλη (και μάλιστα, πολυγωνική) γ στο U με αρχικό άκρο z_1 και τελικό άκρο z_2. Τότε

$$F(z_2) - F(z_1) = \int_\gamma F'(z)\,dz = \int_\gamma 0\,dz = 0.$$

Άρα κάθε δυο τιμές της F στο U είναι ίσες, οπότε η F είναι σταθερή στο U.

[β] Έστω U οποιαδήποτε συνεκτική συνιστώσα του Ω. Αν ισχύει $F_2(z) - F_1(z) = c$ για κάθε $z \in U$, τότε, προφανώς,

$$F_2{}'(z) = F_1{}'(z) + c' = f(z) + 0 = f(z)$$

για κάθε $z \in U$. Άρα η F_2 είναι παράγουσα της f στο U και, επειδή το Ω είναι η ένωση των συνεκτικών συνιστωσών του, η F_2 είναι παράγουσα της f στο Ω.

Αντιστρόφως, αν η F_2 είναι παράγουσα της f στο Ω, τότε για την $F = F_2 - F_1$ ισχύει

$$F'(z) = F_1{}'(z) - F_2{}'(z) = f(z) - f(z) = 0$$

για κάθε $z \in \Omega$, οπότε, βάσει του [α], η F είναι σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του Ω. □

Πρέπει να τονιστεί ότι η σταθερές για τις οποίες μιλάει η Πρόταση 6.1 εξαρτώνται από τις διάφορες συνεκτικές συνιστώσες του Ω: σε κάθε συνεκτική συνιστώσα αντιστοιχεί μια σταθερά και σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες μπορεί να αντιστοιχούν διαφορετικές σταθερές.

Παράδειγμα 6.1.1. Θεωρούμε το ανοικτό σύνολο $\Omega = D(0;1) \cup D(3;1)$, το οποίο δεν είναι συνεκτικό και οι συνεκτικές συνιστώσες του είναι οι δυο δίσκοι $D(0;1)$ και $D(3;1)$. Θεωρούμε και τη συνάρτηση

$$F(z) = \begin{cases} c_1, & \text{αν } z \in D(0;1) \\ c_2, & \text{αν } z \in D(3;1) \end{cases}$$

όπου c_1, c_2 είναι δυο οποιεσδήποτε σταθερές.

Προφανώς, ισχύει $F'(z) = 0$ για κάθε $z \in \Omega$, αλλά η F δεν είναι σταθερή στο Ω αν $c_1 \neq c_2$.

Το αντίστροφο της Πρότασης 6.2 θα το δούμε αργότερα στην Πρόταση 6.7.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.2. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής στο ανοικτό σύνολο Ω και έστω ότι υπάρχει παράγουσα της f στο Ω. Τότε για κάθε καμπύλη γ στο Ω το $\int_\gamma f(z)\,dz$ δεν εξαρτάται από την καμπύλη αλλά μόνο από τα άκρα της. Ειδικώτερα, για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω είναι*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Απόδειξη. Υπάρχει $F : \Omega \to \mathbb{C}$ ώστε να ισχύει $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Omega$.

Για κάθε καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \Omega$ ισχύει $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \gamma^*$, οπότε, σύμφωνα με το Λήμμα 6.1, ισχύει $\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$. Από αυτό συνεπάγονται και τα δυο συμπεράσματα. □

Παράδειγμα 6.1.2. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση p έχει παράγουσα στο $\mathbb{C}$.

Πράγματι, αν $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, τότε η πολυωνυμική συνάρτηση F με τύπο $F(z) = a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ είναι παράγουσα της p στο $\mathbb{C}$.

Άρα για κάθε κλειστή καμπύλη γ ισχύει

$$\int_\gamma p(z)\,dz = \int_\gamma (a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n)\,dz = 0.$$

Παράδειγμα 6.1.3. Η εκθετική συνάρτηση e^z έχει παράγουσα τον εαυτό της στο $\mathbb{C}$.
Άρα για κάθε κλειστή καμπύλη γ ισχύει

$$\int_\gamma e^z\,dz = 0.$$

Παράδειγμα 6.1.4. Έστω z_0 και $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. Τότε η συνάρτηση $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ έχει παράγουσα στο $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ και, μάλιστα, τη συνάρτηση $-\frac{1}{(n-1)(z-z_0)^{n-1}}$.
Άρα για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ (ώστε το z_0 να μην ανήκει στο γ^*) ισχύει

$$\int_\gamma \frac{1}{(z-z_0)^n}\,dz = 0 \qquad \text{με } \ n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Παράδειγμα 6.1.5. Η συνάρτηση $\frac{1}{z-z_0}$ δεν έχει παράγουσα στο $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ και, ακόμη περισσότερο, ούτε σε κανένα δακτύλιο $D(z_0; r_1, r_2)$.
Πράγματι, αν είχε η $\frac{1}{z-z_0}$ παράγουσα στον δακτύλιο $D(z_0; r_1, r_2)$, θα ίσχυε $\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ στον $D(z_0; r_1, r_2)$. Όμως, αν θεωρήσουμε ακτίνα r με $r_1 < r < r_2$ και την $\gamma : [0, 2\pi] \to D(z_0; r_1, r_2)$ με παραμετρική εξίσωση $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, τότε η γ είναι κλειστή καμπύλη στον $D(z_0; r_1, r_2)$ και, σύμφωνα με τα σύμβολα στο παράδειγμα 4.4.2, έχουμε

$$\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = \int_{C(z_0;r)} \frac{1}{z-z_0}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it}\,dt = 2\pi i \neq 0.$$

Με βάση αυτό το *πολύ σημαντικό παράδειγμα* μπορούμε να δούμε αμέσως ότι:
Δεν ορίζεται συνεχής κλάδος του λογαρίθμου σε οποιονδήποτε δακτύλιο $D(0; r_1, r_2)$ και, επομένως, ούτε και στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
(Αυτό το είχαμε ξαναδεί στο παράδειγμα 5.5.7 ως πόρισμα της Πρότασης 5.10.) Πράγματι, αν υπήρχε συνεχής κλάδος f του λογαρίθμου στον δακτύλιο $D(0; r_1, r_2)$, τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 5.8, η f θα ήταν αναλυτική με παράγωγο $f'(z) = \frac{1}{z}$ για κάθε $z \in D(0; r_1, r_2)$. Δηλαδή, η $\frac{1}{z}$ θα είχε παράγουσα στον $D(0; r_1, r_2)$ και αυτό, όπως είδαμε, είναι αδύνατο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.3. *Έστω (K_n) μια ακολουθία εγκιβωτισμένων μη-κενών συμπαγών συνόλων, δηλαδή $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots \supseteq K_n \supseteq K_{n+1} \supseteq \cdots$. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα z το οποίο ανήκει σε κάθε K_n. Με άλλα λόγια η τομή $\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n$ είναι μη-κενή.*

Απόδειξη. Επειδή κάθε K_n είναι μη-κενό, επιλέγουμε για κάθε n ένα οποιοδήποτε $z_n \in K_n$ και σχηματίζουμε μια ακολουθία (z_n) η οποία περιέχεται στο K_1, δηλαδή στο μεγαλύτερο από τα K_n. Επειδή το K_1 είναι φραγμένο, υπάρχει, σύμφωνα με το Θεώρημα των Bolzano - Weierstrass, κάποια υποακολουθία (z_{n_k}) η οποία συγκλίνει. Έστω

$$z_{n_k} \to z.$$

Σταθεροποιούμε έναν *οποιονδήποτε* n.
Επειδή $n_k \to +\infty$, θα ισχύει $n_k \geq n$ από κάποιο k και πέρα και, επομένως, θα ισχύει

$$z_{n_k} \in K_{n_k} \subseteq K_n$$

από κάποιον k και πέρα.
Άρα η υποακολουθία (z_{n_k}) είναι τελικά μέσα στο K_n, οπότε το z είναι οριακό σημείο του K_n και, επειδή το K_n είναι κλειστό, το z ανήκει στο K_n.
Άρα το z ανήκει σε κάθε K_n. □

Το Θεώρημα του Cauchy για τρίγωνα και η γενίκευσή του, την οποία θα δούμε αρκετά αργότερα, είναι το σημαντικότερο θεώρημα της Μιγαδικής Ανάλυσης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.1. [Το Θεώρημα του Cauchy για τρίγωνα] *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω και τρίγωνο $\Delta \subseteq \Omega$. Τότε*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε (για συντομία)

$$I = \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz,$$

οπότε πρέπει να αποδείξουμε ότι $I = 0$.
Θεωρούμε ότι

$$\Delta = \Delta(z_0, z_1, z_2),$$

δηλαδή ότι τα z_0, z_1, z_2 είναι οι κορυφές του Δ και έστω w_2, w_0, w_1 τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων $[z_0, z_1]$, $[z_1, z_2]$, $[z_2, z_0]$, αντιστοίχως. Τότε το τρίγωνο $\Delta(z_0, z_1, z_2)$ χωρίζεται στα τέσσερα τρίγωνα

$$\Delta^{(0)} = \Delta(z_0, w_2, w_1),\ \Delta^{(1)} = \Delta(w_2, z_1, w_0),\ \Delta^{(2)} = \Delta(w_0, z_2, w_1),\ \Delta^{(3)} = \Delta(w_2, w_0, w_1).$$

Ορίζουμε τα αντίστοιχα επικαμπύλια ολοκληρώματα

$$I^{(0)} = \int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z)\,dz,\ I^{(1)} = \int_{\partial\Delta^{(1)}} f(z)\,dz,\ I^{(2)} = \int_{\partial\Delta^{(2)}} f(z)\,dz,\ I^{(3)} = \int_{\partial\Delta^{(3)}} f(z)\,dz.$$

Βάσει των συμβολισμών και των αποτελεσμάτων στα παραδείγματα 4.4.4, 4.4.5 και 4.4.7, έχουμε

$$\begin{aligned}
I^{(0)} + I^{(1)} + I^{(2)} + I^{(3)} &= \textstyle\int_{[z_0,w_2]} f(z)\,dz + \int_{[w_2,w_1]} f(z)\,dz + \int_{[w_1,z_0]} f(z)\,dz \\
&\quad + \textstyle\int_{[w_2,z_1]} f(z)\,dz + \int_{[z_1,w_0]} f(z)\,dz + \int_{[w_0,w_2]} f(z)\,dz \\
&\quad + \textstyle\int_{[w_0,z_2]} f(z)\,dz + \int_{[z_2,w_1]} f(z)\,dz + \int_{[w_1,w_0]} f(z)\,dz \\
&\quad + \textstyle\int_{[w_2,w_0]} f(z)\,dz + \int_{[w_0,w_1]} f(z)\,dz + \int_{[w_1,w_2]} f(z)\,dz \\
&= \textstyle\int_{[z_0,w_2]} f(z)\,dz + \int_{[w_2,z_1]} f(z)\,dz + \int_{[z_1,w_0]} f(z)\,dz \\
&\quad + \textstyle\int_{[w_0,z_2]} f(z)\,dz + \int_{[z_2,w_1]} f(z)\,dz + \int_{[w_1,z_0]} f(z)\,dz \\
&= \textstyle\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz + \int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz + \int_{[z_2,z_0]} f(z)\,dz \\
&= I.
\end{aligned}$$

Άρα

$$|I| \le |I^{(0)}| + |I^{(1)}| + |I^{(2)}| + |I^{(3)}|$$

και, επομένως, για ένα τουλάχιστον από τα $j = 0, 1, 2, 3$ ισχύει

$$|I^{(j)}| \ge \tfrac{1}{4}|I|.$$

Τώρα, θεωρούμε το αντίστοιχο τρίγωνο $\Delta^{(j)}$ και το ξανασυμβολίζουμε Δ_1 και το $I^{(j)}$ το ξανασυμβολίζουμε I_1.
Έχουμε, λοιπόν, αποδείξει ότι μέσα στο αρχικό τρίγωνο Δ υπάρχει κάποιο τρίγωνο Δ_1 ώστε, αν $I = \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz$ και $I_1 = \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz$, να ισχύει $|I_1| \ge \frac{1}{4}|I|$. Παρατηρούμε, επίσης, ότι διάμετρος $(\Delta_1) = \frac{1}{2}$ διάμετρος (Δ).
Αυτήν την διαδικασία μπορούμε να την επαναλάβουμε επ' άπειρον ώστε να δημιουργήσουμε μια ακολουθία εγκιβωτισμένων τριγώνων $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$ και την αντίστοιχη ακολουθία επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$ ώστε να ισχύουν τα εξής:
(i) $\Delta \supseteq \Delta_1 \supseteq \cdots \supseteq \Delta_n \supseteq \Delta_{n+1} \supseteq \cdots$,
(ii) $|I_n| \ge \frac{1}{4^n}|I|$,

(iii) διάμετρος $(\Delta_n) = \frac{1}{2^n}$ διάμετρος (Δ).
Από την (i) και από την Πρόταση 6.3 συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο σημείο z το οποίο ανήκει σε κάθε τρίγωνο Δ_n. Ειδικώτερα, το z ανήκει στο Δ και, επομένως, στο Ω, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο z.
Τώρα, θεωρούμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$.
Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στον z, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\left|\tfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} - f'(z)\right| < \epsilon \qquad \text{για } 0 < |\zeta - z| < \delta.$$

Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία σχέση με το $|\zeta - z|$ και, αφού παρατηρήσουμε ότι η σχέση που θα προκύψει ισχύει και για $\zeta = z$, έχουμε

$$|f(\zeta) - f(z) - f'(z)(\zeta - z)| \le \epsilon|\zeta - z| \qquad \text{για } |\zeta - z| < \delta. \tag{6.1}$$

Κατόπιν, βάσει της (iii), θεωρούμε αρκετά μεγάλο n ώστε

$$\text{διάμετρος}\,(\Delta_n) < \delta.$$

Επειδή $z \in \Delta_n$ και διάμετρος $(\Delta_n) < \delta$, συνεπάγεται ότι για κάθε $\zeta \in \partial\Delta_n \subseteq \Delta_n$ ισχύει

$$|\zeta - z| \le \text{διάμετρος}\,(\Delta_n) < \delta,$$

οπότε από την (6.1) και από την (iii) έχουμε

$$|f(\zeta) - f(z) - f'(z)(\zeta - z)| \le \epsilon|\zeta - z| \le \epsilon\,\text{διάμετρος}\,(\Delta_n) = \tfrac{\epsilon}{2^n}\,\text{διάμετρος}\,(\Delta)$$

για κάθε $\zeta \in \partial\Delta_n$. Άρα

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\Delta_n}(f(\zeta) - f(z) - f'(z)(\zeta - z))\,d\zeta\right| &\le \tfrac{\epsilon}{2^n}\,\text{διάμετρος}\,(\Delta)\,\text{μήκος}\,(\partial\Delta_n)\\ &\le \tfrac{3\epsilon}{2^n}\,\text{διάμετρος}\,(\Delta)\,\text{διάμετρος}\,(\Delta_n)\\ &= \tfrac{3\epsilon}{4^n}(\text{διάμετρος}\,(\Delta))^2.\end{aligned} \tag{6.2}$$

Τώρα παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με το παράδειγμα 6.1.2, είναι

$$\int_{\partial\Delta_n}(f(z) + f'(z)(\zeta - z))\,d\zeta = 0$$

διότι η συνάρτηση $f(z) + f'(z)(\zeta - z)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση του ζ.
Άρα η (6.2) γίνεται

$$|I_n| = \left|\int_{\partial\Delta_n} f(\zeta)\,d\zeta\right| \le \tfrac{3\epsilon}{4^n}(\text{διάμετρος}\,(\Delta))^2.$$

Τέλος, από την (ii) συνεπάγεται

$$|I| \le 3\epsilon(\text{διάμετρος}\,(\Delta))^2.$$

Επειδή ο ϵ είναι ο οποιοσδήποτε θετικός αριθμός, συνεπάγεται $I = 0$. □

Τώρα θα δούμε μια μικρή επέκταση του Θεωρήματος του Cauchy για τρίγωνα με λίγο ασθενέστερες υποθέσεις για τη συνάρτηση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.4. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω εκτός από πεπερασμένου πλήθους σημεία του Ω στα οποία η f είναι απλώς συνεχής και έστω τρίγωνο $\Delta \subseteq \Omega$. Τότε*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

Απόδειξη. Έστω ότι στο Ω υπάρχει *ένα μόνο* σημείο z_0 στο οποίο η f είναι απλώς συνεχής, οπότε η f είναι αναλυτική στο $\Omega \setminus \{z_0\}$.

Περίπτωση 1. Αν το z_0 δεν ανήκει στο τρίγωνο Δ, τότε $\Delta \subseteq \Omega\setminus\{z_0\}$ και το $\Omega\setminus\{z_0\}$ είναι ανοικτό, οπότε από το προηγούμενο Θεώρημα του Cauchy έχουμε ότι $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

Περίπτωση 2. Υποθέτουμε ότι το z_0 είναι μια από τις κορυφές του Δ, δηλαδή $\Delta = \Delta(z_0, z_1, z_2)$. Έστω $\epsilon > 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο z_0, είναι φραγμένη κοντά στο z_0 και, επομένως, υπάρχει $\delta_0 > 0$ και $M_0 \geq 0$ ώστε

$$|f(z)| \leq M_0 \qquad \text{για } \ z \in D(z_0; \delta_0). \tag{6.3}$$

Τώρα, θεωρούμε δυο σημεία w_1, w_2 στα ευθ. τμήματα $[z_0, z_1]$, $[z_0, z_2]$, αντιστοίχως, τόσο κοντά στο z_0 ώστε να ανήκουν και τα δυο στον $D(z_0; \delta_0)$ και ώστε το τρίγωνο

$$\Delta_0 = \Delta(z_0, w_1, w_2)$$

να έχει περίμετρο

$$\text{μήκος}\,(\partial\Delta_0) < \tfrac{\epsilon}{M_0}. \tag{6.4}$$

Τώρα, εκτός από το $\Delta_0 = \Delta(z_0, w_1, w_2)$ θεωρούμε και τα τρίγωνα

$$\Delta_1 = \Delta(w_1, z_1, w_2), \quad \Delta_2 = \Delta(z_1, z_2, w_2)$$

καθώς και τα αντίστοιχα επικαμπύλια ολοκληρώματα

$$\int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz, \quad \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz, \quad \int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz.$$

Είναι φανερό ότι το Δ χωρίζεται στα τρία τρίγωνα $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ και, όπως στην απόδειξη του προηγούμενου Θεωρήματος του Cauchy,

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz. \tag{6.5}$$

Επειδή τα Δ_1 και Δ_2 δεν περιέχουν το z_0, από την Περίπτωση 1 συνεπάγεται

$$\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz = 0, \qquad \int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz = 0. \tag{6.6}$$

Επίσης, επειδή το Δ_0 περιέχεται στον $D(z_0; \delta_0)$, από την (6.3) συνεπάγεται ότι ισχύει $|f(z)| \leq M_0$ για κάθε $z \in \partial\Delta_0$, οπότε βάσει και της (6.4) έχουμε

$$\Big| \int_{\partial\Delta_0} f(z)\,dz\Big| \leq M_0\, \text{μήκος}\,(\partial\Delta_0) < M_0\, \tfrac{\epsilon}{M_0} = \epsilon. \tag{6.7}$$

Από τις (6.5), (6.6) και (6.7) συνεπάγεται

$$\Big| \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\Big| < \epsilon$$

και, επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται ότι $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

Περίπτωση 3. Κατόπιν, υποθέτουμε ότι το z_0 ανήκει σε κάποια πλευρά του Δ. Έστω, λοιπόν, $\Delta = \Delta(z_1, z_2, z_3)$ και έστω ότι το z_0 ανήκει στο ευθ. τμήμα $[z_2, z_3]$. Τώρα χωρίζουμε το Δ στα τρίγωνα $\Delta_3 = \Delta(z_1, z_2, z_0)$ και $\Delta_2 = \Delta(z_1, z_0, z_3)$. Τότε το z_0 είναι κορυφή καθενός από τα Δ_2, Δ_3, οπότε από την Περίπτωση 2 έχουμε

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_3} f(z)\,dz = 0 + 0 = 0.$$

Περίπτωση 4. Τέλος, έστω ότι το z_0 είναι εσωτερικό σημείο του $\Delta = \Delta(z_1, z_2, z_3)$. Τώρα χωρίζουμε το Δ στα τρίγωνα $\Delta_1 = \Delta(z_2, z_3, z_0), \Delta_2 = \Delta(z_3, z_1, z_0), \Delta_3 = \Delta(z_1, z_2, z_0)$. Τότε το z_0 είναι κορυφή καθενός από τα $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, οπότε από την Περίπτωση 2 έχουμε

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz + \int_{\partial\Delta_3} f(z)\,dz = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Άρα έχουμε τελειώσει στην περίπτωση που στο Ω υπάρχει ένα μόνο σημείο z_0 στο οποίο η f είναι απλώς συνεχής. Η γενική περίπτωση αποδεικνύεται επαγωγικά ως προς τον αριθμό των σημείων στα οποία η f είναι απλώς συνεχής. $\square$

6.2 Παράγουσες και το Γενικό Θεώρημα του Cauchy σε αστρόμορφα σύνολα.

Οι Προτάσεις 6.5 και 6.6 αναφέρουν δυο βασικά αποτελέσματα της Μιγαδικής Ανάλυσης αλλά στην περίπτωση ανοικτού και *αστρόμορφου* συνόλου. Σε πολλά βιβλία τα ίδια αποτελέσματα αναφέρονται για ανοικτά και *κυρτά* σύνολα: τα κυρτά σύνολα είναι ειδικές περιπτώσεις αστρόμορφων συνόλων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.5. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό και αστρόμορφο σύνολο Ω εκτός από πεπερασμένου πλήθους σημεία του Ω στα οποία η f είναι απλώς συνεχής. Τότε υπάρχει παράγουσα της f στο Ω.*

Απόδειξη. Θεωρούμε σταθερό σημείο $z_0 \in \Omega$, το οποίο είναι κέντρο του Ω, και για κάθε $z \in \Omega$ ορίζουμε

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta. \tag{6.8}$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ορίζεται διότι το ευθύγραμμο τμήμα $[z_0, z]$ περιέχεται στο Ω και η f είναι συνεχής. Θα αποδείξουμε ότι $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Omega$.
Θεωρούμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$.
Επειδή η f είναι συνεχής στον z, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να είναι

$$|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon \qquad \text{για } |\zeta - z| < \delta.$$

Έστω $|w - z| < \delta$. Τότε για κάθε $\zeta \in [z, w]$ ισχύει $|\zeta - z| < \delta$ και, επομένως, $|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon$. Άρα

$$\Big| \int_{[z,w]} (f(\zeta) - f(z))\, d\zeta \Big| \leq \epsilon |w - z| \qquad \text{για } |w - z| < \delta. \tag{6.9}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα του Cauchy στην λίγο πιο γενική μορφή της Πρότασης 6.4, είναι

$$\int_{\partial\Delta(z_0,w,z)} f(z)\, dz = 0,$$

οπότε

$$\int_{[z_0,w]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[w,z]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z,z_0]} f(\zeta)\, d\zeta = 0$$

και, επομένως, βάσει και του τύπου (6.8) είναι

$$F(w) - F(z) = \int_{[z,w]} f(\zeta)\, d\zeta. \tag{6.10}$$

Χρησιμοποιώντας τις (6.9) και (6.10), έχουμε ότι, αν $|w - z| < \delta$, τότε

$$\begin{aligned} \Big| \tfrac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z) \Big| &= \Big| \tfrac{F(w)-F(z)-(w-z)f(z)}{w-z} \Big| = \tfrac{\big| \int_{[z,w]} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{[z,w]} f(z)\, d\zeta \big|}{|w-z|} \\ &= \tfrac{\big| \int_{[z,w]} (f(\zeta)-f(z))\, d\zeta \big|}{|w-z|} \leq \tfrac{\epsilon |w-z|}{|w-z|} = \epsilon. \end{aligned}$$

Άρα $\lim_{w \to z} \frac{F(w)-F(z)}{w-z} = f(z)$. □

Η Πρόταση 6.5 λέει ειδικώτερα ότι
Κάθε αναλυτική συνάρτηση σε ανοικτό και αστρόμορφο σύνολο έχει παράγουσα στο σύνολο αυτό.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.6. [**Το Γενικό Θεώρημα του Cauchy σε αστρόμορφα σύνολα**] *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό και αστρόμορφο σύνολο Ω εκτός από πεπερασμένου πλήθους σημεία του Ω στα οποία η f είναι απλώς συνεχής. Τότε για κάθε καμπύλη γ στο Ω το $\int_\gamma f(z)\, dz$ δεν εξαρτάται από την καμπύλη αλλά μόνο από τα άκρα της. Ειδικώτερα, για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω είναι*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Απόδειξη. Συνδυασμός των Προτάσεων 6.2 και 6.5. □

Παράδειγμα 6.2.1. Θεωρούμε το σύνολο A το οποίο προκύπτει αν από το $\mathbb{C}$ αφαιρέσουμε μια οποιαδήποτε ημιευθεία με κορυφή το 0. Τότε

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 0$$

για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο A.
Αυτό μπορούμε να το δούμε με δυο τρόπους.
Γνωρίζουμε ότι στο A ορίζεται συνεχής και, επομένως, αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου και ότι κάθε τέτοιος κλάδος είναι παράγουσα της $\frac{1}{z}$ στο A. Άρα το αποτέλεσμα είναι άμεση εφαρμογή της Πρότασης 6.2.
Πιο απλά, το A είναι αστρόμορφο σύνολο και η $\frac{1}{z}$ είναι αναλυτική σ' αυτό. Άρα το αποτέλεσμα είναι άμεση εφαρμογή της Πρότασης 6.6.
Φυσικά, με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = 0$$

για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο A, το οποίο προκύπτει αν από το $\mathbb{C}$ αφαιρέσουμε μια οποιαδήποτε ημιευθεία με κορυφή το z_0. (Πάλι το σύνολο A είναι αστρόμορφο.)
Ας δούμε *πολύ προσεκτικά* τη διαφορά με την κατάσταση στο παράδειγμα 6.1.5. Στο παράδειγμα 6.1.5 η καμπύλη γ είναι κύκλος με κέντρο z_0 και, επομένως, η γ "περικυκλώνει" το σημείο z_0. Αν, όμως, αφαιρέσουμε μια ημιευθεία με κορυφή z_0 και θεωρήσουμε, όπως στο παρόν παράδειγμα, καμπύλη γ στο σύνολο A που απομένει, τότε η γ δεν μπορεί να "κόψει" την ημιευθεία και, επομένως, δεν μπορεί να "περικυκλώσει" το z_0.
Το να δώσουμε ακριβές και αυστηρό μαθηματικό νόημα στην έννοια "περικυκλώνει" για μια καμπύλη και ένα σημείο και να δούμε για ποιόν λόγο προκύπτουν μηδενικά ή μη-μηδενικά επικαμπύλια ολοκληρώματα ανάλογα με την περίπτωση είναι ένας από τους κεντρικούς στόχους του μαθήματος.

Θα περιγράψουμε τώρα μια πάρα πολύ χρήσιμη τεχνική για να χειριζόμαστε επικαμπύλια ολοκληρώματα αναλυτικών συναρτήσεων. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιείται κυρίως σε δυο χαρακτηριστικές περιπτώσεις.
Πρώτη περίπτωση. Έστω ότι η $f:\Omega\to\mathbb{C}$ είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω, ότι το Ω *δεν είναι αστρόμορφο* και έστω και μια καμπύλη γ στο Ω. Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\int_\gamma f(z)\,dz$.
Αν το Ω ήταν αστρόμορφο, θα συμπεραίναμε ότι $\int_\gamma f(z)\,dz=0$. Υποθέτουμε ότι το σχήμα της γ είναι οπτικά απλό και ότι μπορούμε να διακρίνουμε το "εσωτερικό" της, δηλαδή το ανοικτό σύνολο D των σημείων τα οποία η γ "περικυκλώνει", και υποθέτουμε ότι το D είναι υποσύνολο του Ω, οπότε η f είναι αναλυτική στο D και στην τροχιά γ^* της καμπύλης. Υποθέτουμε, επίσης, ότι $\partial D=\gamma^*$. Τώρα, η τεχνική που θα εφαρμόσουμε έχει ως εξής. Χωρίζουμε το D σε ανοικτά σύνολα $D_1,\dots,D_n$ ξένα ανά δύο έτσι ώστε τα σύνορα $\partial D_1,\dots,\partial D_n$ να είναι τροχιές απλών καμπυλών $\gamma_1,\dots,\gamma_n$, έτσι ώστε $\overline{D}=\overline{D_1}\cup\cdots\cup\overline{D_n}$ και, τέλος, έτσι ώστε: όταν αναλύσουμε με κατάλληλο τρόπο καθεμιά από τις $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ σε μικρότερες καμπύλες και όταν απαλείψουμε από αυτές τις μικρότερες καμπύλες εκείνες που είναι αντίθετες να απομείνουν κάποιες καμπύλες των οποίων η σύνθεση είναι η αρχική καμπύλη γ. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz.$$

Αυτήν την τεχνική την εφαρμόσαμε ήδη στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.1 και στην απόδειξη της Πρότασης 6.4 με τον χωρισμό τριγώνου σε μικρότερα τρίγωνα.
Αν, τώρα, καταφέρουμε να επιλέξουμε τα διάφορα $D_1,\dots,D_n$ έτσι ώστε καθένα από αυτά μαζί

με την συνοριακή καμπύλη του, δηλαδή καθένα από τα $\overline{D_1}, \ldots, \overline{D_n}$, να περιέχεται σε ένα αντίστοιχο *αστρόμορφο* ανοικτό υποσύνολο του Ω, τότε θα συμπεράνουμε ότι

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz = 0 + \cdots + 0 = 0.$$

Δεύτερη περίπτωση. Έστω ότι η $f : \Omega \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω και έστω δυο καμπύλες γ_1, γ_2 στο Ω. Θέλουμε να συσχετίσουμε τα $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz$, $\int_{\gamma_2} f(z)\,dz$.
Υποθέτουμε ότι τα σχήματα των γ_1, γ_2 είναι οπτικά απλά, ότι διακρίνουμε ότι η γ_2 "περικυκλώνει" την γ_1 και ότι διακρίνουμε το "ενδιάμεσο" σύνολο, δηλαδή το ανοικτό σύνολο D των σημείων τα οποία "περικυκλώνει" η γ_2 και δεν "περικυκλώνει" η γ_1, και υποθέτουμε ότι το D είναι υποσύνολο του Ω, οπότε η f είναι αναλυτική στο D και στις τροχιές ${\gamma_1}^*$, ${\gamma_2}^*$ των καμπυλών. Υποθέτουμε, επίσης, ότι $\partial D = {\gamma_1}^* \cup {\gamma_2}^*$. Τώρα, η τεχνική έχει ως εξής. Χωρίζουμε το D σε ανοικτά σύνολα $D_1, \ldots, D_n$ ξένα ανά δύο έτσι ώστε τα σύνορα $\partial D_1, \ldots, \partial D_n$ να είναι τροχιές απλών καμπυλών $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, έτσι ώστε $\overline{D} = \overline{D_1} \cup \cdots \cup \overline{D_n}$ και, τέλος, έτσι ώστε: όταν αναλύσουμε με κατάλληλο τρόπο καθεμιά από τις $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ σε μικρότερες καμπύλες και όταν απαλείψουμε από αυτές τις μικρότερες καμπύλες εκείνες που είναι αντίθετες να απομείνουν κάποιες καμπύλες των οποίων η σύνθεση είναι η αρχική καμπύλη γ_2 και η αντίθετη αρχική καμπύλη $-\gamma_1$. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι:

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz - \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\sigma_1} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\sigma_n} f(z)\,dz.$$

Αν καταφέρουμε να επιλέξουμε τα διάφορα $D_1, \ldots, D_n$ έτσι ώστε καθένα από αυτά μαζί με την συνοριακή καμπύλη του, δηλαδή καθένα από τα $\overline{D_1}, \ldots, \overline{D_n}$, να περιέχεται σε ένα αντίστοιχο *αστρόμορφο* ανοικτό υποσύνολο του Ω, τότε θα συμπεράνουμε ότι

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz - \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\sigma_1} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\sigma_n} f(z)\,dz = 0 + \cdots + 0 = 0$$

και, επομένως,

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

Παράδειγμα 6.2.2. Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο $\Omega = D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$ και έστω $0 < r_1 < r_2$. Θεωρούμε την οριζόντια ευθεία l η οποία διέρχεται από το z_0 και έστω B, A τα σημεία τομής της με τον κύκλο $C(z_0; r_1)$ (το B αριστερά και το A δεξιά) και D, C τα σημεία τομής της με τον κύκλο $C(z_0; r_2)$ (το D αριστερά και το C δεξιά). Η ευθεία l χωρίζει τον δακτύλιο $R = D(z_0; r_1, r_2)$ ανάμεσα στους κύκλους $C(z_0; r_1)$ και $C(z_0; r_2)$ σε δυο ημιδακτύλιους R_1, R_2 : ο R_1 πάνω από την l και ο R_2 κάτω από την l. Ονομάζουμε σ_1, σ_2 τις αντίστοιχες συνοριακές καμπύλες με τη θετική φορά περιστροφής τους. Αφού ξαναδούμε τα παραδείγματα 4.4.2, 4.4.3 και 4.4.6 για τα διάφορα σύμβολα που χρησιμοποιούμε, έχουμε:

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{\sigma_1} f(z)\,dz &= \textstyle\int_{[A,C]} f(z)\,dz + \int_{\mathrm{arc}\,(C,D)} f(z)\,dz + \int_{[D,B]} f(z)\,dz - \int_{\mathrm{arc}\,(A,B)} f(z)\,dz,\\ \textstyle\int_{\sigma_2} f(z)\,dz &= \textstyle\int_{[B,D]} f(z)\,dz + \int_{\mathrm{arc}\,(D,C)} f(z)\,dz + \int_{[C,A]} f(z)\,dz - \int_{\mathrm{arc}\,(B,A)} f(z)\,dz.\end{aligned} \tag{6.11}$$

Τώρα βλέπουμε ότι ο ημιδακτύλιος R_1 με την συνοριακή καμπύλη σ_1 περιέχονται στο ανοικτό και *αστρόμορφο* υποσύνολο Ω_1 του Ω το οποίο προκύπτει από το Ω αν από αυτό αφαιρέσουμε την κατακόρυφη προς τα κάτω ημιευθεία με κορυφή z_0. Ομοίως, ο ημιδακτύλιος R_2 με την συνοριακή καμπύλη σ_2 περιέχονται στο ανοικτό και *αστρόμορφο* υποσύνολο Ω_2 του Ω το οποίο προκύπτει από το Ω αν από αυτό αφαιρέσουμε την κατακόρυφη προς τα πάνω ημιευθεία με κορυφή z_0. Άρα

$$\textstyle\int_{\sigma_1} f(z)\,dz = 0, \qquad \int_{\sigma_2} f(z)\,dz = 0. \tag{6.12}$$

Τώρα προσθέτουμε τις (6.11) παίρνοντας υπόψη και τις (6.12) και έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathrm{arc}\,(C,D)} f(z)\,dz - \int_{\mathrm{arc}\,(A,B)} f(z)\,dz + \int_{\mathrm{arc}\,(D,C)} f(z)\,dz - \int_{\mathrm{arc}\,(B,A)} f(z)\,dz \\ &= \int_{C(z_0;r_2)} f(z)\,dz - \int_{C(z_0;r_1)} f(z)\,dz \end{aligned}$$

και καταλήγουμε στο συμπέρασμα

$$\int_{C(z_0;r_2)} f(z)\,dz = \int_{C(z_0;r_1)} f(z)\,dz.$$

Αυτό σημαίνει ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{C(z_0;r)} f(z)\,dz$ είναι ανεξάρτητο της ακτίνας r όταν $0 < r < R$.
Το συμπέρασμα αυτό προέκυψε από την υπόθεση ότι η f είναι αναλυτική στο $D(z_0;R)\setminus\{z_0\}$. Αν η f είναι αναλυτική και στο σημείο z_0, δηλαδή σε ολόκληρο τον δίσκο $D(z_0;R)$, τότε, επειδή ο δίσκος είναι κυρτό σύνολο, θα ισχύει $\int_{C(z_0;r)} f(z)\,dz = 0$ για κάθε r με $0 < r < R$.

Ας δούμε τώρα το αντίστροφο της Πρότασης 6.2.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.7. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής στο ανοικτό σύνολο Ω. Τα παρακάτω (i), (ii), (iii) είναι ισοδύναμα.*
(i) Για κάθε καμπύλη γ στο Ω το $\int_\gamma f(z)\,dz$ δεν εξαρτάται από την καμπύλη αλλά μόνο από τα άκρα της.
(ii) Για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω είναι $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.
(iii) Υπάρχει παράγουσα της f στο Ω.

Απόδειξη. Η Πρόταση 6.2 λέει ότι το (iii) συνεπάγεται τα (i), (ii). Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι τα (i), (ii) είναι ισοδύναμα και ότι συνεπάγονται το (iii).
Έστω ότι ισχύει το (i). Αν η καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \Omega$ είναι κλειστή, δηλαδή $\gamma(a) = \gamma(b)$, θέτουμε $z_0 = \gamma(a) = \gamma(b)$ και θεωρούμε την *σταθερή* καμπύλη $\gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ με $\gamma_1(t) = z_0$ για κάθε $t \in [a,b]$. Οι γ, γ_1 έχουν τα ίδια άκρα, οπότε λόγω υπόθεσης ισχύει

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma_1(t))\gamma_1{}'(t)\,dt = \int_a^b f(z_0)\,0\,dt = 0.$$

Άρα ισχύει το (ii).
Έστω ότι ισχύει το (ii). Έστω ότι οι καμπύλες γ_1, γ_2 στο Ω έχουν τα ίδια άκρα. Τότε η καμπύλη $\gamma = \gamma_1 \dot{+} (-\gamma_2)$ είναι στο Ω και είναι κλειστή. Άρα λόγω υπόθεσης έχουμε

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{-\gamma_2} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz = 0,$$

οπότε $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$.
Έστω ότι ισχύει το (i). Κατ' αρχάς υποθέτουμε ότι το Ω είναι *και συνεκτικό*.
Θεωρούμε και ένα σταθερό σημείο z_0 του Ω.
Επειδή το Ω είναι ανοικτό και συνεκτικό, για κάθε $z \in \Omega$ υπάρχει τουλάχιστον μια καμπύλη γ (και μάλιστα, πολυγωνική) στο Ω η οποία έχει αρχικό άκρο το z_0 και τελικό άκρο το z. Ορίζουμε

$$F(z) = \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta.$$

Έτσι ορίζεται συνάρτηση

$$F : \Omega \to \mathbb{C}.$$

Τώρα είναι βασικό να καταλάβουμε ότι για να είναι η F *συνάρτηση* πρέπει ο αριθμός $F(z)$ να είναι *μονοσήμαντα ορισμένος*. Δηλαδή, πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι το αποτέλεσμα του $\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta$ εξαρτάται μόνο από το z και όχι από την καμπύλη γ που επιλέγουμε για να συνδέσουμε το z_0 με το z. Αυτό, όμως, εξασφαλίζεται ακριβώς από την υπόθεση (i).

Απομένει να αποδείξουμε ότι ισχύει $F'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in \Omega$.
Θεωρούμε οποιοδήποτε $z_1 \in \Omega$ και, επειδή το Ω είναι ανοικτό, μπορούμε να πάρουμε έναν δίσκο $D(z_2; r)$ ώστε

$$z_1 \in D(z_2; r) \subseteq \Omega.$$

Κρατάμε τον $D(z_2; r)$ σταθερό και θεωρούμε και μια σταθερή καμπύλη γ_0 στο Ω με αρχικό άκρο z_0 και τελικό άκρο z_2 και για κάθε $z \in D(z_2; r)$ θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα $[z_2, z]$ και ορίζουμε

$$G(z) = \int_{[z_2,z]} f(\zeta)\, d\zeta \qquad \text{για } z \in D(z_2; r).$$

Ο δίσκος $D(z_2; r)$ είναι, φυσικά, αστρόμορφο σύνολο με κέντρο z_2 και παρατηρήστε ότι η συνάρτηση G που ορίσαμε στον $D(z_2; r)$ είναι ακριβώς η συνάρτηση που ορίσαμε στην γενική περίπτωση αστρόμορφου συνόλου στην απόδειξη της Πρότασης 6.4. Άρα ισχύει

$$G'(z) = f(z) \qquad \text{για } z \in D(z_2; r).$$

Τώρα, όμως, θέτουμε

$$\gamma = \gamma_0 \dot{+} [z_2, z] \qquad \text{για } z \in D(z_2; r).$$

και η γ είναι καμπύλη στο Ω με αρχικό άκρο z_0 και τελικό άκρο z. Άρα

$$F(z) = \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma_0} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z_2,z]} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma_0} f(\zeta)\, d\zeta + G(z) \qquad \text{για } z \in D(z_2; r).$$

Επειδή το $\int_{\gamma_0} f(\zeta)\, d\zeta$ είναι σταθερός αριθμός, συνεπάγεται

$$F'(z) = G'(z) = f(z) \qquad \text{για } z \in D(z_2; r)$$

και, επομένως, $F'(z_1) = f(z_1)$. Επειδή το z_1 είναι οποιοδήποτε σημείο του Ω, η F είναι παράγουσα της f στο Ω.
Τώρα, ας δούμε τη γενική περίπτωση, όταν το Ω δεν είναι συνεκτικό.
Γνωρίζουμε ότι το Ω είναι η ένωση των ξένων ανά δύο συνεκτικών συνιστωσών του. Έστω U μια οποιαδήποτε συνεκτική συνιστώσα του Ω. Το U είναι ανοικτό και συνεκτικό σύνολο και η f είναι συνεχής στο U. Επίσης, αν έχουμε δυο καμπύλες στο U με κοινά άκρα, τότες αυτές είναι και στο μεγαλύτερο σύνολο Ω, οπότε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα της f στις δυο καμπύλες είναι ίσα. Άρα η υπόθεση (i) ισχύει και για το σύνολο U. Άρα, σύμφωνα με το αποτέλεσμα στην ειδική περίπτωση, η f έχει παράγουσα στο U. Δηλαδή υπάρχει συνάρτηση F_U ορισμένη στην συνιστώσα U για την οποία ισχύει ${F_U}'(z) = f(z)$ για κάθε $z \in U$.
Αυτό, όμως, μπορεί να γίνει σε κάθε συνεκτική συνιστώσα U του Ω. Δηλαδή, σε κάθε συνεκτική συνιστώσα U ορίζεται μια αντίστοιχη συνάρτηση F_U. Επειδή οι συνεκτικές συνιστώσες U είναι ξένες ανά δύο, από όλες τις αντίστοιχες συναρτήσεις F_U ορίζεται μια συνάρτηση F στο Ω έτσι ώστε ο περιορισμός της F στην κάθε U να ισούται με την αντίστοιχη F_U. Αυτή η F είναι παράγουσα της f στο Ω. Πράγματι, κάθε $z \in \Omega$ ανήκει σε μία (μοναδική) συνιστώσα U, οπότε $F'(z) = {F_U}'(z) = f(z)$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.8. *Έστω ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Στο Ω ορίζεται αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου αν και μόνο αν ισχύει $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω.*

Απόδειξη. Αν στο Ω ορίζεται αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου, τότε αυτός ο κλάδος είναι παράγουσα της $\frac{1}{z}$ στο Ω, οπότε ισχύει $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω.
Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω. Τότε η $\frac{1}{z}$ έχει, σύμφωνα με την Πρόταση 6.7, παράγουσα στο Ω, δηλαδή υπάρχει $F : \Omega \to \mathbb{C}$ ώστε να ισχύει

$$F'(z) = \frac{1}{z} \qquad \text{για } z \in \Omega.$$

Τώρα,

$$\tfrac{d}{dz}(ze^{-F(z)}) = e^{-F(z)} - zF'(z)e^{-F(z)} = (1 - zF'(z))e^{-F(z)} = 0 \qquad \text{για } \ z \in \Omega.$$

Από την Πρόταση 6.1 συνεπάγεται ότι για κάθε συνεκτική συνιστώσα U του Ω υπάρχει αντίστοιχη σταθερά c_U ώστε να ισχύει

$$ze^{-F(z)} = c_U \qquad \text{για } \ z \in U.$$

Επειδή $c_U \neq 0$, υπάρχει d_U ώστε $e^{d_U} = c_U$ και, επομένως, ισχύει

$$e^{F(z)+d_U} = z \qquad \text{για } \ z \in U.$$

Τώρα, ορίζουμε τη συνάρτηση $G : \Omega \to \mathbb{C}$ προσθέτοντας στην F σε κάθε συνεκτική συνιστώσα U του Ω την αντίστοιχη σταθερά d_U. Τότε,

$$e^{G(z)} = z \qquad \text{για } \ z \in \Omega,$$

οπότε η G είναι αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου στο Ω. $\square$

Ασκήσεις.

6.2.1. Υπολογίστε το $\int_\gamma (z-z_0)^m \, dz$, όπου $m \in \mathbb{Z}$ και γ είναι καμπύλη που περιγράφει με τη θετική φορά την περίμετρο τετραγώνου με κέντρο z_0 και πλευρές παράλληλες στους κύριους άξονες, με δυο τρόπους:

[α] Χρησιμοποιώντας παραμετρικές εξισώσεις των ευθυγράμμων τμημάτων που αποτελούν την γ και κάνοντας υπολογισμούς.

[β] Βλέποντας ότι, αν $m \geq 0$ ή $m \leq -2$, η απάντηση είναι πολύ απλή και ότι, αν $m = -1$, τότε με τρόπο όμοιο με του παραδείγματος 6.2.2 η απάντηση ανάγεται στον υπολογισμό επικαμπύλιου ολοκληρώματος σε κύκλο με κέντρο z_0 και είναι πάλι πολύ απλή.

6.2.2. Έστω $a \in D(z_0; R)$ και $a \neq z_0$. Υπολογίστε το $\int_{C(z_0;R)} \frac{1}{z-a} \, dz$ με δυο τρόπους:

[α] Χρησιμοποιώντας την παραμετρική εξίσωση του κύκλου και κάνοντας υπολογισμούς.

[β] Βλέποντας ότι με τρόπο όμοιο με του παραδείγματος 6.2.2 η απάντηση ανάγεται στον υπολογισμό επικαμπύλιου ολοκληρώματος σε έναν μικρό(;) κύκλο με κέντρο a και είναι πολύ απλή.

Εξαρτάται η απάντηση από τη θέση του a μέσα στον δίσκο $D(z_0; R)$; Ποιά είναι η απάντηση όταν $a = z_0$;

6.2.3. Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στον δακτύλιο $\Omega = D(z_0; R_1, R_2) = \{z \,|\, R_1 < |z-z_0| < R_2\}$ και έστω $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$. Αποδείξτε. όπως περίπου στο παράδειγμα 6.2.2, ότι

$$\int_{C(z_0;r_1)} f(z) \, dz = \int_{C(z_0;r_2)} f(z) \, dz.$$

Με άλλα λόγια το $\int_{C(z_0;r)} f(z) \, dz$ είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του $r \in (R_1, R_2)$. Αυτό είναι γενίκευση του παραδείγματος 6.2.2, όπου $R_1 = 0$.

6.2.4. Υπάρχουν πολυώνυμα p_n ώστε να ισχύει $p_n(z) \to \frac{1}{z}$ ομοιόμορφα στον κύκλο $C(0; 1)$;

6.2.5. Έστω γ_R η κλειστή καμπύλη η οποία περιγράφει μια φορά με τη θετική φορά διαδοχικά το ευθύγραμμο τμήμα από το 0 στο R, το τόξο του κύκλου με κέντρο 0 και ακτίνα R από το R στο $Re^{i\frac{\pi}{4}}$ και το ευθύγραμμο τμήμα από το $Re^{i\frac{\pi}{4}}$ στο 0. Έστω, επίσης, σ_R η καμπύλη η οποία περιγράφει μόνο το προαναφερθέν τόξο από το R στο $Re^{i\frac{\pi}{4}}$.

[α] Αποδείξτε ότι $\int_{\sigma_R} e^{-z^2} \, dz \to 0$ όταν $R \to +\infty$.

[β] Κατόπιν, χρησιμοποιώντας τον τύπο $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, αποδείξτε τους τύπους για τα λεγόμενα ολοκληρώματα Fresnel: $\int_0^{+\infty} \sin t^2 \, dt = \int_0^{+\infty} \cos t^2 \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

6.2.6. Έστω $y, R > 0$ και $\gamma_{R,y}$ η κλειστή καμπύλη η οποία περιγράφει μια φορά με τη θετική φορά διαδοχικά το ευθ.τμήμα $[-R, R]$, το ευθ. τμήμα $[R, R + iy]$, το ευθ. τμήμα $[R + iy, -R + iy]$ και το ευθ. τμήμα $[-R + iy, -R]$.

[α] Αποδείξτε ότι, με σταθερό $y > 0$, έχουμε $\int_{[R,R+iy]} e^{-z^2}\, dz \to 0$ και $\int_{[-R+iy,-R]} e^{-z^2}\, dz \to 0$ όταν $R \to +\infty$.

[β] Κατόπιν, αποδείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+iy)^2}\, dx$ δεν εξαρτάται από το $y \in [0, +\infty)$.

[γ] Τέλος, χρησιμοποιώντας τον τύπο $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, αποδείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2xy)\, dx = \sqrt{\pi} e^{-y^2}$$

για κάθε $y \geq 0$ και, αμέσως μετά και πολύ εύκολα, για κάθε $y \leq 0$. Ο τύπος αυτός είναι κεντρικής σημασίας για την Ανάλυση Fourier.

6.3 Δείκτης στροφής καμπύλης ως προς σημείο.

Θεωρούμε καμπύλη

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C},$$

όπου η γ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ του $\mathbb{R}$ και υποθέτουμε, όπως έχουμε συμφωνήσει, ότι η γ είναι τμηματικά ομαλή. Ειδικώτερα, υπάρχουν σημεία $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ ώστε η γ να είναι συνεχώς παραγωγίσιμη σε κάθε υποδιάστημα $[t_{k-1}, t_k]$.

Θεωρούμε, επίσης, οποιοδήποτε σημείο

$$z_0 \notin \gamma^* = \{\gamma(t) \,|\, t \in [a, b]\},$$

δηλαδή τέτοιο ώστε $z_0 \neq \gamma(t)$ για κάθε $t \in [a, b]$.

Τώρα ορίζουμε τη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$f(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\, ds \qquad \text{για } t \in [a, b].$$

Η συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα είναι τμηματικά συνεχής (ο αριθμητής είναι τμηματικά συνεχής και ο παρονομαστής είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται). Άρα το ολοκλήρωμα ορίζεται και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο t στο οποίο η $\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}$ είναι συνεχής, δηλαδή παραγωγίσιμη σε κάθε ανοικτό υποδιάστημα (t_{k-1}, t_k). Επίσης, σε κάθε τέτοιο ανοικτό υποδιάστημα ισχύει

$$f'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}.$$

Εργαζόμενοι σε ένα τέτοιο υποδιάστημα, έχουμε

$$\frac{d}{dt}\big((\gamma(t) - z_0)e^{-f(t)}\big) = \gamma'(t)e^{-f(t)} - (\gamma(t) - z_0)f'(t)e^{-f(t)} = 0.$$

Άρα η συνάρτηση $(\gamma(t) - z_0)e^{-f(t)}$ είναι σταθερή σε κάθε υποδιάστημα (t_{k-1}, t_k) και η σταθερή τιμή της εξαρτάται από το k. Αλλά, επειδή η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής σε *ολόκληρο* το $[a, b]$, είναι σταθερή σε ολόκληρο το $[a, b]$. Δηλαδή, υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{C}$ ώστε

$$(\gamma(t) - z_0)e^{-f(t)} = c \qquad \text{για } t \in [a, b].$$

Αυτό το γράφουμε

$$ce^{f(t)} = \gamma(t) - z_0 \qquad \text{για } t \in [a, b]$$

και, επειδή πρέπει να είναι $c \neq 0$, οπότε υπάρχει $d \in \mathbb{C}$ ώστε $e^d = c$, έχουμε

$$e^{f(t)+d} = \gamma(t) - z_0 \qquad \text{για } t \in [a, b].$$

Τέλος, ορίζουμε την $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$g(t) = f(t) + d = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\, ds + d \qquad \text{για } t \in [a,b] \tag{6.13}$$

και έχουμε ότι

$$e^{g(t)} = \gamma(t) - z_0 \qquad \text{για } t \in [a,b].$$

Ο άμεσος στόχος μας είναι να καταλάβουμε το γεωμετρικό περιεχόμενο της συνάρτησης g.

Το πραγματικό μέρος του $g(t)$ είναι ίσο με $\ln|\gamma(t) - z_0|$ και, αν συμβολίσουμε $\theta(t)$ το φανταστικό μέρος του $g(t)$, έχουμε

$$g(t) = \ln|\gamma(t) - z_0| + i\theta(t), \tag{6.14}$$

όπου, για κάθε $t \in [a,b]$,

$$\theta(t) \text{ είναι μια από τις τιμές του ορίσματος του μη-μηδενικού μιγαδικού αριθμού } \gamma(t) - z_0.$$

Δηλαδή, για κάθε $t \in [a,b]$, το $\theta(t)$ είναι μια από τις (άπειρες) γωνίες του διανύσματος $\gamma(t) - z_0$, το οποίο έχει αρχή το σταθερό σημείο z_0 και καταλήγει στο σημείο $\gamma(t)$ πάνω στην τροχιά της καμπύλης.

Το σημαντικό είναι ότι *η συνάρτηση* $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχής στο* $[a,b]$. Αυτό σημαίνει ότι: καθώς το t μεταβάλλεται στο $[a,b]$ και, επομένως, το σημείο $\gamma(t)$ μεταβάλλεται πάνω στην τροχιά της καμπύλης και, επομένως, το διάνυσμα $\gamma(t) - z_0$ περιστρέφεται γύρω από τη σταθερή αρχή του (δηλαδή το z_0) ακολουθώντας το σημείο $\gamma(t)$, τότε η τιμή της γωνίας του $\gamma(t) - z_0$ μεταβάλλεται *με συνεχή τρόπο* (δηλαδή, χωρίς απότομα άλματα).

Τώρα προσέξτε: για κάθε $t \in [a,b]$ το διάνυσμα $\gamma(t) - z_0$ έχει άπειρες γωνίες, οι οποίες ανά δύο διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π, οπότε για κάθε $t \in [a,b]$ έχουμε να επιλέξουμε τον $\theta(t)$ από άπειρους αριθμούς. Όμως, από τη στιγμή που θα κάνουμε μια συγκεκριμένη επιλογή της γωνίας $\theta(a)$, η επιλογή που θα κάνουμε για την γωνία $\theta(t)$ για οποιοδήποτε άλλο $t \in [a,b]$ είναι *μονοσήμαντα καθορισμένη*. Αυτό μπορούμε να το κατανοήσουμε ως εξής. Ας υποθέσουμε ότι η γωνία $\theta(a)$ είναι 30^o. (Στην πραγματικότητα έχουμε άπειρες επιλογές: $30^o + k360^o$ με $k \in \mathbb{Z}$. Εμείς κάνουμε μια επιλογή και έστω ότι αυτή είναι 30^o.) Αν πάρουμε ένα t_1 πολύ κοντά στο a, επειδή η θ είναι συνεχής, το $\theta(t_1)$ πρέπει να είναι πολύ κοντά στο $\theta(a)$. Ας πούμε ότι μια υποψήφια τιμή για το $\theta(t_1)$ είναι 31^o, οπότε για το $\theta(t_1)$ έχουμε άπειρες επιλογές: $31^o + k360^o$ με $k \in \mathbb{Z}$. Όμως, από αυτές τις άπειρες τιμές η *μοναδική* που είναι κοντά στην τιμή 30^o του $\theta(a)$ είναι η τιμή 31^o. Άρα είμαστε υποχρεωμένοι να επιλέξουμε ως τιμή του $\theta(t_1)$ την 31^o. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι, αν προχωρήσουμε σε ένα t_2 λίγο πιο πέρα από το t_1 και πολύ κοντά στο t_1, τότε η τιμή της γωνίας $\theta(t_2)$ θα καθοριστεί μονοσήμαντα από την (ήδη μονοσήμαντα καθορισμένη) τιμή του $\theta(t_1)$ διότι πρέπει να είναι πολύ κοντά σ' αυτήν. Αυτό συνεχίζεται μέχρι να φτάσουμε από σημείο σε σημείο στο άλλο άκρο b καλύπτοντας όλο το διάστημα $[a,b]$. Αν ως αρχική επιλογή γωνίας $\theta(a)$ δεν είχαμε κάνει την 30^o αλλά την $390^o = 30^o + 1 \cdot 360^o$, τότε ως επιλογή για την γωνία $\theta(t_1)$ θα έπρεπε να κάνουμε την $391^o = 31^o + 1 \cdot 360^o$ και ούτω καθ' εξής.

Τα προηγούμενα μπορούμε να τα αιτιολογήσουμε με αυστηρά μαθηματικό τρόπο ως εξής. Έστω ότι $\theta_1, \theta_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις ώστε για κάθε $t \in [a,b]$ οι τιμές $\theta_1(t)$ και $\theta_2(t)$ να είναι γωνίες του ίδιου διανύσματος $\gamma(t) - z_0$. Τότε για κάθε $t \in [a,b]$ η διαφορά $\theta_2(t) - \theta_1(t)$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π, οπότε μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση $k : [a,b] \to \mathbb{R}$ με τύπο $k(t) = \frac{\theta_2(t) - \theta_1(t)}{2\pi}$. Η k είναι συνεχής στο συνεκτικό σύνολο $[a,b]$ με πραγματικές τιμές, οπότε έχει την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής. Επειδή οι τιμές της είναι ακέραιοι, συνεπάγεται ότι είναι σταθερή. Άρα υπάρχει ένας σταθερός (δηλαδή, ανεξάρτητος του $t \in [a,b]$) ακέραιος k ώστε να ισχύει $\theta_2(t) - \theta_1(t) = k2\pi$ για κάθε $t \in [a,b]$. Ειδικότερα, αν $\theta_2(a) = \theta_1(a)$, τότε $k = 0$ και, επομένως, $\theta_2(t) = \theta_1(t)$ για κάθε $t \in [a,b]$. Αυτό μας λέει ό,τι είδαμε με μη αυστηρό τρόπο στην προηγούμενη παράγραφο: αν δυο από εμάς κάνουμε την ίδια επιλογή γωνίας

$\theta_2(a) = \theta_1(a)$ στο αρχικό σημείο $t = a$, τότε θα κάνουμε την ίδια επιλογή γωνίας $\theta_2(t) = \theta_1(t)$ σε κάθε επόμενο t σε ολόκληρο το διάστημα $[a, b]$.

Τώρα προσέξτε και πάλι: αν δυο από εμάς κάνουμε δυο επιλογές (ίδιες ή διαφορετικές) $\theta_1(a)$ και $\theta_2(a)$ για $t = a$, τότε η δυο διαφορές "τελική γωνία μείον αρχική γωνία" που θα βρούμε θα είναι ίδια και για τους δυο μας! Πράγματι:

$$\theta_2(b) - \theta_2(a) = (\theta_1(b) + k2\pi) - (\theta_1(a) + k2\pi) = \theta_1(b) - \theta_1(a).$$

Συνοψίζουμε:

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Μέσω των τύπων (6.13) και (6.14) ορίζεται μια συνάρτηση $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[a, b]$ και η οποία αποτελεί μια* **συνεχή επιλογή γωνίας** *του διανύσματος $\gamma - z_0$. Δυο οποιεσδήποτε τέτοιες συνεχείς επιλογές γωνίας του $\gamma - z_0$ διαφέρουν κατά σταθερό ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π στο $[a, b]$. Η διαφορά $\theta(b) - \theta(a)$ είναι ανεξάρτητη από την συγκεκριμένη επιλογή-συνάρτηση $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ και αποτελεί ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της καμπύλης γ σε σχέση με το σημείο z_0. Η διαφορά αυτή ονομάζεται, φυσιολογικά,* **συνολική μεταβολή γωνίας** *κατά μήκος της καμπύλης γ σε σχέση με το σημείο z_0.*

Ας θεωρήσουμε τώρα την πιο σημαντική ειδική περίπτωση που η καμπύλη γ είναι κλειστή, δηλαδή όταν $\gamma(b) = \gamma(a)$. Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα $\gamma(b) - z_0$ και $\gamma(a) - z_0$ ταυτίζονται, οπότε $\ln|\gamma(b) - z_0| = \ln|\gamma(a) - z_0|$ και οι γωνίες $\theta(b)$ και $\theta(a)$ διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Δηλαδή, σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, η συνολική μεταβολή γωνίας κατά μήκος της καμπύλης γ σε σχέση με το σημείο z_0 είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω κλειστή καμπύλη $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ και σημείο $z_0 \notin \gamma^*$. Αν $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι οποιαδήποτε συνεχής επιλογή γωνίας του διανύσματος $\gamma - z_0$, τότε συμβολίζουμε*

$$n(\gamma; z_0) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}.$$

Ο αριθμός $n(\gamma; z_0)$ είναι ακέραιος και δηλώνει με ποιό ακριβώς πολλαπλάσιο του 2π είναι ίση η συνολική μεταβολή γωνίας κατά μήκος της καμπύλης γ σε σχέση με το σημείο z_0 ή, με άλλα λόγια, τον αριθμό περιστροφών της καμπύλης γ γύρω από το z_0. Ο αριθμός $n(\gamma; z_0)$ ονομάζεται **δείκτης στροφής** *της γ ως προς το z_0.*

Αυτό το τελευταίο σχετικά με τον αριθμό περιστροφών της καμπύλης γ γύρω από το z_0 μπορεί να το κατανοήσει κανείς αν δει απλά παραδείγματα, όπως μια κυκλική καμπύλη γύρω από ένα εσωτερικό της σημείο ή γύρω από ένα εξωτερικό της σημείο.

Τώρα θα εκμεταλευτούμε τους τύπους (6.13) και (6.14) για να βρούμε έναν απλό τύπο για τον δείκτη στροφής $n(\gamma; z_0)$. Επειδή η γ είναι κλειστή και, επομένως, όπως είπαμε πιο πάνω, ισχύει $\ln|\gamma(b) - z_0| = \ln|\gamma(a) - z_0|$, από τον τύπο (6.14) έχουμε

$$g(b) - g(a) = i(\theta(b) - \theta(a)).$$

Επίσης, από τον τύπο (6.13) έχουμε

$$g(a) = \textstyle\int_a^a \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\, ds + d = d, \qquad g(b) = \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\, ds + d,$$

οπότε

$$n(\gamma; z_0) = \textstyle\frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi i}(g(b) - g(a)) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\, ds.$$

Τέλος, από τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος έχουμε

$$n(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz.$$

Παράδειγμα 6.3.1. Έστω $n \in \mathbb{Z}$ και η κλειστή καμπύλη $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με τύπο $\gamma(t) = z_0 + re^{int}$. Είναι σαφές ότι, αν $n \neq 0$ και το t διατρέχει το διάστημα $[0, 2\pi]$, τότε το $\gamma(t)$ διατρέχει $|n|$ φορές τον κύκλο $C(z_0; r)$ με τη θετική φορά, αν $n > 0$, και με την αρνητική φορά, αν $n < 0$. Αν $n = 0$, τότε το $\gamma(t)$ διατρέχει $|n| = 0$ φορές τον κύκλο $C(z_0; r)$ αφού μένει σταθερό στο ίδιο σημείο $z_0 + r$. Τώρα υπολογίζουμε

$$n(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} \, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(z_0 + re^{int}) - z_0} rine^{int} \, dt = \frac{1}{2\pi i} in2\pi = n.$$

Στην ειδική περίπτωση $n = 1$ έχουμε

$$n(C(z_0; r); z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \frac{1}{z - z_0} \, dz = 1.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.9. *Έστω ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ στο οποίο ορίζεται αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου. Θεωρούμε το σύνολο*

$$\Omega + z_0 = \{z + z_0 \,|\, z \in \Omega\}$$

το οποίο προκύπτει από το Ω με παράλληλη μεταφορά κατά το z_0. Το Ω δεν περιέχει το 0, οπότε το $\Omega + z_0$ δεν περιέχει το z_0.
Αν η κλειστή καμπύλη γ είναι στο $\Omega + z_0$, τότε

$$n(\gamma; z_0) = 0.$$

Απόδειξη. Αν $\gamma : [a, b] \to \Omega + z_0$, θεωρούμε την κλειστή καμπύλη $\gamma - z_0 : [a, b] \to \Omega$ με τύπο

$$(\gamma - z_0)(t) = \gamma(t) - z_0 \qquad \text{για } \ t \in [a, b].$$

Είναι σαφές ότι η καμπύλη $\gamma - z_0$ είναι η μεταφορά της γ κατά $-z_0$ και, επειδή η γ είναι στο $\Omega + z_0$, συνεπάγεται ότι η $\gamma - z_0$ είναι στο Ω.
Προφανώς, ισχύει $(\gamma - z_0)'(t) = \gamma'(t)$, και επομένως,

$$n(\gamma; z_0) = \int_\gamma \tfrac{1}{z - z_0} \, dz = \int_a^b \tfrac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} \, dt = \int_a^b \tfrac{(\gamma - z_0)'(t)}{(\gamma - z_0)(t)} \, dt = \int_{\gamma - z_0} \tfrac{1}{z} \, dz.$$

Επειδή η καμπύλη $\gamma - z_0$ είναι στο Ω και επειδή στο Ω ορίζεται αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου, από την Πρόταση 6.8 συνεπάγεται ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι 0 και άρα

$$n(\gamma; z_0) = \int_{\gamma - z_0} \tfrac{1}{z} \, dz = 0.$$

□

Παράδειγμα 6.3.2. Έστω ότι η κλειστή καμπύλη γ περιέχεται στο σύνολο A το οποίο προκύπτει αν από το $\mathbb{C}$ αφαιρέσουμε μια οποιαδήποτε ημιευθεία με κορυφή z_0. Τότε $n(\gamma; z_0) = 0$.
Πράγματι, αν θεωρήσουμε το σύνολο $\Omega = A - z_0$ το οποίο προκύπτει με παράλληλη μεταφορά του A κατά το $-z_0$, τότε το Ω είναι το $\mathbb{C}$ εκτός από μια ημιευθεία με κορυφή 0. Άρα στο Ω ορίζεται αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου. Τώρα, όμως, βλέπουμε ότι η κλειστή καμπύλη γ είναι στο $A = \Omega + z_0$, οπότε από την Πρόταση 6.9 συνεπάγεται ότι $n(\gamma; z_0) = 0$.
Το αποτέλεσμα αυτό πρέπει να το κατανοήσουμε ως εξής: *επειδή η γ περιέχεται στο σύνολο A, δεν τέμνει μια ημιευθεία με κορυφή z_0, οπότε δεν μπορεί να συμπληρώσει καμιά πλήρη περιστροφή γύρω από το z_0.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.10. *Έστω γ μια κλειστή καμπύλη. Τότε η συνάρτηση*

$$n(\gamma; \cdot\,) : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{Z}$$

είναι συνεχής στο ανοικτό σύνολο $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ και είναι σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Απόδειξη. Έστω $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Επειδή το $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ είναι ανοικτό, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$D(z;\delta) \subseteq \mathbb{C} \setminus \gamma^*,$$

δηλαδή η τροχιά της γ δεν τέμνει τον δίσκο $D(z;\delta)$.
Τώρα θεωρούμε τον μικρότερο δίσκο $D(z;\frac{\delta}{2})$ και έχουμε τα εξής

$$|\zeta - z| \geq \delta \qquad \text{για κάθε } \zeta \in \gamma^* \tag{6.15}$$

και

$$|\zeta - w| \geq \tfrac{\delta}{2} \qquad \text{για κάθε } \zeta \in \gamma^* \text{ και κάθε } w \in D(z;\tfrac{\delta}{2}). \tag{6.16}$$

Τώρα, για κάθε $w \in D(z;\frac{\delta}{2})$ έχουμε

$$\begin{aligned} n(\gamma;w) - n(\gamma;z) &= \tfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma \tfrac{1}{\zeta-w}\,d\zeta - \tfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma \tfrac{1}{\zeta-z}\,d\zeta = \tfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\tfrac{1}{\zeta-w} - \tfrac{1}{\zeta-z}\right)d\zeta \\ &= \tfrac{w-z}{2\pi i}\int_\gamma \tfrac{1}{(\zeta-w)(\zeta-z)}\,d\zeta. \end{aligned}$$

και, επομένως,

$$|n(\gamma;w) - n(\gamma;z)| = \tfrac{|w-z|}{2\pi}\Big|\int_\gamma \tfrac{1}{(\zeta-w)(\zeta-z)}\,d\zeta\Big|.$$

Από τις (6.15) και (6.16) συνεπάγεται

$$\Big|\tfrac{1}{(\zeta-w)(\zeta-z)}\Big| = \tfrac{1}{|\zeta-w|\,|\zeta-z|} \leq \tfrac{2}{\delta^2} \qquad \text{για κάθε } \zeta \in \gamma^*,$$

οπότε

$$|n(\gamma;w) - n(\gamma;z)| \leq \tfrac{|w-z|}{2\pi}\,\tfrac{2}{\delta^2}\,\text{μήκος}(\gamma).$$

Αυτό ισχύει για κάθε $w \in D(z;\frac{\delta}{2})$, οπότε όταν $w \to z$ συνεπάγεται $n(\gamma;w) \to n(\gamma;z)$.
Τώρα, έστω U οποιαδήποτε συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.
Επειδή το U είναι συνεκτικό σύνολο και η $n(\gamma;z)$, ως συνάρτηση του z στο U, είναι συνεχής και έχει πραγματικές (ακέραιες) τιμές, συνεπάγεται ότι έχει την ιδιότητα ενδιάμεσης τιμής στο U. Άρα, επειδή έχει μόνο ακέραιες τιμές, συνεπάγεται ότι είναι σταθερή στο U. □

Το τελευταίο συμπέρασμα της Πρότασης 6.10 διαβάζεται ως εξής:
Αν οι z_1, z_2 βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του συμπληρώματος της τροχιάς της κλειστής καμπύλης γ, τότε ο αριθμός περιστροφών της γ γύρω από το z_1 είναι ίδιος με τον αριθμό περιστροφών της γ γύρω από το z_2.

Η Πρόταση 6.10 είναι πολύ χρήσιμη όταν θέλουμε να υπολογίσουμε τον δείκτη στροφής μιας κλειστής καμπύλης γ ως προς ένα σημείο z που δεν ανήκει στην τροχιά της. Αν μπορούμε να βρούμε ένα άλλο σημείο z' έτσι ώστε τα δυο σημεία z, z' να βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του συμπληρώματος της τροχιάς της γ και έτσι ώστε να μπορεί να υπολογιστεί εύκολα ο δείκτης στροφής της γ ως προς το z', τότε $n(\gamma;z) = n(\gamma;z')$. Έτσι, με έμμεσο τρόπο υπολογίζουμε εύκολα τον $n(\gamma;z)$.

Παράδειγμα 6.3.3. Έστω $n \in \mathbb{Z}$ και η κλειστή καμπύλη $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ με τύπο $\gamma(t) = z_0 + re^{int}$ που είδαμε στο παράδειγμα 6.3.1. Αν $n \neq 0$, η τροχιά της γ είναι ο κύκλος $C(z_0;r)$ και το συμπλήρωμα της τροχιάς έχει εμφανώς δυο συνεκτικές συνιστώσες: τον δίσκο $D(z_0;r)$ και τον εξωτερικό δακτύλιο $D(z_0;r,+\infty)$.
Τότε για κάθε $z \in D(z_0;r)$ έχουμε

$$n(\gamma;z) = n(\gamma;z_0) = n.$$

Παρατηρήστε ότι, αν $z \neq z_0$ και προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τον δείκτη στροφής $n(\gamma;z)$ μέσω του τύπου

$$n(\gamma;z) = \tfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma \tfrac{1}{\zeta-z}\,d\zeta$$

χρησιμοποιώντας την παραμετρική εξίσωση της γ, θα δυσκολευτούμε αρκετά. Όμως, ο ίδιος υπολογισμός στην περίπτωση του σημείου $z = z_0$ είναι απλούστατος και έγινε στο παράδειγμα 6.3.1. Παρεμπιπτόντως, αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε z στον εξωτερικό δακτύλιο $D(z_0; r, +\infty)$, τότε ο υπολογισμός του $n(\gamma; z)$ μέσω του επικαμπύλιου ολοκληρώματος και της παραμετρικής εξίσωσης της γ δεν είναι απλός. Όμως, τώρα βλέπουμε ότι υπάρχει κάποια ημιευθεία με κορυφή z η οποία δεν τέμνει την τροχιά της γ, οπότε από το παράδειγμα 6.3.2 συνεπάγεται χωρίς κανένα υπολογισμό (!) ότι $n(\gamma; z) = 0$.

Μια χρήσιμη ιδιότητα του δείκτη στροφής είναι η εξής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.11. *Έστω κλειστές καμπύλες γ_1 και γ_2 με τα ίδια άκρα, οπότε ορίζεται η κλειστή καμπύλη $\gamma_1 \dot{+} \gamma_2$. Έστω, επίσης, σημείο z_0 το οποίο δεν ανήκει στις τροχιές των δυο καμπυλών, οπότε δεν ανήκει ούτε στην τροχιά της $\gamma_1 \dot{+} \gamma_2$. Τότε*

$$n(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2; z_0) = n(\gamma_1; z_0) + n(\gamma_2; z_0).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι απλή:

$$n(\gamma_1 \dot{+} \gamma_2; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 \dot{+} \gamma_2} \frac{1}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{1}{z - z_0}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{1}{z - z_0}\, dz = n(\gamma_1; z_0) + n(\gamma_2; z_0).$$

□

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω κλειστή καμπύλη γ και $z \notin \gamma^*$. Λέμε ότι η γ* **περικλείει** *το z αν $n(\gamma; z) \neq 0$.*

Ασκήσεις.

6.3.1. [α] Έστω κλειστές καμπύλες γ_1 και γ_2 και σημείο z το οποίο δεν ανήκει στις τροχιές των δυο καμπυλών. Υποθέτουμε τα εξής: υπάρχουν διαδοχικά σημεία $w_1^{(1)}, \ldots, w_n^{(1)}, w_{n+1}^{(1)} = w_1^{(1)}$ της γ_1 και (ίδιου πλήθους) "αντίστοιχα" διαδοχικά σημεία $w_1^{(2)}, \ldots, w_n^{(2)}, w_{n+1}^{(2)} = w_1^{(2)}$ της γ_2 και καμπύλες $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma_{n+1} = \sigma_1$ έτσι ώστε κάθε σ_j να έχει αρχικό σημείο το $w_j^{(1)}$ και τελικό σημείο το $w_j^{(2)}$ και έτσι ώστε, για κάθε $j = 1, \ldots, n$, το τμήμα της γ_1 που είναι ανάμεσα στα $w_j^{(1)}, w_{j+1}^{(1)}$ και το τμήμα της γ_2 που είναι ανάμεσα στα $w_j^{(2)}, w_{j+1}^{(2)}$ και η σ_j και η σ_{j+1} να είναι όλες μαζί σε ένα αντίστοιχο αστρόμορφο υποσύνολο του $\mathbb{C} \setminus \{z\}$.
Μετά από όλες αυτές τις υποθέσεις, αποδείξτε ότι

$$n(\gamma_1; z) = n(\gamma_2; z).$$

[β] Θεωρήστε σημείο z και δυο (διαφορετικές) ημιευθείες l και m με κορυφή z. Θεωρήστε και σημείο $A \neq z$ της l και σημείο $B \neq z$ της m. Θεωρήστε καμπύλη γ_1 με αρχικό άκρο A και τελικό άκρο B, η οποία είναι μέσα στη μία από τις δυο γωνίες που σχηματίζουν οι l, m. Θεωρήστε καμπύλη γ_2 με αρχικό άκρο B και τελικό άκρο A, η οποία είναι μέσα στην άλλη από τις δυο γωνίες που σχηματίζουν οι l, m. Θεωρήστε την κλειστή καμπύλη $\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2$. Χρησιμοποιώντας έναν μικρό κυκλάκο με κέντρο z, αποδείξτε ότι

$$n(\gamma; z) = \pm 1.$$

Το πρόσημο εξαρτάται από το ποιά γωνία περιέχει την γ_1 και ποιά την γ_2.

6.4 Οι τύποι του Cauchy σε αστρόμορφα σύνολα και η άπειρη παραγωγισιμότητα μιας αναλυτικής συνάρτησης.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.12. [**Ο τύπος του Cauchy σε αστρόμορφα σύνολα**] *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό και αστρόμορφο σύνολο Ω. Τότε για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω ισχύει*

$$n(\gamma; z)\, f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } \ z \in \Omega \setminus \gamma^*.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε μια κλειστή καμπύλη γ στο Ω και ένα σημείο z στο Ω και όχι πάνω στην τροχιά της γ.
Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : \Omega \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}, & \text{αν } \zeta \in \Omega, \zeta \neq z \\ f'(z), & \text{αν } \zeta = z \end{cases}$$

Η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο Ω και είναι αναλυτική στο Ω εκτός, ίσως, στο σημείο z. Πράγματι, οι $f(\zeta) - f(z)$ και $\zeta - z$ είναι, ως συναρτήσεις του ζ, αναλυτικές στο $\Omega \setminus \{z\}$ και η δεύτερη δεν μηδενίζεται στο $\Omega \setminus \{z\}$. Άρα και η $g(\zeta)$ είναι αναλυτική στο $\Omega \setminus \{z\}$.
Τώρα, στο z η $g(\zeta)$ είναι συνεχής, διότι

$$\lim_{\zeta \to z} g(\zeta) = \lim_{\zeta \to z} \tfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} = f'(z) = g(z).$$

Άρα η Πρόταση 6.6 εφαρμόζεται στην συνάρτηση g στο ανοικτό και αστρόμορφο Ω και έχουμε

$$\textstyle\int_\gamma g(\zeta)\, d\zeta = 0. \tag{6.17}$$

Επειδή το z δεν ανήκει στην τροχιά της γ, όταν το σημείο ζ διατρέχει την τροχιά της γ οι αντίστοιχες τιμές $g(\zeta)$ δίνονται από τον τύπο

$$g(\zeta) = \tfrac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z},$$

οπότε η (6.17) γίνεται

$$\textstyle\int_\gamma \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0.$$

Συνεπάγεται

$$\textstyle\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$$

και, επομένως,

$$\textstyle\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i\, n(\gamma; z)\, f(z).$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.13. [**Ο τύπος του Cauchy για κύκλους σε ανοικτά σύνολα**] *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω. Αν $\overline{D}(z_0; r) \subseteq \Omega$, τότε*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } \ z \in D(z_0; r).$$

Απόδειξη. Ο κλειστός δίσκος $\overline{D}(z_0; r)$ είναι συμπαγές σύνολο και το Ω^c είναι κλειστό. Τα δυο αυτά σύνολα είναι ξένα, οπότε από την Πρόταση 2.9 συνεπάγεται ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|z - w| \geq \delta$ για κάθε $z \in \overline{D}(z_0; r)$ και κάθε $w \in \Omega^c$.
Τώρα παίρνουμε οποιονδήποτε R με $0 < r < R \leq r + \delta$ και βλέπουμε εύκολα ότι

$$\overline{D}(z_0; r) \subseteq D(z_0; R) \subseteq \Omega.$$

Η f είναι αναλυτική στο *αστρόμορφο* ανοικτό σύνολο $D(z_0; R)$ (προσέξτε: το Ω μπορεί να μην είναι αστρόμορφο), και η καμπύλη που διαγράφει μια φορά και με τη θετική κατεύθυνση τον κύκλο $C(z_0; r)$ περιέχεται στον $D(z_0; R)$ και έχει δείκτη στροφής ίσο με 1 για κάθε $z \in D(z_0; r)$. Άρα η Πρόταση 6.12 συνεπάγεται αμέσως τον τύπο που έχουμε να αποδείξουμε. □

ΛΗΜΜΑ 6.2. *Έστω $n \in \mathbb{N}$ και καμπύλη (όχι αναγκαστικά κλειστή) γ και $\phi : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής στην τροχιά γ^* της γ. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{C}$ με τύπο*

$$g(z) = \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\, d\zeta \qquad \text{για } z \notin \gamma^*.$$

Τότε η g είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ και ισχύει

$$g'(z) = n \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{για } z \notin \gamma^*.$$

Απόδειξη. Ξεκινάμε όπως στην απόδειξη της Πρότασης 6.10.
Έστω $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Επειδή το $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ είναι ανοικτό, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$D(z; \delta) \subseteq \mathbb{C} \setminus \gamma^*,$$

δηλαδή η τροχιά της γ δεν τέμνει τον δίσκο $D(z;\delta)$.
Τώρα θεωρούμε τον μικρότερο δίσκο $D(z; \frac{\delta}{2})$ και έχουμε ότι

$$|\zeta - w| \geq \frac{\delta}{2} \qquad \text{για κάθε } \zeta \in \gamma^* \text{ και κάθε } w \in D(z; \tfrac{\delta}{2}). \tag{6.18}$$

Τώρα, για κάθε $w \in D(z; \frac{\delta}{2})$ έχουμε

$$g(w) - g(z) = \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - w)^n}\, d\zeta - \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\, d\zeta = \int_\gamma \Big(\frac{1}{(\zeta - w)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n} \Big) \phi(\zeta)\, d\zeta,$$

οπότε

$$\frac{g(w) - g(z)}{w - z} = \int_\gamma \frac{\frac{1}{(\zeta - w)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n}}{w - z} \phi(\zeta)\, d\zeta.$$

Άρα

$$\frac{g(w) - g(z)}{w - z} - n \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta = \int_\gamma \left(\frac{\frac{1}{(\zeta - w)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n}}{w - z} - \frac{n}{(\zeta - z)^{n+1}} \right) \phi(\zeta)\, d\zeta. \tag{6.19}$$

Τώρα, για απλούστευση των συμβόλων θέτουμε προσωρινά

$$A = \zeta - w, \qquad B = \zeta - z, \quad \text{οπότε} \quad B - A = w - z$$

και για την παράσταση μέσα στην παρένθεση της (6.19) χρησιμοποιούμε τον αλγεβρικό τύπο (τον οποίο θα αποδείξετε εσείς)

$$\frac{\frac{1}{A^n} - \frac{1}{B^n}}{B - A} - \frac{n}{B^{n+1}} = (B - A) \Big(\frac{1}{A^n B^2} + \frac{2}{A^{n-1} B^3} + \cdots + \frac{n-1}{A^2 B^n} + \frac{n}{A B^{n+1}} \Big).$$

Από την (6.18) έχουμε ότι για κάθε $\zeta \in \gamma^*$ και κάθε $w \in D(z; \frac{\delta}{2})$ ισχύει $|A| \geq \frac{\delta}{2}$ και $|B| \geq \frac{\delta}{2}$, οπότε για την παράσταση μέσα στην παρένθεση της (6.19) έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \frac{\frac{1}{A^n} - \frac{1}{B^n}}{B - A} - \frac{n}{B^{n+1}} \right| &\leq |B - A| \left(\frac{1}{|A|^n |B|^2} + \frac{2}{|A|^{n-1} |B|^3} + \cdots + \frac{n-1}{|A|^2 |B|^n} + \frac{n}{|A||B|^{n+1}} \right) \\ &\leq |w - z| \frac{1 + 2 + \cdots + (n-1) + n}{(\frac{\delta}{2})^{n+2}} = |w - z| \frac{n(n+1) 2^{n+1}}{\delta^{n+2}}. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Επίσης, επειδή η τροχιά γ^* είναι συμπαγές σύνολο και η ϕ είναι συνεχής στην γ^* συνεπάγεται ότι η ϕ είναι φραγμένη στην γ^*, οπότε υπάρχει αριθμός $M \geq 0$ ώστε να ισχύει

$$|\phi(\zeta)| \leq M \qquad \text{για } \zeta \in \gamma^*. \tag{6.21}$$

Από τις (6.20) και (6.21) η (6.19) γίνεται

$$\Big| \frac{g(w) - g(z)}{w - z} - n \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \Big| \leq |w - z| \frac{n(n+1) 2^{n+1}}{\delta^{n+2}} M \,\text{μήκος}\,(\gamma) \qquad \text{για } w \in D(z; \tfrac{\delta}{2}). \tag{6.22}$$

Επειδή οι $n, \delta, M,$ μήκος (γ) είναι σταθεροί αριθμοί, από την (6.22) συνεπάγεται

$$\lim_{w \to z} \frac{g(w) - g(z)}{w - z} = n \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta,$$

οπότε η g είναι παραγωγίσιμη στο z και $g'(z) = n \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$.
Άρα η g είναι παραγωγίσμη σε κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ και, επειδή το $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ είναι ανοικτό σύνολο, η g είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. $\square$

Προσέξτε ότι το Λήμμα 6.2 ουσιαστικά λέει ότι μπορούμε να κάνουμε μια εναλλαγή παραγώγισης και ολοκλήρωσης:

$$g'(z) = \tfrac{d}{dz} g(z) = \tfrac{d}{dz} \int_\gamma \tfrac{\phi(\zeta)}{(\zeta-z)^n}\, d\zeta = \int_\gamma \tfrac{d}{dz}\big(\tfrac{\phi(\zeta)}{(\zeta-z)^n}\big)\, d\zeta = n\int_\gamma \tfrac{\phi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Γενικά, τέτοιες εναλλαγές παραγώγισης και ολοκλήρωσης δεν επιτρέπονται και κάθε φορά πρέπει να αποδεικνύονται. Στη συγκεκριμένη περίπτωση το Λήμμα 6.2 αποδεικνύει μια τέτοια εναλλαγή.

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 6.2 για εναλλαγή παραγώγισης και ολοκλήρωσης και τον τύπο του Cauchy από την Πρόταση 6.12 για να βγάλουμε διάφορα συμπεράσματα για τις παραγώγους μιας αναλυτικής συνάρτησης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.2. *Έστω $f:\Omega\to\mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω. Τότε η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο Ω.*

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιοδήποτε $z_0\in\Omega$ και έναν κλειστό δίσκο $\overline{D}(z_0;r)\subseteq\Omega$. Η Πρόταση 6.13 λέει ότι

$$f(z) = \tfrac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} \tfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } z\in D(z_0;r). \tag{6.23}$$

Θεωρούμε τις δυο μεριές της (6.23) ως δυο συναρτήσεις περιορισμένες στον ανοικτό δίσκο $D(z_0;r)$. Η αριστερή μεριά f είναι αναλυτική στον $D(z_0;r)$ και, σύμφωνα με το Λήμμα 6.2, και η δεξιά μεριά είναι αναλυτική στον δίσκο $D(z_0;r)$. Η (6.23) λέει ότι οι δυο συναρτήσεις ταυτίζονται στον $D(z_0;r)$, οπότε και οι παράγωγοί τους ταυτίζονται στον $D(z_0;r)$. Επομένως, χρησιμοποιώντας και τον τύπο για την παράγωγο της δεξιάς μεριάς από το Λήμμα 6.2, έχουμε

$$f'(z) = \tfrac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} \tfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } z\in D(z_0;r). \tag{6.24}$$

Τώρα δεν γνωρίζουμε αν η αριστερή μεριά της (6.24) είναι, ως συνάρτηση του z στον δίσκο $D(z_0;r)$, παραγωγίσιμη. Γνωρίζουμε, όμως, από το Λήμμα 6.2 ότι η δεξιά μεριά της (6.24) είναι παραγωγισιμη στον δίσκο $D(z_0;r)$, οπότε επειδή οι δυο μεριές ταυτίζονται στον δίσκο $D(z_0;r)$, συνεπάγεται ότι και η αριστερή μεριά f' είναι παραγωγίσιμη στον δίσκο $D(z_0;r)$ και, από τον τύπο του Λήμματος 6.2, έχουμε

$$f''(z) = \tfrac{2}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} \tfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^3}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } z\in D(z_0;r). \tag{6.25}$$

Αυτό το επιχείρημα το επαναλαμβάνουμε επαγωγικά και καταλήγουμε στο ότι για κάθε n η f είναι n φορές παραγωγίσιμη στον δίσκο $D(z_0;r)$ και ότι ισχύει

$$f^{(n)}(z) = \tfrac{n!}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} \tfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } z\in D(z_0;r). \tag{6.26}$$

Άρα η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στον δίσκο $D(z_0;r)$ και, ειδικώτερα, στο σημείο z_0. Επειδή το z_0 είναι τυχόν σημείο του Ω, έχουμε ότι η f άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο Ω. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.14. [**Οι τύποι του Cauchy για παραγώγους και για κύκλους σε ανοικτά σύνολα**] *Έστω $f:\Omega\to\mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω. Αν $\overline{D}(z_0;r)\subseteq\Omega$, τότε για κάθε n έχουμε*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \textit{για κάθε } z\in D(z_0;r).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη έγινε ήδη μέσα στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.2. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.15. [**Οι τύποι του Cauchy για παραγώγους σε αστρόμορφα σύνολα**] *Έστω $f:\Omega\to\mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό και αστρόμορφο σύνολο Ω. Τότε για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω και για κάθε n ισχύει*

$$n(\gamma;z)\, f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \textit{για κάθε } z\in\Omega\setminus\gamma^*.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε μια κλειστή καμπύλη γ στο Ω και τυχόν σημείο z_0 στο Ω και όχι πάνω στην τροχιά της γ.
Θεωρούμε έναν ανοικτό δίσκο $D(z_0; r)$ ο οποίος να περιέχεται στο Ω και να μην τέμνει την τροχιά γ^* της γ.
Από την Πρόταση 6.12 συνεπάγεται

$$n(\gamma; z)\, f(z) = \tfrac{1}{2\pi i} \int_\gamma \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r).$$

Ο δίσκος $D(z_0; r)$ είναι *συνεκτικό* σύνολο και, επειδή περιέχεται στο $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, περίεχεται ολόκληρος σε μια *μοναδική* συνεκτική συνιστώσα του $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Από την Πρόταση 6.10 συνεπάγεται ότι ο δείκτης στροφής $n(\gamma; z)$ είναι σταθερός στον δίσκο $D(z_0; r)$, οπότε υπάρχει ακέραιος k, ανεξάρτητος του z στον $D(z_0; r)$, ώστε να είναι

$$kf(z) = \tfrac{1}{2\pi i} \int_\gamma \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r).$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.2, επαναλαμβάνουμε τα επιχειρήματα της απόδειξης του Θεωρήματος 6.2 με τα οποία περνάγαμε διαδοχικά από την (6.23) στην (6.24) και μετά στην (6.25) και καταλήγουμε στην αντίστοιχη της (6.26). Έχουμε, δηλαδή,

$$kf^{(n)}(z) = \tfrac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \tfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r).$$

Αντικαθιστούμε το k με το $n(\gamma; z)$ και έχουμε

$$n(\gamma; z)\, f^{(n)}(z) = \tfrac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \tfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0; r).$$

Αυτό ισχύει ειδικώτερα για $z = z_0$, οπότε

$$n(\gamma; z_0)\, f^{(n)}(z_0) = \tfrac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \tfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Επειδή το z_0 είναι τυχόν σημείο του $\Omega \setminus \gamma^*$, η απόδειξη έχει τελειώσει. $\square$

Ασκήσεις.

6.4.1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπολογίστε το

$$\int_{C(0;1)} \tfrac{e^z}{z^n}\, dz$$

και κατόπιν υπολογίστε τα πραγματικά ολοκληρώματα

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin(n\theta - \sin\theta)\, d\theta, \qquad \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(n\theta - \sin\theta)\, d\theta.$$

6.4.2. Έστω $f(z) = (\frac{1}{z} + \frac{a}{z^3})e^z$ για $z \neq 0$. Βρείτε όλες τις τιμές του a ώστε να είναι

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

6.4.3. [α] Υπολογίστε όλες τις δυνατές τιμές του $\int_\gamma \frac{2z-1}{z^2-z}\, dz$, όπου γ είναι τυχούσα κλειστή καμπύλη στο $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.
[β] Υπολογίστε όλες τις δυνατές τιμές του $\int_\gamma \frac{2z-1}{z^2-z}\, dz$, όπου γ είναι τυχούσα καμπύλη στο $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ με αρχικό άκρο $-i$ και τελικό άκρο i.

6.4.4. Χρησιμοποιώντας τους τύπους του Cauchy, υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int_{C(0;1)} e^{iz} z^{-2}\, dz, \quad \int_{C(0;1)} z^{-3} \sin z\, dz, \quad \int_{C(0;1)} (e^z - e^{-z}) z^{-n}\, dz, \quad \int_{C(0;1)} \left(z - \tfrac{1}{2}\right)^{-n} dz,$$

$$\int_{C(0;r)} \tfrac{z^2+1}{z(z^2+4)}\, dz \quad \text{με } 0 < r < 2, \qquad \int_{C(0;r)} \tfrac{z^2+1}{z(z^2+4)}\, dz \quad \text{με } 2 < r < +\infty.$$

6.4.5. [α] Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και έστω ότι υπάρχει σταθερός αριθμός M ώστε να ισχύει $|f(z)| \leq M$ για κάθε z (δηλαδή η f είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$). Θεωρήστε τυχόν z και γράψτε τον τύπο του Cauchy για την παράγωγο $f'(z)$ χρησιμοποιώντας αυθαίρετο κύκλο $C(z;r)$ και αποδείξτε ότι $|f'(z)| \leq \frac{2\pi M}{r}$. Συμπεράνατε ότι ισχύει $f'(z) = 0$ για κάθε z και, τέλος, ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$.

[β] Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και έστω ότι υπάρχουν σταθεροί αριθμοί A, M και φυσικός n ώστε να ισχύει $|f(z)| \leq A + M|z|^n$ για κάθε z. Ακολουθώντας τη μέθοδο του [α], αποδείξτε ότι ισχύει $f^{(n+1)}(z) = 0$ για κάθε z και, τέλος, ότι η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\leq n$.

[γ] Αποδείξτε το **Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας**. Έστω πολυώνυμο $p(z)$ βαθμού ≥ 1. Γνωρίζουμε ότι $\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty$. Υποθέστε ότι το πολυώνυμο δεν έχει καμία ρίζα στο $\mathbb{C}$, θεωρήστε την συνάρτηση $\frac{1}{p(z)}$ η οποία είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και αποδείξτε ότι είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$ καταλήγοντας, σύμφωνα με το [α], σε άτοπο.

6.5 Η αρχή μεγίστου.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.3. [Η Αρχή Μεγίστου] *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω και έστω $M = \sup\{|f(z)| \,|\, z \in \Omega\}$. Αν υπάρχει $z_0 \in \Omega$ έτσι ώστε $|f(z_0)| = M$, τότε η f είναι σταθερή στη συνεκτική συνιστώσα του Ω η οποία περιέχει το z_0.*

Απόδειξη. Έστω $z_0 \in \Omega$ έτσι ώστε $|f(z_0)| = M$ και έστω U η συνεκτική συνιστώσα του Ω η οποία περιέχει το z_0. Το U είναι ανοικτό σύνολο.
Θεωρούμε ανοικτό δίσκο $D(z_0; R) \subseteq U$ και οποιοδήποτε r με $0 < r < R$. Εφαρμόζουμε τον τύπο του Cauchy στην Πρόταση 6.13 με $z = z_0$ και χρησιμοποιούμε την παραμετρική εξίσωση $\zeta = z_0 + re^{it}$ με $0 \leq t \leq 2\pi$ και έχουμε ότι

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{re^{it}}\, rie^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt. \tag{6.27}$$

Επειδή ισχύει

$$|f(z_0 + re^{it})| \leq M \qquad \text{για κάθε } t \in [0, 2\pi] \tag{6.28}$$

συνεπάγεται

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|\, dt \leq \int_0^{2\pi} M\, dt = 2\pi M \qquad \text{για κάθε } t \in [0, 2\pi] \tag{6.29}$$

Άρα η (6.27) συνεπάγεται

$$M = |f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|\, dt \leq M. \tag{6.30}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι δυο ανισότητες στην (6.30) πρέπει να είναι ισότητες, οπότε η ανισότητα (6.29) πρέπει να είναι ισότητα. Όμως, η (6.29) προέκυψε από την (6.28) και, επειδή οι δυο μεριές της (6.28) είναι συνεχείς συναρτήσεις του t στο $[0, 2\pi]$, συνεπάγεται

$$|f(z_0 + re^{it})| = M \qquad \text{για κάθε } t \in [0, 2\pi].$$

Τώρα θυμόμαστε ότι το r είναι τυχόν στο διάστημα $(0, R)$, οπότε

$$|f(z_0 + re^{it})| = M \qquad \text{για κάθε } t \in [0, 2\pi] \text{ και κάθε } r \in (0, R).$$

Άρα

$$|f(z)| = M \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0; R).$$

Μέχρι στιγμής έχουμε αποδείξει ότι:

Αν ισχύει $|f(z)| = M$ σε κάποιο σημείο $z \in U$, τότε η ισότητα αυτή ισχύει σε κάθε σημείο σε μια περιοχή του z.

Αυτό το αποδείξαμε για το συγκεκριμένο σημείο $z = z_0$, αλλά η μόνη ιδιότητα του z_0 που χρησιμοποιήθηκε ήταν ότι $|f(z_0)| = M$, οπότε ισχύει και για κάθε άλλο σημείο με αυτήν την ιδιότητα. Κατόπιν θεωρούμε τα εξής υποσύνολα του U.

$$B = \{z \in U \,|\, |f(z)| = M\}, \qquad C = \{z \in U \,|\, |f(z)| < M\}.$$

Είναι σαφές ότι

$$B \cup C = U, \qquad B \cap C = \emptyset.$$

Αν πάρουμε οποιοδήποτε $z \in B$, τότε $|f(z)| = M$, οπότε σύμφωνα με αυτό που αποδείξαμε προηγουμένως, θα ισχύει η ίδια ισότητα σε κάθε σημείο σε μια περιοχή του z, οπότε μια περιοχή του z δεν θα έχει κανένα σημείο του συνόλου C και, επομένως, το z είναι εξωτερικό σημείο του C. Άρα το B δεν περιέχει κανένα οριακό σημείο του C. Απο την άλλη μεριά, αν το C περιείχε κάποιο οριακό σημείο z του B, τότε θα ήταν $|f(z)| < M$ και θα υπήρχε και μια ακολουθία (z_n) στο B ώστε $z_n \to z$. Τότε, όμως, θα ήταν $|f(z_n)| = M$ για κάθε n και, παίρνοντας όριο, θα ήταν $|f(z)| = M$ και θα καταλήγαμε σε άτοπο. Άρα ούτε το C περιέχει οριακό σημείο του B.
Αν, τώρα, τα B και C ήταν και τα δυο μη-κενά, τότε θα αποτελούσαν διάσπαση του U και αυτό είναι αδύνατο διότι το U είναι συνεκτικό. Άρα ένα από τα δυο σύνολα είναι κενό. Επειδή $z_0 \in B$, συνεπάγεται $C = \emptyset$ και άρα

$$|f(z)| = M \qquad \text{για κάθε } z \in U. \tag{6.31}$$

Τέλος, θα αποδείξουμε ότι η f είναι σταθερή στο U γνωρίζοντας ότι το μέτρο της, το $|f|$, είναι σταθερό στο U.
Κατ' αρχάς, αν $M = 0$, τότε είναι προφανές ότι από την $|f| = 0$ συνεπάγεται $f = 0$ στο U. Άρα, αρκεί να θεωρήσουμε την περίπτωση $M > 0$. Γράφουμε

$$f = u + iv,$$

όπου u και v είναι το πραγματικό μέρος και το φανταστικό μέρος της f.
Η (6.31) γράφεται

$$u^2 + v^2 = M^2 \qquad \text{στο } U$$

και, παραγωγίζοντας ως προς x και y ξεχωριστά, έχουμε

$$u\tfrac{\partial u}{\partial x} + v\tfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad u\tfrac{\partial u}{\partial y} + v\tfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \text{στο } U.$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (C-R), μετασχηματίζουμε την δεύτερη ισότητα και έχουμε

$$u\tfrac{\partial u}{\partial x} + v\tfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad -u\tfrac{\partial v}{\partial x} + v\tfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \text{στο } U. \tag{6.32}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη ισότητα (6.32) με u και την δεύτερη με v και προσθέτοντας, βρίσκουμε

$$(u^2 + v^2)\tfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \text{στο } U$$

και, επειδή $u^2 + v^2 = M^2 > 0$, συνεπάγεται

$$\tfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \text{στο } U.$$

Ομοίως, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη ισότητα (6.32) με v και την δεύτερη με $-u$ και προσθέτοντας, βρίσκουμε

$$(u^2 + v^2)\tfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \text{στο } U$$

και, πάλι επειδή $u^2 + v^2 = M^2 > 0$, συνεπάγεται

$$\tfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \text{στο } U.$$

Τώρα, από την γενική ισότητα που βρίσκεται αμέσως πριν από το Θεώρημα 5.2 έχουμε

$$f'(z) = \tfrac{\partial u}{\partial x}(z) + i\tfrac{\partial v}{\partial x}(z) = 0 \qquad \text{για κάθε } z \in U.$$

Άρα η f είναι σταθερή στο συνεκτικό U. □

Ασκήσεις.

6.5.1. Έστω $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό και συνεκτικό σύνολο U. Μιμούμενοι τα επιχειρήματα στο τέλος της απόδειξης του Θεωρήματος 6.3, αποδείξτε τα παρακάτω.

[α] Αν η f έχει σταθερό πραγματικό μέρος στο U, τότε είναι σταθερή στο U.

[β] Αν η f έχει σταθερό φανταστικό μέρος στο U, τότε είναι σταθερή στο U.

[γ] Αν l είναι μια ευθεία και ισχύει $f(z) \in l$ για κάθε $z \in U$, τότε η f είναι σταθερή στο U.

6.5.2. Αποδείξτε την **Αρχή Ελαχίστου**.

Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω και έστω $m = \inf\{|f(z)| \,|\, z \in \Omega\}$. Αν υπάρχει $z_0 \in \Omega$ έτσι ώστε $|f(z_0)| = m$, τότε είτε $m = 0$ (οπότε $f(z_0) = 0$) είτε $m > 0$ και η f είναι σταθερή στη συνεκτική συνιστώσα του Ω η οποία περιέχει το z_0.

6.5.3. Έστω ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο σύνολο U και $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ η οποία είναι συνεχής στο $\overline{U}$ και αναλυτική στο U και έστω $M = \sup\{|f(z)| \,|\, z \in U\}$ και $N = \sup\{|f(z)| \,|\, z \in \overline{U}\}$. Προφανώς, $0 \leq M \leq N$.

[α] Αποδείξτε ότι υπάρχει $z_0 \in \overline{U}$ ώστε $|f(z_0)| = N$.

[β] Αποδείξτε ότι $M = N$.

[γ] Αν η f δεν είναι σταθερή στο U, αποδείξτε ότι ισχύει $|f(z)| < M$ για κάθε $z \in U$, οπότε όποιοι $z \in \overline{U}$ ικανοποιούν την $|f(z)| = M$ ανήκουν στο ∂U.

[δ] Αν η f είναι σταθερή στο U, αποδείξτε ότι είναι σταθερή και στο $\overline{U}$.

[ε] Σε κάθε περίπτωση, αποδείξτε ότι η μέγιστη τιμή της $|f|$ στο $\overline{U}$ πιάνεται στο ∂U.

6.5.4. Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω και έστω $K = \sup\{\mathrm{Re}\, f(z) \,|\, z \in \Omega\}$. Αν υπάρχει $z_0 \in \Omega$ ώστε $\mathrm{Re}\, f(z_0) = K$, αποδείξτε (χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση e^f) ότι η f είναι σταθερή στη συνεκτική συνιστώσα του Ω η οποία περιέχει το z_0.

6.5.5. [α] Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω και έστω ότι $f(z_n) \to 0$ για κάθε ακολουθία (z_n) στο Ω η οποία έχει όριο σε σημείο του $\partial\Omega$. Αν το Ω δεν είναι φραγμένο, τότε υποθέτουμε επιπλέον ότι $f(z_n) \to 0$ για κάθε ακολουθία (z_n) στο Ω η οποία έχει όριο ∞ (σ' αυτήν την περίπτωση το ∞ θεωρείται, όπως έχουμε πει, συνοριακό σημείο του Ω). Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή 0 στο Ω.

[β] Αποδείξτε το **Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας**. Έστω πολυώνυμο $p(z)$ βαθμού ≥ 1. Γνωρίζουμε ότι $\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty$. Υποθέστε ότι το πολυώνυμο δεν έχει καμία ρίζα στο $\mathbb{C}$, θεωρήστε την συνάρτηση $\frac{1}{p(z)}$ η οποία είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και αποδείξτε ότι είναι σταθερή 0 στο $\mathbb{C}$ καταλήγοντας έτσι σε άτοπο.

Κεφάλαιο 7

Το σφαιρικό θεώρημα του Cauchy.

7.1 Συνδυαστικού τύπου αποτελέσματα για καμπύλες και πλέγματα τετραγώνων.

ΛΗΜΜΑ 7.1. *Έστω ένα σύνολο καμπυλών $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ (όχι αναγκαστικά κλειστών) στο επίπεδο και έστω $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ το σύνολο των άκρων τους (οπότε $m \leq 2n$). Υποθέτουμε ότι σε κάθε σημείο του A όσες καμπύλες του Σ φτάνουν ακριβώς τόσες φεύγουν ή, με άλλα λόγια, κάθε σημείο του A είναι τελικό άκρο τόσων καμπυλών του Σ όσων είναι αρχικό άκρο. Τότε μπορούμε να συνθέσουμε τις καμπύλες του Σ με τέτοιο τρόπο ώστε από όλες μαζί τις καμπύλες του Σ (χωρίς να περισσέψει καμία καμπύλη του Σ) να δημιουργηθεί ένα νέο σύνολο κλειστών καμπυλών.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή ως προς το πλήθος n των καμπυλών.
Αν $n = 1$, δηλαδή $\Sigma = \{\sigma_1\}$, τότε, βάσει της υπόθεσης, το τελικό και το αρχικό άκρο της σ_1 ταυτίζονται, οπότε η σ_1 είναι κλειστή καμπύλη και ο ισχυρισμός του συμπεράσματος είναι σωστός.
Τώρα κάνουμε την επαγωγική υπόθεση ότι ο ισχυρισμός του συμπεράσματος είναι σωστός αν το πλήθος των καμπυλών του Σ είναι $< n$ και θεωρούμε ένα σύνολο καμπυλών Σ με πλήθος n (όπως στην εκφώνηση).
Θεωρούμε την σ_1. Το τελικό άκρο της σ_1 είναι, βάσει της υπόθεσης, αρχικό άκρο τουλάχιστον μιας καμπύλης του Σ. Αν το τελικό άκρο της σ_1 ταυτίζεται με το αρχικό άκρο της, τότε η σ_1 είναι κλειστή και σταματάμε την διαδικασία. Αν το τελικό άκρο της σ_1 δεν είναι το αρχικό άκρο της, τότε, αλλάζοντας αν χρειάζεται την αρίθμηση των καμπυλών, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το τελικό άκρο της σ_1 είναι το αρχικό άκρο της σ_2. Αν το τελικό άκρο της σ_2 ταυτίζεται με το αρχικό άκρο της σ_1, τότε το άθροισμα των σ_1, σ_2 αποτελεί κλειστή καμπύλη και σταματάμε τη διαδικασία. Αν το τελικό άκρο της σ_2 ταυτίζεται με το αρχικό άκρο της ίδιας της σ_2, τότε η σ_2 είναι κλειστή καμπύλη και σταματάμε τη διαδικασία. Αν το τελικό άκρο της σ_2 δεν είναι αρχικό άκρο ούτε της σ_1 ούτε της σ_2, τότε είναι, βάσει της υπόθεσης, το αρχικό άκρο μιας καμπύλης του Σ και, αλλάζοντας αν χρειάζεται την αρίθμηση, υποθέτουμε είναι το αρχικό άκρο της σ_3. Τώρα, ακριβώς όπως κάναμε στα προηγούμενα βήματα, εξετάζουμε αν το τελικό άκρο της σ_3 ταυτίζεται με το αρχικό άκρο της σ_1 ή της σ_2 ή της σ_3. Τότε, αντιστοίχως, το άθροισμα των $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ή το άθροισμα των σ_2, σ_3 ή η σ_3 από μόνη της είναι κλειστή καμπύλη και σταματάμε τη διαδικασία. Αν το τελικό άκρο της σ_3 δεν είναι αρχικό άκρο ούτε της σ_1 ούτε της σ_2 ούτε της σ_3, τότε είναι, βάσει της υπόθεσης, το αρχικό άκρο μιας καμπύλης του Σ και, αλλάζοντας αν χρειάζεται την αρίθμηση, υποθέτουμε είναι το αρχικό άκρο της σ_4. Είναι, όμως, προφανές ότι αυτή η διαδικασία δεν μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρον, διότι έχουμε πεπερασμένο αριθμό καμπυλών! Άρα κάποια στιγμή θα έχουμε επιλέξει διαδοχικές καμπύλες $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma_k$ (με $1 \leq k \leq n$) και το τελικό άκρο της σ_k θα είναι το ίδιο με το αρχικό άκρο κάποιας από αυτές τις ήδη επιλεγμένες καμπύλες $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma_k$.
Έστω, λοιπόν, ότι το τελικό άκρο της σ_k είναι το ίδιο με το αρχικό άκρο της σ_l για κάποιον l με $1 \leq l \leq k$. Τότε το άθροισμα των διαδοχικών $\sigma_l, \sigma_{l+1}, \ldots \sigma_{k-1}, \sigma_k$ αποτελεί κλειστή καμπύλη και σταματάμε τη διαδικασία.

Τώρα κάνουμε το εξής. Ονομάζουμε σ την κλειστή καμπύλη που προκύπτει ως άθροισμα των διαδοχικών $\sigma_l, \sigma_{l+1}, \ldots \sigma_{k-1}, \sigma_k$ και διαγράφουμε αυτές τις καμπύλες από το σύνολο Σ. Δηλαδή, έχουμε το νέο σύνολο καμπυλών $\Sigma' = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_{l-1}, \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_n\}$.
Το σύνολο καμπυλών Σ' έχει, προφανώς, πλήθος $< n$.
Επίσης, παρατηρούμε το εξής. Ένα οποιοδήποτε από τα άκρα των καμπυλών του Σ' είναι ένα από τα άκρα των καμπυλών του αρχικού Σ, δηλαδή είναι ένα από τα σημεία του $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, έστω το a_j. Το σημείο αυτό είχε την ιδιότητα: όσες καμπύλες του Σ φτάνουν σ' αυτό ακριβώς τόσες φεύγουν από αυτό. *Αυτή η ιδιότητα διατηρείτε και με τις καμπύλες του* Σ'. Πράγματι, οι καμπύλες $\sigma_l, \sigma_{l+1}, \ldots \sigma_{k-1}, \sigma_k$ που αφαιρέθηκαν από το Σ για να προκύψει το Σ' έχουν την ιδιότητα ότι είναι διαδοχικές και, επομένως, αν κάποια από αυτές φτάνει στο a_j τότε η αμέσως επόμενη φεύγει από το a_j. Άρα το ότι αφαιρέθηκαν αυτές οι καμπύλες δεν ανατρέπει την ισορροπία "φτάνουν=φεύγουν" για το a_j. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι το Σ' έχει τη βασική ιδιότητα: σε οποιοδήποτε από τα άκρα των καμπυλών του Σ' όσες καμπύλες του Σ' φτάνουν σ' αυτό ακριβώς τόσες φεύγουν από αυτό.
Άρα στο Σ' εφαρμόζεται η επαγωγική υπόθεση, οπότε μπορούμε να συνθέσουμε τις καμπύλες του Σ' με τέτοιο τρόπο ώστε από όλες μαζί τις καμπύλες του Σ' (χωρίς να περισσέψει καμία καμπύλη του Σ') να δημιουργηθεί ένα νέο σύνολο κλειστών καμπυλών. Επισυνάπτοντας και την κλειστή καμπύλη σ που δημιουργήθηκε από τις $\sigma_l, \sigma_{l+1}, \ldots \sigma_{k-1}, \sigma_k$, καταλήγουμε στο ότι μπορούμε να συνθέσουμε τις καμπύλες του Σ με τέτοιο τρόπο ώστε από όλες μαζί τις καμπύλες του Σ (χωρίς να περισσέψει καμία καμπύλη του Σ) να δημιουργηθεί ένα νέο σύνολο κλειστών καμπυλών.
Άρα ο ισχυρισμός του συμπεράσματος είναι σωστός αν το πλήθος των καμπυλών του Σ είναι $= n$ και το συμπέρασμα ισχύει γενικά. $\square$

ΛΗΜΜΑ 7.2. *Θεωρούμε οποιονδήποτε $\delta > 0$ και δυο κάθετες ευθείες στο επίπεδο. Για καθεμιά από τις δυο ευθείες θεωρούμε όλες τις παράλληλες προς αυτήν ευθείες και σε απόσταση από αυτήν ίση με οποιοδήποτε ακέραιο πολλαπλάσιο του δ. Έτσι δημιουργούμε ένα πλέγμα τετραγώνων πλευράς δ το οποίο καλύπτει το επίπεδο ώστε ανά δύο τα τετράγωνα του πλέγματος να έχουν ξένα εσωτερικά. Κατόπιν, από τα (άπειρα) τετράγωνα του πλέγματος επιλέγουμε με έναν οποιονδήποτε τρόπο πεπερασμένα, έστω τα $Q_1, \ldots, Q_k$. Κάποια από αυτά έχουν μια κοινή πλευρά, κάποια έχουν κοινή μόνο μια κορυφή και κάποια δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Η συνοριακή καμπύλη καθενός από αυτά τα τετράγωνα, με τη θετική φορά διαγραφής της, χωρίζεται σε τέσσερις καμπύλες / πλευρές (με την ίδια φορά διαγραφής). Κατόπιν, αγνοούμε κάθε καμπύλη / πλευρά που εμφανίζεται δυο φορές με αντίθετη φορά διαγραφής (δηλαδή, όταν ανήκει σε δυο γειτονικά τετράγωνα από τα $Q_1, \ldots, Q_k$) και θεωρούμε το σύνολο $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ όλων των καμπυλών / πλευρών οι οποίες απομένουν (δηλαδή, κάθε καμπύλη / πλευρά που ανήκει σε ένα μόνο τετράγωνο από τα $Q_1, \ldots, Q_k$). Τότε μπορούμε να συνθέσουμε τις καμπύλες / πλευρές του Σ με τέτοιο τρόπο ώστε από όλες μαζί τις καμπύλες / πλευρές του Σ (χωρίς να περισσέψει καμία καμπύλη / πλευρά του Σ) να δημιουργηθεί ένα νέο σύνολο κλειστών καμπυλών.*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το Σ έχει την ιδιότητα που περιγράφεται στο Λήμμα 7.1, δηλαδή ότι σε κάθε κόμβο του πλέγματος τετραγώνων (αυτά είναι τα μόνα πιθανά άκρα των καμπυλών / πλευρών του Σ) όσες καμπύλες / πλευρές του Σ φτάνουν ακριβώς τόσες φεύγουν.
Πάρτε έναν οποιονδήποτε κόμβο a και διακρίνατε περιπτώσεις ως προς τον αριθμό των τετραγώνων από τα $Q_1, \ldots, Q_k$ τα οποία τον έχουν κορυφή.
Αν κανένα από τα τετράγωνα δεν έχει κορυφή το a, τότε στο a φτάνουν και φεύγουν μηδέν καμπύλες του Σ.
Αν ένα από τα τετράγωνα έχει κορυφή το a (τέσσερις υποπεριπτώσεις), τότε στο a φτάνει μία καμπύλη και φεύγει μία καμπύλη του Σ.
Αν δύο από τα τετράγωνα έχει κορυφή το a (έξι υποπεριπτώσεις), τότε είτε στο a φτάνει μία καμπύλη και φεύγει μία καμπύλη του Σ (τέσσερις από τις έξι υποπεριπτώσεις) είτε στο a φτάνουν δύο καμπύλες και φεύγουν δύο καμπύλες του Σ (δύο από τις έξι υποπεριπτώσεις).
Αν τρία από τα τετράγωνα έχουν κορυφή το a (τέσσερις υποπεριπτώσεις), τότε στο a φτάνει μία

καμπύλη και φεύγει μία καμπύλη του Σ.
Αν τέσσερα από τα τετράγωνα έχουν κορυφή το a (μία υποπερίπτωση), τότε στο a φτάνουν και φεύγουν μηδέν καμπύλες του Σ. □

ΛΗΜΜΑ 7.3. *Έστω ανοικτό και φραγμένο σύνολο Ω και $\delta > 0$. Όπως στο προηγούμενο Λήμμα 7.2, θεωρούμε ένα πλέγμα τετραγώνων πλευράς δ το οποίο καλύπτει το επίπεδο ώστε ανά δύο τα τετράγωνα του πλέγματος να έχουν ξένα εσωτερικά. Θεωρούμε εκείνα τα τετράγωνα $Q_1, \ldots, Q_k$ του πλέγματος καθένα από τα οποία περιέχεται ολόκληρο στο Ω. Το πλήθος τους είναι πεπερασμένο διότι το Ω είναι φραγμένο. Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφεται στο Λήμμα 7.2, θεωρούμε το σύνολο $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ όλων των καμπυλών / πλευρών των τετραγώνων αυτών καθεμιά από τις οποίες ανήκει σε ένα μόνο τετράγωνο από τα $Q_1, \ldots, Q_k$. Τότε μπορούμε να συνθέσουμε τις καμπύλες / πλευρές του Σ με τέτοιο τρόπο ώστε από όλες μαζί τις καμπύλες / πλευρές του Σ (χωρίς να περισσέψει καμία καμπύλη / πλευρά του Σ) να δημιουργηθεί ένα νέο σύνολο κλειστών καμπυλών $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ στο Ω. Κάθε σημείο της ένωσης των τροχιών $\gamma_1^*, \ldots, \gamma_m^*$ απέχει απόσταση $\leq \delta\sqrt{2}$ από το συμπλήρωμα Ω^c του Ω.*

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι οι καμπύλες $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ είναι στο Ω, διότι προκύπτουν από πλευρές των τετραγώνων του πλέγματος και καθένα από αυτά τα τετράγωνα περιέχεται ολόκληρο (μαζί με τις πλευρές του) στο Ω. Άρα το μόνο που έχουμε να αποδείξουμε είναι ο τελευταίος ισχυρισμός.
Έστω, λοιπόν, οποιοδήποτε σημείο z το οποίο ανήκει σε οποιαδήποτε τροχιά γ_j^*. Τότε το z ανήκει σε κάποια από τις πλευρές $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Έστω $z \in \sigma_l$. Όμως, η σ_l ανήκει σε ένα μόνο από τα τετράγωνα $Q_1, \ldots, Q_k$. Δηλαδή, από τα δυο τετράγωνα που έχουν κοινή πλευρά την σ_l το ένα είναι ένα από τα $Q_1, \ldots, Q_k$, δηλαδή είναι ολόκληρο μέσα στο Ω, αλλά *το άλλο δεν είναι ολόκληρο μέσα στο* Ω. Δηλαδή, η σ_l και, επομένως, και το σημείο z ανήκει σε κάποιο τετράγωνο, έστω Q, πλευράς δ στο οποίο ανήκει και κάποιο σημείο ζ του Ω^c. Τώρα, η απόσταση $|z - \zeta|$ είναι το πολύ όση η διάμετρος του Q και, επομένως, $|z - \zeta| \leq \delta\sqrt{2}$.
Άρα το z απέχει από το Ω^c (δηλαδή από κάποιο σημείο ζ του Ω^c) απόσταση $\leq \delta\sqrt{2}$. □

ΛΗΜΜΑ 7.4. *Συνεχίζουμε από εκεί που σταματήσαμε στο Λήμμα 7.3.*
Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο Ω. Τότε για κάθε $z \in \Omega$, του οποίου η απόσταση από το Ω^c είναι $> \delta\sqrt{2}$, ισχύει

$$f(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{7.1}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε πάλι το πλέγμα τετραγώνων πλευράς $\delta > 0$, το οποίο περιγράφτηκε στις αποδείξεις των προηγούμενων λημμάτων, καθώς και τα τετράγωνα $Q_1, \ldots, Q_k$ του πλέγματος καθένα από τα οποία περιέχεται ολόκληρο στο Ω και από τα οποία δημιουργήθηκαν οι κλειστές καμπύλες $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ στο προηγούμενο λήμμα.
Επειδή η απόσταση του $z \in \Omega$ από το Ω^c είναι $> \delta\sqrt{2}$, συνεπάγεται ότι το z δεν ανήκει στις τροχιές $\gamma_1^*, \ldots, \gamma_m^*$. Επομένως, τα ολοκληρώματα στην δεξιά μεριά της (7.1) είναι καλώς ορισμένα.
Επίσης, το z δεν ανήκει σε κανένα τετράγωνο του πλέγματος το οποίο να τέμνει το Ω^c. Αυτό το αιτιολογήσαμε στην απόδειξη του προηγούμενου λήμματος. Ας επαναλάβουμε: αν το z ανήκει σε κάποιο τετράγωνο, έστω Q, πλευράς δ στο οποίο ανήκει και κάποιο σημείο ζ του Ω^c, τότε η απόσταση $|z - \zeta|$ είναι το πολύ όση η διάμετρος του Q και, επομένως, $|z - \zeta| \leq \delta\sqrt{2}$, οπότε το z απέχει από το Ω^c (δηλαδή από κάποιο σημείο ζ του Ω^c) απόσταση $\leq \delta\sqrt{2}$.
Άρα το z ανήκει σε κάποιο από τα τετράγωνα $Q_1, \ldots, Q_k$.
Ας υποθέσουμε κατ' αρχάς ότι το z είναι εσωτερικό σημείο κάποιου από τα τετράγωνα αυτά, έστω του Q_{j_0}.
Τώρα θα κάνουμε ό,τι κάναμε στην απόδειξη της Πρότασης 6.13 αλλά με τετράγωνο στη θέση του δίσκου: το (κλειστό) τετράγωνο Q_{j_0} περιέχεται στο ανοικτό σύνολο Ω, οπότε υπάρχει ένα ανοικτό τετράγωνο Q' (δηλαδή αστρόμορφο σύνολο) λίγο μεγαλύτερο από το Q_{j_0} το οποίο, επίσης, περιέχεται στο Ω. Η f είναι αναλυτική στο αστρόμορφο Q' και η καμπύλη ∂Q_{j_0} (η συνοριακή καμπύλη του Q_{j_0} με τη θετική φορά περιστροφής) περιέχεται στο Q' και έχει δείκτη στροφής 1

ως προς το σημείο z. Από τον τύπο του Cauchy έχουμε ότι

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_{j_0}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{7.2}$$

Κατόπιν, θεωρούμε ένα οποιοδήποτε άλλο τετράγωνο Q_j με $j \neq j_0$. Το z δεν περιέχεται στο Q_j διότι είναι εσωτερικό σημείο του Q_{j_0}. Πάλι μπορούμε να βρούμε ένα ανοικτό τετράγωνο Q' (δηλαδή αστρόμορφο σύνολο) λίγο μεγαλύτερο από το Q_j το οποίο, επίσης, περιέχεται στο Ω και στο οποίο δεν περιέχεται το z. Τώρα προσέξτε: η $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ ως συνάρτηση του ζ (με σταθεροποιημένο z) είναι αναλυτική στο αστρόμορφο Q' και η καμπύλη ∂Q_j περιέχεται στο Q'. Άρα από την Πρόταση 6.6 συνεπάγεται

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \text{για } \ j \neq j_0. \tag{7.3}$$

Προσθέτουμε τις (7.2) και (7.3) και βρίσκουμε

$$f(z) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{7.4}$$

Τώρα κάνουμε το εξής. Χωρίζουμε κάθε ολοκλήρωμα στη δεξιά μεριά της (7.4) σε τέσσερα ολοκληρώματα στις τέσσερις καμπύλες / πλευρές του αντίστοιχου Q_j, οπότε σχηματίζονται $4k$ ολοκληρώματα. Μετά θυμόμαστε ότι αν μια καμπύλη / πλευρά ανήκει σε δυο γειτονικά τετράγωνα, τότε αυτή εμφανίζεται σε δυο ολοκληρώματα με αντίθετες φορές διαγραφής, οπότε τα δυο ολοκληρώματα διαγράφονται. Άρα θα απομείνουν μόνο τα ολοκληρώματα στις καμπύλες / πλευρές που ανήκουν σε ένα μόνο από τα τετράγωνα $Q_1, \dots, Q_k$. Όμως, από τη σύνθεση αυτών ακριβώς των καμπυλών / πλευρών σχηματίστηκαν οι $\gamma_1, \dots, \gamma_m$. Άρα, λόγω της προσθετικότητας των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων σε διαδοχικές καμπύλες, τα ολοκληρώματα που έχουν απομείνει θα δώσουν, προστιθέμενα, τα ολοκληρώματα στις $\gamma_1, \dots, \gamma_m$. Άρα η (7.4) θα δώσει την (7.1).
Άρα η (7.1) αποδείχτηκε στην περίπτωση που το z είναι εσωτερικό σημείο ενός από τα τετράγωνα $Q_1, \dots, Q_k$. Τώρα, στην περίπτωση που το z είναι συνοριακό σημείο ενός από τα $Q_1, \dots, Q_k$, έστω του Q_{j_0}, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε σημείο z' εσωτερικό του Q_{j_0} και, επειδή για το z' ισχύει η (7.1), έχουμε

$$f(z') = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z'}\, d\zeta. \tag{7.5}$$

Η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη. Από το Λήμμα 6.2 έχουμε ότι και η δεξιά μεριά της (7.5) είναι παραγωγίσιμη και, επομένως, συνεχής συνάρτηση του z'. Αφήνοντας, τώρα, το z' να τείνει στο z, βρίσκουμε την (7.1) (με το z). □

7.2 Το σφαιρικό θεώρημα του Cauchy.

Τώρα θα δούμε τέσσερις διαδοχικούς ορισμούς που σκοπό έχουν να επιτρέψουν μια όσο το δυνατό απλούστερη διατύπωση του Σφαιρικού Θεωρήματος του Cauchy.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Θεωρούμε ότι έχουμε μια συλλογή καμπυλών $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ (όχι αναγκαστικά κλειστών) και μια συλλογή αντίστοιχων ακεραίων $k_1, \dots, k_n$ (θετικών ή αρνητικών ή μηδέν). Τότε λέμε ότι έχουμε μια* **αλυσίδα** *Σ και εννοούμε ότι έχουμε k_1 φορές την καμπύλη σ_1, k_2 φορές την καμπύλη σ_2 κλπ μέχρι k_n φορές την καμπύλη σ_n. Κάθε ακέραιος k_j ονομάζεται* **πολλαπλότητα** *της αντίστοιχης καμπύλης σ_j στην αλυσίδα Σ.*
Αν καθεμιά από τις $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ είναι κλειστή, τότε λέμε ότι έχουμε έναν **κύκλο** *Σ.*
Αν όλες οι $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ είναι σε ένα σύνολο Ω, τότε λέμε ότι η αλυσίδα (ή ο κύκλος) Σ είναι στο Ω.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω αλυσίδα Σ η οποία αποτελείται από τις καμπύλες $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ με αντίστοιχες πολλαπλότητες $k_1, \dots, k_n$ και συνάρτηση ϕ ορισμένη και συνεχής σε κάθε τροχιά $\sigma_1{}^*, \dots, \sigma_n{}^*$, οπότε ορίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της ϕ σε καθεμιά από τις καμπύλες $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Ορίζουμε το* **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της ϕ στην αλυσίδα** *Σ να είναι το άθροισμα*

$$\int_{\Sigma} \phi(z)\, dz = \sum_{j=1}^{n} k_j \int_{\sigma_j} \phi(z)\, dz.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω κύκλος Σ ο οποίος αποτελείται από τις κλειστές καμπύλες $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ με αντίστοιχες πολλαπλότητες $k_1, \dots, k_n$. Για κάθε σημείο z το οποίο δεν ανήκει σε καμιά από τις τροχιές $\sigma_1{}^*, \dots, \sigma_n{}^*$ ορίζεται ο αντίστοιχος δείκτης στροφής καθεμιάς από τις $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ ως προς το σημείο z. Ορίζουμε τον* **δείκτη στροφής του κύκλου** Σ **ως προς το** z *να είναι το άθροισμα*

$$n(\Sigma; z) = \sum_{j=1}^{n} k_j n(\sigma_j; z).$$

Επειδή, όπως γνωρίζουμε, ο δείκτης στροφής μιας κλειστής καμπύλης ως προς ένα σημείο z εκφράζει τον αριθμό περιστροφών γύρω από το z της κλειστής καμπύλης, μπορούμε να πούμε ότι *ο δείκτης στροφής του κύκλου Σ ως προς το z εκφράζει τον συνολικό αριθμό περιστροφών γύρω από το z των κλειστών καμπυλών που αποτελούν τον Σ λαμβανομένων υπόψη και των πολλαπλοτήτων αυτών των κλειστών καμπυλών.*

Συνδυάζοντας τους δυο τελευταίους ορισμούς, μπορούμε να δούμε εύκολα ότι για τον δείκτη στροφής κύκλου ισχύει ο ίδιος ολοκληρωτικός τύπος που ισχύει για μία κλειστή καμπύλη:

$$n(\Sigma; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Πράγματι, έχουμε

$$n(\Sigma; z) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} k_j n(\sigma_j; z) = \sum_{j=1}^{n} k_j \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_j} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω κύκλος Σ στο ανοικτό σύνολο Ω. Λέμε ότι ο κύκλος Σ είναι* **ομόλογος του μηδενός στο** Ω *αν ισχύει $n(\Sigma; z) = 0$ για κάθε $z \in \Omega^c$.*

Με άλλα λόγια, ο κύκλος Σ στο Ω είναι ομόλογος του μηδενός στο Ω αν ο συνολικός αριθμός περιστροφών γύρω από κάθε σημείο του συμπληρώματος του Ω των καμπυλών που αποτελούν τον Σ (λαμβανομένων υπόψη και των πολλαπλοτήτων τους) είναι μηδέν.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.1. [**Το Σφαιρικό Θεώρημα του Cauchy**] *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω. Τότε για κάθε κύκλο Σ στο Ω ο οποίος είναι ομόλογος του μηδενός στο Ω ισχύει*

$$\int_{\Sigma} f(z)\, dz = 0.$$

Απόδειξη. Έστω ότι ο κύκλος Σ αποτελείται από τις κλειστές καμπύλες $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ με αντίστοιχες πολλαπλότητες $k_1, \dots, k_n$.

Θεωρούμε ως πρώτη περίπτωση το Ω να είναι φραγμένο (για να μπορούμε να εφαρμόσουμε τα Λήμματα 7.3 και 7.4).

Επειδή οι τροχιές $\sigma_1{}^*, \dots, \sigma_n{}^*$ είναι συμπαγή υποσύνολα στο Ω, υπάρχει, όπως έχουμε πει αρκετές φορές μέχρι τώρα, ένα $\delta > 0$ αρκετά μικρό ώστε κάθε σημείο των τροχιών αυτών να απέχει απόσταση $> \delta\sqrt{2}$ από το Ω^c.

Κατόπιν, με αυτό το δ σχηματίζουμε τις καμπύλες $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ οι οποίες περιγράφονται στα Λήμματα 7.3 και 7.4.

Σύμφωνα με το Λήμμα 7.4 και σύμφωνα με το πώς επιλέξαμε το δ, συνεπάγεται

$$f(z) = \textstyle\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_l} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } z \in \sigma_1{}^* \cup \cdots \cup \sigma_n{}^*. \tag{7.6}$$

Από τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος στον κύκλο Σ έχουμε

$$\textstyle\int_{\Sigma} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{n} k_j \int_{\sigma_j} f(z)\, dz. \tag{7.7}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (7.6) σε κάθε σημείο z των τροχιών των $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ στον τύπο (7.7), βρίσκουμε

$$\textstyle\int_{\Sigma} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{n} k_j \int_{\sigma_j} \left(\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_l} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right) dz.$$

Εναλλάσσοντας το $\int_{\sigma_j}$ με το $\sum_{l=1}^{m}$, βρίσκουμε

$$\int_\Sigma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^n k_j\big(\sum_{l=1}^m \tfrac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_j}\big(\int_{\gamma_l}\tfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\big)\,dz\big).$$

Εναλλάσσοντας τα δυο εξωτερικά αθροίσματα και, συγχρόνως, τα δυο ολοκληρώματα, βρίσκουμε

$$\int_\Sigma f(z)\,dz = \sum_{l=1}^m \big(\sum_{j=1}^n k_j\tfrac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_l}\big(\int_{\sigma_j}\tfrac{1}{\zeta-z}\,dz\big)\,f(\zeta)\,d\zeta\big).$$

Εναλλάσσοντας το $\sum_{j=1}^n$ με το $\int_{\gamma_l}$ και κάνοντας μια απλή αλλαγή προσήμου, βρίσκουμε

$$\int_\Sigma f(z)\,dz = -\sum_{l=1}^m \int_{\gamma_l}\big(\sum_{j=1}^n k_j\,\tfrac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_j}\tfrac{1}{z-\zeta}\,dz\big)\,f(\zeta)\,d\zeta$$

και, επομένως,

$$\int_\Sigma f(z)\,dz = -\sum_{l=1}^m \int_{\gamma_l}\big(\sum_{j=1}^n k_j\,n(\sigma_j;\zeta)\big)\,f(\zeta)\,d\zeta = -\sum_{l=1}^m \int_{\gamma_l} n(\Sigma;\zeta)f(\zeta)\,d\zeta. \qquad (7.8)$$

Τώρα θεωρούμε τον δείκτη στροφής

$$n(\Sigma;\zeta) = \sum_{j=1}^n k_j\,n(\sigma_j;\zeta)$$

που εμφανίζεται στον τύπο (7.8), όπου το ζ βρίσκεται πάνω στις τροχιές των καμπυλών $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$. Παίρνουμε ένα τέτοιο ζ και το κρατάμε σταθερό. Γνωρίζουμε ότι το ζ απέχει απόσταση $\leq \delta\sqrt{2}$ από το Ω^c, οπότε υπάρχει $w\in\Omega^c$ ώστε $|\zeta-w|\leq\delta\sqrt{2}$. Είναι προφανές ότι κάθε σημείο του ευθ. τμήματος $[\zeta,w]$ απέχει απόσταση $\leq\delta\sqrt{2}$ από το w. Δηλαδή, κάθε σημείο του ευθ. τμήματος $[\zeta,w]$ απέχει απόσταση $\leq\delta\sqrt{2}$ από το Ω^c και, επομένως, κανένα σημείο του ευθ.τμήματος $[\zeta,w]$ δεν ανήκει σε καμιά από τις τροχιές των $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$. Δηλαδή, ολόκληρο το ευθ. τμήμα περιέχεται στο συμπλήρωμα καθεμιάς από τις τροχιές ${\sigma_1}^*,\ldots,{\sigma_n}^*$. Αν, τώρα, πάρουμε μια οποιαδήποτε σ_j και παρατηρήσουμε ότι το ευθ. τμήμα $[\zeta,w]$ είναι συνεκτικό σύνολο, καταλήγουμε στο ότι ο δείκτης στροφής της σ_j ως προς το μεταβλητό σημείο του $[\zeta,w]$ είναι σταθερός και, επομένως,

$$n(\sigma_j;\zeta) = n(\sigma_j;w) \qquad \text{για}\;\; j=1,\ldots,n.$$

Άρα

$$n(\Sigma;\zeta) = \sum_{j=1}^n k_j\,n(\sigma_j;\zeta) = \sum_{j=1}^n k_j\,n(\sigma_j;w) = n(\Sigma;w).$$

Επειδή, όμως, ο κύκλος Σ είναι ομόλογος του μηδενός στο Ω και $w\in\Omega^c$, συνεπάγεται

$$n(\Sigma;\zeta) = n(\Sigma;w) = 0.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι ισχύει $n(\Sigma;\zeta)=0$ για κάθε ζ στις τροχιές των καμπυλών $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$. Άρα από τον τύπο (7.8) συνεπάγεται

$$\int_\Sigma f(z)\,dz = -\sum_{l=1}^m \int_{\gamma_l} n(\Sigma;\zeta)f(\zeta)\,d\zeta = -\sum_{l=1}^m\int_{\gamma_l} 0\,f(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Τέλος, θεωρούμε ως δεύτερη περίπτωση το Ω να μην είναι φραγμένο.

Οι τροχιές των κλειστών καμπυλών $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ που αποτελούν τον κύκλο Σ είναι φραγμένα σύνολα, οπότε υπάρχει μια μεγάλη ακτίνα $R>0$ ώστε όλες αυτές οι καμπύλες να είναι μέσα στον δίσκο $D(0;R)$. Τώρα ορίζουμε το ανοικτό σύνολο

$$\Omega^* = \Omega\cap D(0;R)\subseteq\Omega.$$

Το Ω^* είναι, φυσικά, φραγμένο και η f είναι αναλυτική στο Ω^* (αφού είναι αναλυτική στο μεγαλύτερο σύνολο Ω).

Θα δούμε τώρα ότι ο κύκλος Σ είναι ομόλογος του μηδενός και στο Ω^*, δηλαδή ότι $n(\Sigma;w)=0$ για κάθε $w\in(\Omega^*)^c$. Τώρα, για κάθε $w\in(\Omega^*)^c$ ισχύει είτε $w\in\Omega^c$ είτε $w\in D(0;R)^c$. Αν $w\in\Omega^c$, τότε, επειδή ο Σ είναι ομόλογος του μηδενός στο Ω, συνεπάγεται $n(\Sigma;w)=0$. Αν $w\in D(0;R)^c$, τότε, επειδή κάθε κλειστή καμπύλη σ_j είναι μέσα στον δίσκο $D(0;R)$ και το w είναι έξω από τον ίδιο δίσκο, συνεπάγεται $n(\sigma_j;w)=0$, οπότε

$$n(\Sigma;w)=\sum_{j=1}^{n}k_j n(\sigma_j;w)=\sum_{j=1}^{n}k_j\,0=0.$$

Άρα, πράγματι ισχύει $n(\Sigma;w)=0$ για κάθε $w\in(\Omega^*)^c$, οπότε ο κύκλος Σ είναι ομόλογος του μηδενός στο Ω^*. Από την πρώτη περίπτωση (το Ω^* είναι φραγμένο) έχουμε $\int_\Sigma f(z)\,dz=0$. $\square$

Παράδειγμα 7.2.1. Έστω *αστρόμορφο* ανοικτό σύνολο Ω και σημείο $z\in\Omega^c$. Τότε η συνάρτηση $\frac{1}{\zeta-z}$ είναι αναλυτική συνάρτηση του ζ στο Ω, οπότε από την Πρόταση 6.6 συνεπάγεται αμέσως ότι

$$n(\sigma;z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma\frac{1}{\zeta-z}\,d\zeta=0$$

για κάθε κλειστή καμπύλη σ στο Ω. Άρα *κάθε κλειστή καμπύλη σ στο Ω είναι ομόλογη του μηδενός στο Ω* (εννοούμε: ο κύκλος που αποτελείται μόνο από την σ με πολλαπλότητα 1), οπότε το Σφαιρικό Θεώρημα του Cauchy λέει ότι

$$\int_\sigma f(z)\,dz=0$$

για κάθε f αναλυτική στο Ω.
Άρα *το Θεώρημα του Cauchy για αστρόμορφα σύνολα είναι ειδική περίπτωση του Σφαιρικού Θεωρήματος του Cauchy*.
Φυσικά, αυτό το αποτέλεσμα επεκτείνεται πολύ απλά σε κάθε κύκλο στο αστρόμορφο ανοικτό Ω. Αυτό το βλέπουμε με δυο τρόπους. Έστω ότι ο Σ αποτελείται από τις κλειστές καμπύλες $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ στο Ω με αντίστοιχες πολλαπλότητες $k_1,\ldots,k_n$. Επειδή κάθε σ_j έχει δείκτη στροφής μηδέν ως προς κάθε $z\in\Omega^c$, συνεπάγεται ότι και ο Σ έχει δείκτη στροφής μηδέν ως προς κάθε $z\in\Omega^c$, διότι

$$n(\Sigma;z)=\sum_{j=1}^{n}k_j n(\sigma_j;z)=\sum_{j=1}^{n}k_j\,0=0.$$

Άρα, από το Σφαιρικό Θεώρημα του Cauchy έχουμε

$$\int_\Sigma f(z)\,dz=0$$

για κάθε f αναλυτική στο Ω. Αλλά και αλλιώς: επειδή ήδη αποδείξαμε ότι ισχύει $\int_\sigma f(z)\,dz=0$ για κάθε κλειστή καμπύλη σ στο Ω, συνεπάγεται

$$\int_\Sigma f(z)\,dz=\sum_{j=1}^{n}k_j\int_{\sigma_j}f(z)\,dz=\sum_{j=1}^{n}k_j\,0=0.$$

Παράδειγμα 7.2.2. Έστω ότι η f είναι αναλυτική στον δακτύλιο $D(z_0;R_1,R_2)$ με $0\le R_1<R_2\le+\infty$. Έστω, επίσης, μια οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη γ στον $D(z_0;R_1,R_2)$.
Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\int_\gamma f(z)\,dz$ με όσο το δυνατό λιγότερο κόπο. Η καμπύλη γ μπορεί να είναι "περίεργη" και να είναι δύσκολος ο υπολογισμός χρησιμοποιώντας παραμετρική εξίσωση της καμπύλης.
Ας υποθέσουμε, όμως, ότι από το σχήμα της γ μπορούμε να διακρίνουμε εύκολα τον αριθμό περιστροφών της γύρω από κάποιο σημείο της εσωτερικής "τρύπας" $\overline{D}(z_0;R_1)$, για παράδειγμα γύρω από το z_0. Έστω, λοιπόν, $n(\gamma;z_0)=k$, όπου k είναι ένας ακέραιος. Επειδή η εσωτερική "τρύπα" είναι συνεκτικό σύνολο, ισχύει $n(\gamma;z)=k$ για κάθε z μέσα σ' αυτήν. Από την άλλη μεριά, είναι σαφές ότι ισχύει $n(\gamma;z)=0$ για κάθε z στην εξωτερική μεριά του δακτυλίου (διότι η γ είναι μέσα στον δίσκο $D(z_0;R_2)$).
Γνωρίζοντας τον ακέραιο k θεωρούμε κάποια "απλούστερη" κλειστή καμπύλη γ_1 μέσα στον δακτύλιο $D(z_0;R_1,R_2)$ έτσι ώστε να μπορεί να υπολογιστεί το $\int_{\gamma_1}f(z)\,dz$ με πολύ πιο απλό τρόπο απ' ότι το αρχικό $\int_\gamma f(z)\,dz$. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ως γ_1 την καμπύλη που διαγράφει μια φορά με τη θετική κατεύθυνση ένα κύκλο $C(z_0;r)$ για κάποιο r με $R_1<r<R_2$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε $n(\gamma_1;z)=1$ για κάθε z στην εσωτερική "τρύπα" και $n(\gamma_1;z)=0$ για κάθε z στην εξωτερική μεριά του δακτύλιου.

Τώρα σχηματίζουμε τον κύκλο Σ που αποτελείται από την γ και από την γ_1 με αντίστοιχες πολλαπλότητες 1 και $-k$ και έχουμε:

$n(\Sigma; z) = 1 \cdot n(\gamma; z) + (-k) \cdot n(\gamma_1; z) = 1 \cdot k + (-k) \cdot 1 = 0$ για z στην εσωτερική “τρύπα”

$n(\Sigma; z) = 1 \cdot n(\gamma; z) + (-k) \cdot n(\gamma_1; z) = 1 \cdot 0 + (-k) \cdot 0 = 0$ για z στην εξωτερική μεριά.

Άρα ο Σ είναι ομόλογος του μηδενός στον $D(z_0; R_1, R_2)$, οπότε το Σφαιρικό Θεώρημα του Cauchy συνεπάγεται

$$\int_{\Sigma} f(z)\, dz = 0.$$

Άρα

$$1 \cdot \int_{\gamma} f(z)\, dz + (-k) \cdot \int_{\gamma_1} f(z)\, dz = 0$$

και, επομένως,

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = k \int_{\gamma_1} f(z)\, dz = k \int_{C(z_0;r)} f(z)\, dz.$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι ο υπολογισμός του $\int_{\gamma} f(z)\, dz$ ανάγεται στον υπολογισμό ενός απλούστερου ολοκληρώματος $\int_{C(z_0;r)} f(z)\, dz$ και ενός δείκτη στροφής $n(\gamma; z_0)$.

Παράδειγμα 7.2.3. Αυτό το παράδειγμα είναι μικρή γενίκευση του προηγούμενου παραδείγματος. Έστω ότι η f είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω το οποίο προκύπτει αν από έναν ανοικτό δίσκο $D(z_0; R_0)$ αφαιρέσουμε κάποιους κλειστούς δίσκους $\overline{D}(z_1; R_1), \ldots, \overline{D}(z_k; R_k)$ οι οποίοι περιέχονται στον $D(z_0; R_0)$ και είναι ανά δύο ξένοι:

$$\Omega = D(z_0; R) \setminus \big(\overline{D}(z_1; R_1) \cup \cdots \cup \overline{D}(z_k; R_k)\big).$$

Η ακτίνα R_0 μπορεί να είναι και $+\infty$, οπότε ο $D(z_0; R_0)$ μπορεί να είναι ολόκληρο το $\mathbb{C}$. Επίσης, κάποιες από τις ακτίνες $R_1, \ldots, R_k$ μπορεί να είναι 0, οπότε οι αντίστοιχοι δίσκοι μπορεί να εκφυλίζονται σε σημεία.
Έστω και μια κλειστή καμπύλη γ στο Ω και έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το $\int_{\gamma} f(z)\, dz$.
Κατ' αρχάς, για κάθε δίσκο $\overline{D}(z_m; R_m)$ με $m = 1, \ldots, k$ θεωρούμε μια ακτίνα $R_m{}'$ *ελάχιστα μεγαλύτερη* από την R_m έτσι ώστε κάθε κύκλος $C(z_m; R_m{}')$ να περιέχεται στο Ω και να μην περιέχει κανέναν από τους άλλους δίσκους $\overline{D}(z_j; R_j)$ με $j = 1, \ldots, k$ και $j \neq m$. Ας συμβολίσουμε, προσωρινά, με $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ τις καμπύλες που διαγράφουν μια φορά με τη θετική κατεύθυνση τους αντίστοιχους κύκλους $C(z_1; R_1{}'), \ldots, C(z_k; R_k{}')$.
Βλέπουμε αμέσως ότι, για κάθε $m = 1, \ldots, k$, η γ_m έχει δείκτη στροφής 1 ως προς κάθε $z \in \overline{D}(z_m; R_m)$ και δείκτη στροφής 0 ως προς κάθε $z \in \overline{D}(z_j; R_j)$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$ με $j \neq m$ και ως προς κάθε z έξω από τον $D(z_0; R_0)$.
Τώρα μετράμε τον δείκτη στροφής της γ ως προς καθένα από τα σημεία $z_1, \ldots, z_k$:

$$p_m = n(\gamma; z_m) \qquad \text{για } m = 1, \ldots, k.$$

Προφανώς, ισχύει

$$n(\gamma; z) = p_m \qquad \text{για κάθε } z \in \overline{D}(z_m; R_m) \text{ για } m = 1, \ldots, k.$$

Επίσης,

$$n(\gamma; z) = 0 \qquad \text{για κάθε } z \notin D(z_0; R_0).$$

Τώρα θεωρούμε τον κύκλο Σ ο οποίος αποτελείται από την κλειστή καμπύλη γ με πολλαπλότητα 1 και από τις κλειστές καμπύλες $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ με αντίστοιχες πολλαπλότητες $-p_1, \ldots, -p_k$.
Για κάθε $m = 1, \ldots, k$, αν $z \in \overline{D}(z_m; R_m)$, τότε

$$\begin{aligned} n(\Sigma; z) &= 1 \cdot n(\gamma; z) + (-p_1) \cdot n(\gamma_1; z) + \cdots + (-p_{m-1}) \cdot n(\gamma_{m-1}; z) \\ &\quad + (-p_m) \cdot n(\gamma_m; z) + (-p_{m+1}) \cdot n(\gamma_{m+1}; z) + \cdots + (-p_k) \cdot n(\gamma_k; z) \\ &= 1 \cdot p_m + (-p_1) \cdot 0 + \cdots + (-p_{m-1}) \cdot 0 \\ &\quad + (-p_m) \cdot 1 + (-p_{m+1}) \cdot 0 + \cdots + (-p_k) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Επίσης, αν $z \notin D(z_0; R_0)$, τότε

$$n(\Sigma; z) = 1 \cdot n(\gamma; z) + (-p_1) \cdot n(\gamma_1; z) + \cdots + (-p_k) \cdot n(\gamma_k; z) = 1 \cdot 0 + (-p_1) \cdot 0 + \cdots + (-p_k) \cdot 0 = 0.$$

Άρα ισχύει $n(\Sigma; z) = 0$ για κάθε $z \in \Omega^c$, οπότε ο κύκλος Σ είναι ομόλογος του μηδενός στο Ω. Άρα από το Σφαιρικό Θεώρημα του Cauchy συνεπάγεται

$$\int_\Sigma f(z)\,dz = 0.$$

Άρα

$$1 \cdot \int_\gamma f(z)\,dz + (-p_1) \cdot \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \cdots + (-p_k) \cdot \int_{\gamma_k} f(z)\,dz = 0,$$

οπότε

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= p_1 \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \cdots + p_k \int_{\gamma_k} f(z)\,dz \\ &= p_1 \int_{C(z_1; R_1')} f(z)\,dz + \cdots + p_k \int_{C(z_k; R_k')} f(z)\,dz.\end{aligned}$$

Άρα ο υπολογισμός του $\int_\gamma f(z)\,dz$ ανάγεται στον υπολογισμό των (πιθανώς) απλούστερων ολοκληρωμάτων $\int_{C(z_m; R_m')} f(z)\,dz$ και των δεικτών στροφής της γ ως προς τα σημεία $z_1, \ldots, z_k$. Ως εφαρμογή θα υπολογίσουμε το

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)(z-i)(z+i)}\,dz,$$

όπου γ είναι μια κλειστή καμπύλη η οποία περιστρέφεται τρεις φορές με τη θετική κατεύθυνση γύρω από το σημείο 1, δυο φορές με την αρνητική κατεύθυνση γύρω από το σημείο i και μια φορά με τη θετική κατεύθυνση γύρω από το σημείο $-i$.
Η συνάρτηση $\frac{e^z}{(z-1)(z-i)(z+i)}$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{1, i, -i\}$, δηλαδή στο ανοικτό σύνολο που προκύπτει από το $\mathbb{C}$ (ανοικτό δίσκο άπειρης ακτίνας) με αφαίρεση των σημείων $1, i, -i$ (κλειστών δίσκων ακτίνας 0).
Θεωρούμε μικρούς κύκλους $C(1; R_1')$, $C(i; R_2')$, $C(-i; R_3')$ έτσι ώστε καθένας από αυτούς να περικλείει από τα τρία σημεία $1, i, -i$ μόνο αυτό που αποτελεί το κέντρο του. Τότε

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)(z-i)(z+i)}\,dz &= 3 \int_{C(1;R_1')} \frac{e^z}{(z-1)(z-i)(z+i)}\,dz \\ &\quad - 2 \int_{C(i;R_2')} \frac{e^z}{(z-1)(z-i)(z+i)}\,dz + \int_{C(-i;R_3')} \frac{e^z}{(z-1)(z-i)(z+i)}\,dz.\end{aligned} \tag{7.9}$$

Τώρα εφαρμόζουμε τους τύπους του Cauchy σε καθένα από τα τρία τελευταία ολοκληρώματα και έχουμε

$$\int_{C(1;R_1')} \frac{e^z}{(z-1)(z-i)(z+i)}\,dz = 2\pi i \frac{e^1}{(1-i)(1+i)} = e\pi i,$$

$$\int_{C(i;R_2')} \frac{e^z}{(z-1)(z-i)(z+i)}\,dz = 2\pi i \frac{e^i}{(i-1)(i+i)} = \frac{1}{2}\,\pi\big((\cos 1 - \sin 1) + i(\cos 1 + \sin 1)\big),$$

$$\int_{C(-i;R_3')} \frac{e^z}{(z-1)(z-i)(z+i)}\,dz = 2\pi i \frac{e^{-i}}{(-i-1)(-i-i)} = \frac{1}{2}\,\pi\big((\cos 1 - \sin 1) - i(\cos 1 + \sin 1)\big).$$

Το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει με αντικατάσταση στον τύπο (7.9) των τιμών των τριών ολοκληρωμάτων που βρήκαμε και με πράξεις.

Ασκήσεις.

7.2.1. Έστω f αναλυτική στο $\mathbb{C}$ με $f(1) = 6$ και $f(-1) = 10$. Αποδείξτε ότι, αν η γ είναι οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη στο $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$, το $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^2-1}\,dz$ μπορεί να πάρει *κάθε* ακέραια τιμή.

7.3 Απλά (και πολλαπλά) συνεκτικά ανοικτά σύνολα.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ένα ανοικτό σύνολο Ω χαρακτηρίζεται* **απλά συνεκτικό** *αν είναι συνεκτικό και αν όλες οι συνεκτικές συνιστώσες του συμπληρώματος Ω^c είναι μη-φραγμένες.*

Επομένως, το ∞ μπορεί να θεωρηθεί συνοριακό σημείο κάθε συνεκτικής συνιστώσας του συμπληρώματος ενός ανοικτού απλά συνεκτικού συνόλου.

Παράδειγμα 7.3.1. Κάθε ανοικτό αστρόμορφο σύνολο Ω είναι απλά συνεκτικό.
Έστω z_0 ένα κέντρο του Ω.
Γνωρίζουμε ήδη ότι το ανοικτό αστρόμορφο σύνολο Ω είναι συνεκτικό. Επίσης, έστω οποιαδήποτε συνεκτική συνιστώσα A του συμπληρώματος Ω^c. Παίρνουμε οποιοδήποτε σημείο $a \in A$ και θεωρούμε την ημιευθεία l η οποία έχει κορυφή το a, βρίσκεται στην ευθεία που διέρχεται από το a και από το z_0 και δεν περιέχει το z_0. Είναι σχεδόν προφανές ότι η ημιευθεία l περιέχεται ολόκληρη στο συμπλήρωμα Ω^c. (Αν κάποιο σημείο b της l ανήκει στο Ω, τότε το a που ανήκει στο ευθ. τμήμα $[z_0, b]$ πρέπει να ανήκει στο Ω.) Τώρα, επειδή η l είναι *συνεκτικό* υποσύνολο του Ω^c και επειδή τέμνει την *συνεκτική συνιστώσα* A του Ω^c, συνεπάγεται ότι $l \subseteq A$. Άρα η A είναι μη-φραγμένη.
Για παράδειγμα, κάθε κυρτό ανοικτό σύνολο (ανοικτοί δίσκοι, ανοικτά ημιεπίπεδα, ανοικτά ορθογώνια, ολόκληρο το επίπεδο κλπ.) είναι απλά συνεκτικό. Επίσης, το σύνολο που προκύπτει αν από το $\mathbb{C}$ αφαιρέσουμε μια ημιευθεία είναι απλά συνεκτικό.

Παράδειγμα 7.3.2. Το σύνολο $\Omega = \mathbb{C} \setminus \big(\overline{D}(0;1) \cup (-\infty, -1]\big)$ δεν είναι αστρόμορφο αλλά είναι απλά συνεκτικό. Πράγματι, το συμπλήρωμα του Ω, δηλαδή το $\overline{D}(0;1) \cup (-\infty, -1]$, είναι συνεκτικό και μη-φραγμένο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.1. *Αν το ανοικτό σύνολο Ω είναι απλά συνεκτικό, τότε κάθε κύκλος στο Ω είναι ομόλογος του μηδενός στο Ω.*

Απόδειξη. Έστω οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη σ στο Ω.
Θεωρούμε έναν δίσκο $D(0;R)$ αρκετά μεγάλο ώστε η σ να είναι μέσα στον $D(0;R)$. Συνεπάγεται ότι ισχύει $n(\sigma; z) = 0$ για κάθε z εξωτερικό του $D(0;R)$.
Τώρα, έστω $z \in \Omega^c$. Το z ανήκει σε κάποια από τις συνεκτικές συνιστώσες του Ω^c, έστω στην A. Από την υπόθεση, η A είναι μη-φραγμένη, οπότε έχει τουλάχιστον ένα σημείο w έξω από τον δίσκο $D(0;R)$. Επομένως, $n(\sigma; w) = 0$. Το σύνολο A είναι συνεκτικό και περιέχεται στο συμπλήρωμα της τροχιάς της σ (διότι η σ είναι στο Ω και το A είναι υποσύνολο του Ω^c.) Άρα ο δείκτης στροφής της σ ως προς τα σημεία του A είναι σταθερός. Άρα

$$n(\sigma; z) = n(\sigma; w) = 0.$$

Άρα ισχύει $n(\sigma; z) = 0$ για κάθε $z \in \Omega^c$. Άρα η σ είναι ομόλογη του μηδενός στο Ω. Αυτό, όπως είδαμε στο παράδειγμα 7.2.1, επεκτείνεται εύκολα για γενικό κύκλο στο Ω. Πράγματι, έστω ότι ο Σ αποτελείται από τις κλειστές καμπύλες $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ στο Ω με αντίστοιχες πολλαπλότητες $k_1, \ldots, k_n$. Επειδή κάθε σ_j έχει δείκτη στροφής μηδέν ως προς κάθε $z \in \Omega^c$, συνεπάγεται ότι και ο Σ έχει δείκτη στροφής μηδέν ως προς κάθε $z \in \Omega^c$, διότι

$$n(\Sigma; z) = \textstyle\sum_{j=1}^n k_j n(\sigma_j; z) = \sum_{j=1}^n k_j \, 0 = 0.$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.2. **[Το Σφαιρικό Θεώρημα του Cauchy για απλά συνεκτικά σύνολα]** *Αν το ανοικτό σύνολο Ω είναι απλά συνεκτικό, τότε για κάθε f αναλυτική στο Ω και για κάθε κύκλο Σ στο Ω ισχύει*

$$\int_\Sigma f(z)\, dz = 0.$$

Ειδικώτερα, για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω ισχύει $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

Απόδειξη. Άμεση από το Σφαιρικό Θεώρημα του Cauchy και από την Πρόταση 7.1. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ένα ανοικτό σύνολο Ω χαρακτηρίζεται n-**πλά συνεκτικό** αν είναι συνεκτικό και αν το συμπλήρωμά του, το Ω^c, έχει ακριβώς $n-1$ φραγμένες συνεκτικές συνιστώσες και όλες οι υπόλοιπες συνεκτικές συνιστώσες του είναι μη-φραγμένες.*

Παράδειγμα 7.3.3. Δείτε το παράδειγμα 7.2.2 και, ακόμη γενικότερα, το παράδειγμα 7.2.3. Αν από ένα ανοικτό δίσκο (μπορεί να είναι ολόκληρο το επίπεδο) αφαιρέσουμε $n-1$ κλειστούς δίσκους (μερικοί από αυτούς μπορεί να εκφυλίζονται σε σημεία), τότε προκύπτει ένα n-πλά συνεκτικό ανοικτό σύνολο. Το συμπλήρωμα του συνόλου αποτελείται από μια μη-φραγμένη συνεκτική συνιστώσα, το εξωτερικό του "μεγάλου" δίσκου, και από $n-1$ φραγμένες συνεκτικές συνιστώσες, τους $n-1$ κλειστούς δίσκους που αφαιρούνται από τον "μεγάλο" δίσκο.

Ακόμη γενικότερα, οι $n-1$ φραγμένες συνεκτικές συνιστώσες του συμπληρώματος ενός n-πλά συνεκτικού ανοικτού συνόλου Ω συνήθως εμφανίζονται ως "τρύπες" του Ω.

Η κατάσταση που περιγράψαμε στο παράδειγμα 7.2.3 γενικεύεται για οποιοδήποτε n-πλά συνεκτικό ανοικτό σύνολο. Ιδού.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.2. *Έστω n-πλά συνεκτικό ανοικτό σύνολο Ω και έστω $A_1, \ldots, A_{n-1}$ οι φραγμένες συνεκτικές συνιστώσες του Ω^c. Τότε:*

[α] *Υπάρχουν κλειστές καμπύλες $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ στο Ω έτσι ώστε κάθε γ_k έχει: δείκτη στροφής 1 ως προς κάθε σημείο της A_k και δείκτη στροφής 0 ως προς κάθε σημείο οποιασδήποτε A_j με $j \neq k$ και δείκτη στροφής 0 ως προς κάθε σημείο οποιασδήποτε μη-φραγμένης συνεκτικής συνιστώσας του Ω^c.*

[β] *Για κάθε f αναλυτική στο Ω και για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω ισχύει*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = p_1 \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \cdots + p_{n-1} \int_{\gamma_{n-1}} f(z)\,dz,$$

όπου p_k είναι ο δείκτης στροφής της γ ως προς κάθε σημείο της A_k.

Απόδειξη. Παραλείπεται. Θα πούμε μόνο ότι η απόδειξη του [α] απαιτεί τεχνικές ίδιες με αυτές της ενότητας 7.1 και ότι δεν θα προσφέρει κάτι καινούργιο η παράθεσή τους. Η απόδειξη του [β], δεδομένου του [α], είναι ίδια με τους χειρισμούς στο παράδειγμα 7.2.3. □

Ασκήσεις.

7.3.1. Είναι τα $D(0;1,3) \cup [1,3]$ και $\mathbb{C} \setminus \big((-\infty,-2] \cup [-\frac12,\frac12] \cup [2,+\infty)\big)$ απλά συνεκτικά; Ποιές τιμές μπορεί να πάρει το $\int_\gamma (z+\frac1z)\,dz$ όταν η γ είναι οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη (i) στο πρώτο σύνολο ή (ii) στο δεύτερο σύνολο;

7.3.2. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 6.7, αποδείξτε την εξής γενίκευση της Πρότασης 6.5.

Αν το ανοικτό σύνολο Ω είναι απλά συνεκτικό, τότε κάθε f αναλυτική στο Ω έχει παράγουσα στο Ω.

7.3.3. Αν το ανοικτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι απλά συνεκτικό, αποδείξτε ότι ορίζεται αναλυτικός κλάδος του λογαρίθμου στο Ω.

7.3.4. Αποδείξτε την εξής γενίκευση του τύπου του Cauchy (Πρόταση 6.12).

Έστω f αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω. Τότε για κάθε κύκλο Σ στο Ω ο οποίος είναι ομόλογος του μηδενός στο Ω ισχύει

$$n(\Sigma;z)\,f(z) = \tfrac{1}{2\pi i} \int_\Sigma \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \qquad \text{για κάθε } z \in \Omega \setminus \Sigma^*.$$

Διατυπώστε, επίσης, το ίδιο αποτέλεσμα για ανοικτό και απλά συνεκτικό Ω.

Τέλος, διατυπώστε και αποδείξτε τις ανάλογες γενικεύσεις των τύπων του Cauchy για παραγώγους (Πρόταση 6.15).

7.3.5. Αποδείξτε το [β] της Πρότασης 7.2, θεωρώντας δεδομένη την ύπαρξη των $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ του [α].

Κεφάλαιο 8

Σειρές Taylor και Laurent.

8.1 Γενικά για σειρές μιγαδικών αριθμών.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Για κάθε ακολουθία (z_n) μιγαδικών αριθμών θεωρούμε την παράσταση*

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \qquad \text{ή} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} z_n$$

και την ονομάζουμε **σειρά** *των z_n. Μια σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ ονομάζεται και* **σειρά μιγαδικών αριθμών** *ή, απλώς,* **μιγαδική σειρά**. *Αν ισχύει $z_n \in \mathbb{R}$ για κάθε n, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ ονομάζεται* **σειρά πραγματικών αριθμών** *ή, απλώς,* **πραγματική σειρά**.
Οι $s_n = z_1 + \cdots + z_n$ ονομάζονται **μερικά αθροίσματα** *της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$.*
Λέμε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ **συγκλίνει** *αν η ακολουθία (s_n) συγκλίνει και τότε το όριο s της (s_n) ονομάζεται* **άθροισμα** *της σειράς και γράφουμε*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = s.$$

Λέμε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ **αποκλίνει** *αν η ακολουθία (s_n) αποκλίνει. Αν η (s_n) αποκλίνει στο ∞, τότε λέμε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$* **αποκλίνει στο** *∞ και ότι το ∞ είναι το* **άθροισμα** *της σειράς και γράφουμε*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \infty.$$

Προσέξτε. *Μια μιγαδική σειρά μπορεί να έχει άθροισμα ∞. Μόνο μια πραγματική σειρά μπορεί να έχει άθροισμα $\pm\infty$.* Δηλαδή, όταν γράφουμε $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \pm\infty$, εννοούμε ότι ισχύει $z_n \in \mathbb{R}$ για κάθε n και ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ ως πραγματική σειρά αποκλίνει στο $\pm\infty$. Φυσικά, αν μια πραγματική σειρά αποκλίνει στο $\pm\infty$, τότε ως μιγαδική σειρά αποκλίνει στο ∞.

Παράδειγμα 8.1.1. Είναι $\sum_{n=1}^{+\infty} c = \begin{cases} 0, & \text{αν } c = 0 \\ \infty, & \text{αν } c \neq 0 \end{cases}$

Παράδειγμα 8.1.2. Η **γεωμετρική σειρά** $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$. Για το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς θα δούμε ότι

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \begin{cases} = 1/(1-z), & \text{αν } |z| < 1 \\ = \infty, & \text{αν } |z| > 1 \text{ ή } z = 1 \\ \text{δεν υπάρχει}, & \text{αν } |z| = 1,\ z \neq 1 \end{cases}$$

Αν $z = 1$, τότε η σειρά είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} 1$ και έχει άθροισμα ∞.
Αν $z \neq 1$, τότε $s_n = 1 + z + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$ και το αποτέλεσμα προκύπτει από τα συμπεράσματα

για το όριο γεωμετρικής προόδου.
Παρατηρήστε ότι, αν $z < -1$ (οπότε $z \in \mathbb{R}$), τότε η $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ ως μιγαδική σειρά αποκλίνει στο ∞, αλλά ως πραγματική σειρά δεν αποκλίνει σε κανένα από τα $\pm\infty$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.1. *Έστω ότι ισχύει $u_n = x_n + iy_n$ με $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ για κάθε n. Τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν οι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνουν και σ' αυτήν την περίπτωση είναι*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $u_n = x_1 + \cdots + x_n$, $v_n = y_1 + \cdots + y_n$ και $s_n = z_1 + \cdots + z_n$ και εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει

$$s_n = u_n + iv_n \qquad \text{για κάθε } n.$$

Τώρα, η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η (s_n) συγκλίνει αν και μόνο αν οι (u_n), (v_n) συγκλίνουν αν και μόνο αν οι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνουν. Επίσης

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} u_n + i \lim_{n\to+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{+\infty} y_n.$$

□

Δηλαδή,

$$\mathrm{Re} \sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Re}\, z_n, \qquad \mathrm{Im} \sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Im}\, z_n.$$

Μέσω της Πρότασης 8.1 μπορούμε να αποδείξουμε διάφορα αποτελέσματα για μιγαδικές σειρές ανάγοντάς τα σε ανάλογα αποτελέσματα για πραγματικές σειρές.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.2. *Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει, τότε $z_n \to 0$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = z_1 + \cdots + z_n$. Αν s είναι το άθροισμα (μιγαδικός αριθμός) της $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$, τότε

$$z_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0.$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.3. [α] *Αν οι $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ έχουν άθροισμα και το $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n + \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η $\sum_{n=1}^{+\infty}(z_n + w_n)$ έχει άθροισμα και*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(z_n + w_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n + \sum_{n=1}^{+\infty} w_n.$$

[β] *Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ έχει άθροισμα και το $\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda z_n$ έχει άθροισμα και*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda z_n = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} z_n.$$

[γ] *Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ έχει άθροισμα, τότε και η $\sum_{n=1}^{+\infty} \overline{z_n}$ έχει άθροισμα και*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \overline{z_n} = \overline{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = z_1 + \cdots + z_n$, $t_n = w_1 + \cdots + w_n$, $p_n = (z_1 + w_1) + \cdots + (z_n + w_n)$, $q_n = \lambda z_1 + \cdots + \lambda z_n$ και $r_n = \overline{z_1} + \cdots + \overline{z_n}$.
[α] Ισχύει $p_n = s_n + t_n$ για κάθε n, οπότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(z_n + w_n) = \lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} s_n + \lim_{n\to+\infty} t_n = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n + \sum_{n=1}^{+\infty} w_n.$$

[β] Ισχύει $q_n = \lambda s_n$ για κάθε n, οπότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda z_n = \lim_{n\to+\infty} q_n = \lambda \lim_{n\to+\infty} s_n = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} z_n.$$

[γ] Ισχύει $r_n = \overline{s_n}$ για κάθε n, οπότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \overline{z_n} = \lim_{n\to+\infty} r_n = \overline{\lim_{n\to+\infty} s_n} = \overline{\sum_{n=1}^{+\infty} z_n}.$$

□

Όσον αφορά στα *θεωρήματα σύγκρισης σειρών*, επειδή αυτά βασίζονται στις ιδιότητες των ανισοτικών σχέσεων που, όπως είδαμε, ισχύουν μόνο για πραγματικούς αριθμούς, μπορούμε να πούμε τα εξής. Όταν γράφουμε $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ ως συνέπεια των $z_n \leq w_n$, εννοούμε ότι *οι z_n, w_n είναι όλοι πραγματικοί αριθμοί και ότι, απλώς, εφαρμόζουμε τα γνωστά θεωρήματα σύγκρισης για πραγματικές σειρές*.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.1. [**Το κριτήριο του Cauchy**] *Η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει*

$$\Big|\sum_{k=m+1}^{n} z_k\Big| = |z_{m+1} + \cdots + z_n| < \epsilon$$

για κάθε m, n με $n > m \geq n_0$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = z_1 + \cdots + z_n$.
Η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η (s_n) συγκλίνει ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν η (s_n) είναι ακολουθία Cauchy. Το ότι η (s_n) είναι ακολουθία Cauchy σημαίνει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε

$$|z_{m+1} + \cdots + z_n| = |(z_1 + \cdots + z_n) - (z_1 + \cdots + z_m)| = |s_n - s_m| < \epsilon$$

για κάθε n, m με $n > m \geq n_0$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$* **συγκλίνει απολύτως** *αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ συγκλίνει ή, ισοδύναμα, αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n| < +\infty$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.2. [**Κριτήριο απόλυτης σύγκλισης**] *Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει και*

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} z_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|.$$

Απόδειξη. Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ συγκλίνει. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε, από το κριτήριο του Cauchy, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|z_{m+1}| + \cdots + |z_n| < \epsilon$ και, επομένως,

$$|z_{m+1} + \cdots + z_n| \leq |z_{m+1}| + \cdots + |z_n| < \epsilon$$

για κάθε m, n με $n > m \geq n_0$. Άρα, πάλι από το κριτήριο του Cauchy, η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει.
Τώρα θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = z_1 + \cdots + z_n$ και $S_n = |z_1| + \cdots + |z_n|$. Ισχύει $|s_n| \leq S_n$ για κάθε n και, επομένως,

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} z_n\Big| = |\lim_{n\to+\infty} s_n| = \lim_{n\to+\infty} |s_n| \leq \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|.$$

□

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι η* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ **συγκλίνει υπό συνθήκη** *αν συγκλίνει αλλά δε συγκλίνει απολύτως.*

ΛΗΜΜΑ 8.1. [**Άθροιση κατά μέρη (Abel)**] *Έστω ακολουθίες* (a_n), (z_n) *και τα μερικά αθροίσματα* $s_n = z_1 + \cdots + z_n$. *Για κάθε* n, m *με* $n > m$ *ισχύει*

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k z_k = \sum_{k=m+1}^{n} (a_k - a_{k+1}) s_k + a_{n+1} s_n - a_{m+1} s_m. \tag{8.1}$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m+1}^{n} a_k z_k &= \sum_{k=m+1}^{n} a_k (s_k - s_{k-1}) = \sum_{k=m+1}^{n} a_k s_k - \sum_{k=m+1}^{n} a_k s_{k-1} \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} a_k s_k - \sum_{k=m}^{n-1} a_{k+1} s_k \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} a_k s_k - \sum_{k=m+1}^{n} a_{k+1} s_k + a_{n+1} s_n - a_{m+1} s_m \\
&= \sum_{k=m+1}^{n} (a_k - a_{k+1}) s_k + a_{n+1} s_n - a_{m+1} s_m.
\end{aligned}$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.3. *Έστω ακολουθίες* (a_n), (z_n) *και τα μερικά αθροίσματα* $s_n = z_1 + \cdots + z_n$. *Έστω, επίσης, ότι η* (a_n) *είναι πραγματική ακολουθία.*

[α] [**Κριτήριο του Dirichlet**] *Έστω ότι η* (a_n) *είναι φθίνουσα, ότι* $a_n \to 0$ *και ότι η* (s_n) *είναι φραγμένη. Τότε η* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_n$ *συγκλίνει.*

[α] [**Κριτήριο του Abel**] *Έστω ότι η* (a_n) *είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και ότι η* (s_n) *συγκλίνει (ή, ισοδύναμα, ότι η* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *συγκλίνει). Τότε η* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_n$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. [α] Υπάρχει M ώστε να ισχύει $|s_n| \leq M$ για κάθε n. Επίσης, επειδή η (a_n) είναι φθίνουσα και έχει όριο 0, ισχύει $a_n \geq 0$ για κάθε n.

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $a_n \leq \frac{\epsilon}{2M+1}$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε, λογω της (8.1), για κάθε n, m με $n > m \geq n_0$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\Big| \sum_{k=m+1}^{n} a_k z_k \Big| &= \Big| \sum_{k=m+1}^{n} (a_k - a_{k+1}) s_k + a_{n+1} s_n - a_{m+1} s_m \Big| \\
&\leq \sum_{k=m+1}^{n} (a_k - a_{k+1}) |s_k| + a_{n+1} |s_n| + a_{m+1} |s_m| \\
&\leq M \sum_{k=m+1}^{n} (a_k - a_{k+1}) + M a_{n+1} + M a_{m+1} \\
&= M(a_{m+1} - a_{n+1}) + M a_{n+1} + M a_{m+1} \\
&= 2M a_{m+1} \leq \tfrac{2M\epsilon}{2M+1} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Άρα, από το κριτήριο του Cauchy, η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_n$ συγκλίνει.

[β] Το $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$ υπάρχει και είναι αριθμός. Τότε η ακολουθία $(a_n - a)$ είναι φθίνουσα και έχει όριο 0, οπότε, βάσει του [α], η $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a) z_n$ συγκλίνει. Ισχύει

$$a_n z_n = (a_n - a) z_n + a z_n$$

για κάθε n, οπότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a) z_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a) z_n + a \sum_{n=1}^{+\infty} z_n$$

και η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_n$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα 8.1.3. Αν η (a_n) είναι πραγματική και φθίνουσα και $a_n \to 0$ και αν $|z| \leq 1$, $z \neq 1$, τότε η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ συγκλίνει.

Πράγματι, θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = 1 + z + \cdots + z^n$ και τότε, αν $|z| \leq 1$, $z \neq 1$, έχουμε

$$|s_n| = \Big| \tfrac{z^{n+1}-1}{z-1} \Big| \leq \tfrac{|z|^{n+1}+1}{|z-1|} \leq \tfrac{2}{|z-1|}$$

για κάθε n. Άρα η (s_n) είναι φραγμένη και, σύμφωνα με το κριτήριο του Dirichlet, η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ συγκλίνει.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.4. [**Κριτήριο λόγου του d' Alembert**] *Έστω ότι ισχύει* $z_n \neq 0$ *για κάθε* n.
[α] *Αν* $\overline{\lim}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1$, *τότε η* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *συγκλίνει απολύτως.*
[β] *Αν* $\underline{\lim}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| > 1$, *τότε η* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *αποκλίνει.*
[γ] *Αν* $\underline{\lim}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leq 1 \leq \overline{\lim}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$, *τότε δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα.*

Απόδειξη. [α] Θεωρούμε a ώστε $\overline{\lim}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < a < 1$.
Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leq a$ για κάθε $n \geq n_0$, οπότε για κάθε $n \geq n_0 + 1$ ισχύει

$$|z_n| = \left|\frac{z_n}{z_{n-1}}\right|\left|\frac{z_{n-1}}{z_{n-2}}\right|\cdots\left|\frac{z_{n_0+1}}{z_{n_0}}\right||z_{n_0}| \leq a^{n-n_0}|z_{n_0}| = c\,a^n,$$

όπου $c = \frac{|z_{n_0}|}{a^{n_0}}$.
Επειδή $0 \leq a < 1$, η $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} a^n$ και, επομένως, η $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |z_n|$ συγκλίνει. Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ συγκλίνει.
[β] Υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$, οπότε για κάθε $n \geq n_0 + 1$ ισχύει

$$|z_n| \geq |z_{n-1}| \geq \cdots \geq |z_{n_0}| > 0.$$

Άρα, δεν ισχύει $z_n \to 0$ και, επομένως, η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ δε συγκλίνει.
[γ] Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ δε συγκλίνει και ισχύει $\left|\frac{1/(n+1)}{1/n}\right| \to 1$, οπότε $\underline{\lim}\left|\frac{1/(n+1)}{1/n}\right| = \overline{\lim}\left|\frac{1/(n+1)}{1/n}\right| = 1$.
Ομοίως, η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει και ισχύει $\left|\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2}\right| \to 1$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.5. [**Κριτήριο ρίζας του Cauchy**]
[α] *Αν* $\overline{\lim}\sqrt[n]{|z_n|} < 1$, *τότε η* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *συγκλίνει απολύτως.*
[β] *Αν* $\overline{\lim}\sqrt[n]{|z_n|} > 1$, *τότε η* $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ *αποκλίνει.*
[γ] *Αν* $\overline{\lim}\sqrt[n]{|z_n|} = 1$, *τότε δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα.*

Απόδειξη. [α] Θεωρούμε a ώστε $\overline{\lim}\sqrt[n]{|z_n|} < a < 1$.
Τότε υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\sqrt[n]{|z_n|} \leq a$ και, επομένως,

$$|z_n| \leq a^n.$$

Επειδή $0 \leq a < 1$, η $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a^n$ συγκλίνει, οπότε και η $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |z_n|$ συγκλίνει. Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ συγκλίνει.
[β] Ισχύει $\sqrt[n]{|z_n|} \geq 1$ για άπειρους n. Άρα ισχύει $|z_n| \geq 1$ για άπειρους n, οπότε δεν ισχύει $z_n \to 0$ και, επομένως, η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ δε συγκλίνει.
[γ] Για τις $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ είναι $\sqrt[n]{|1/n|} \to 1$ και $\sqrt[n]{|1/n^2|} \to 1$. Η πρώτη σειρά αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει. □

Στην εφαρμογή των Προτάσεων 8.4 και 8.5 σε συγκεκριμένες σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$, τις περισσότερες φορές υπάρχουν τα όρια $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ και $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|z_n|}$. Γνωρίζουμε (και το χρησιμοποιήσαμε στις αποδείξεις των μερών [γ] των Προτάσεων 8.4 και 8.5) ότι τότε $\underline{\lim} = \overline{\lim} = \lim$.

Παράδειγμα 8.1.4. Θεωρούμε την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.
Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου. Αν $z = 0$, η σειρά, προφανώς, συγκλίνει απολύτως. Αν $z \neq 0$, ισχύει $\left|\frac{z^{n+1}/(n+1)}{z^n/n}\right| \to |z|$. Άρα, αν $0 < |z| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|z| > 1$ η σειρά αποκλίνει.
Τώρα θα εφαρμόσουμε το κριτήριο ρίζας. Είναι $\sqrt[n]{|z^n/n|} \to |z|$. Επομένως, αν $|z| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|z| > 1$, η σειρά αποκλίνει.
Αν $|z| = 1$, κανένα από τα δυο κριτήρια δε δίνει συμπέρασμα. Αν $z = 1$, η σειρά είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, η οποία αποκλίνει. Αν $|z| = 1$, $z \neq 1$, τότε από το παράδειγμα 8.1.3 συνεπάγεται ότι η σειρά συγκλίνει. Παρατηρήστε ότι, αν $|z| = 1$, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{z^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = +\infty$, οπότε η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}$

δε συγκλίνει απολύτως.
Συνοψίζουμε. Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ συγκλίνει απολύτως αν $|z| < 1$, συγκλίνει υπό συνθήκη αν $|z| = 1$, $z \neq 1$ και αποκλίνει αν $z = 1$ ή $|z| > 1$.

Παράδειγμα 8.1.5. Θεωρούμε την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$.
Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο λόγου. Αν $z = 0$, η σειρά, προφανώς, συγκλίνει απολύτως. Αν $z \neq 0$, είναι $\left|\frac{z^{n+1}/(n+1)^2}{z^n/n^2}\right| \to |z|$. Άρα, αν $0 < |z| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|z| > 1$ η σειρά αποκλίνει.
Τώρα θα εφαρμόσουμε το κριτήριο ρίζας. Είναι $\sqrt[n]{|z^n/n^2|} \to |z|$. Επομένως, αν $|z| < 1$, η σειρά συγκλίνει απολύτως και, αν $|z| > 1$, η σειρά αποκλίνει.
Αν $|z| = 1$, κανένα από τα δυο κριτήρια δε δίνει συμπέρασμα. Όμως, τότε είναι $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$.
Συνοψίζουμε. Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ συγκλίνει απολύτως αν $|z| \le 1$ και αποκλίνει αν $|z| > 1$.

Παράδειγμα 8.1.6. Στην $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου. Αν $z = 0$, η σειρά, προφανώς, συγκλίνει απολύτως. Αν $z \neq 0$, είναι $\left|\frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!}\right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0$. Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε z.
Τώρα εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας. Είναι $\sqrt[n]{|z^n/n!|} = \frac{|z|}{\sqrt[n]{n!}} \to \frac{|z|}{+\infty} = 0$. Επομένως, η σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε z.

Ασκήσεις.

8.1.1. Ποιές από τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n} + \frac{i}{n^2})$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{n}{2^n} + \frac{i}{n^3})$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+i^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2+i^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+i}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+in}$ συγκλίνουν;

8.1.2. Ποιό είναι το άθροισμα της $\sum_{n=1}^{+\infty} n(-1)^{n-1}$ αν θεωρηθεί μιγαδική σειρά και ποιό είναι το άθροισμά της αν θεωρηθεί πραγματική σειρά;

8.1.3. Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου σε όποιες από τις παρακάτω σειρές είναι δυνατό. $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 i^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{i^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2i)^n n!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2+i)^n n!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4i)^n (n!)^2}{(2n)!}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3+i)(6+i)(9+i)\cdots(3n+i)}{(3+4i)(3+8i)(3+12i)\cdots(3+4ni)}$.

8.1.4. Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας σε όποιες από τις παρακάτω σειρές είναι δυνατό. $\sum_{n=1}^{+\infty} n^n i^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{n+i}{2n-i})^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{n+i}{n-i})^{2n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{(1+2i)^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3(1-i)^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2+3i)^n}{n^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+i}{(\sqrt[n]{n}+i)^n}$.

8.1.5. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση τις σειρές: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n}{n}$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{i^n}{n\log n}$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{i^n}{n(\log n)^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} i^{n-1} \sin\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} i^{n-1}(1 - \cos\frac{1}{n})$.

8.1.6. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n| < +\infty$, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$ συγκλίνει.

8.1.7. Έστω $z_n = x_n + iy_n$ και $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει απολύτως αν και μόνο αν οι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνουν απολύτως.

8.1.8. Έστω $|a_n| r^n \le M n^6$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ συγκλίνει για κάθε z με $|z| < r$.

8.1.9. Αποδείξτε το κριτήριο απόλυτης σύγκλισης χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο κριτήριο για πραγματικές σειρές.

8.1.10. Βρείτε τους z για τους οποίους η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{2+z^n}$ συγκλίνει.

8.1.11. Έστω $0 \le \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ και έστω ότι για κάθε z_n το $\arg z_n$ έχει μια τιμή στο διάστημα $[-\theta_0, \theta_0]$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει απολύτως και ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \infty$ αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n| = +\infty$.

8.1.12. Βρείτε σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ η οποία συγκλίνει αλλά έτσι ώστε η $\sum_{n=1}^{+\infty} {z_n}^2$ να αποκλίνει.

8.1.13. Έστω $s_n = z_1 + \cdots + z_n$ για κάθε n. Αν η ακολουθία $(a_{n+1}s_n)$ συγκλίνει και αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n+1})s_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_n$ συγκλίνει. Ειδικώτερα: αν η (s_n) είναι φραγμένη, αν $a_n \to 0$ και αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n - a_{n+1}| < +\infty$, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z_n$ συγκλίνει. Ποιά είναι η σχέση όλων αυτών με τα κριτήρια των Dirichlet και Abel;

8.2 Ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθίας και σειράς συναρτήσεων.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f_n : A \to \mathbb{C}$ για κάθε n και $f : A \to \mathbb{C}$. Λέμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_n)* **συγκλίνει** *στη συνάρτηση f* **ομοιόμορφα** *στο A αν*

$$\|f_n - f\|_A \to 0,$$

όπου $\|f_n - f\|_A = \sup\{|f_n(z) - f(z)| \,|\, z \in A\}$. Ισοδύναμα, η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο A αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|f_n(z) - f(z)| \le \epsilon$ για κάθε $n \ge n_0$ και κάθε $z \in A$.
Συμβολίζουμε

$$f_n \overset{\text{ομ}}{\to} f \quad \text{στο } A.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι, αν η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο A, τότε ισχύει $f_n(z) \to f(z)$ για κάθε $z \in A$. Πράγματι, αν η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο A, τότε για κάθε $z \in A$ ισχύει

$$0 \le |f_n(z) - f(z)| \le \|f_n - f\|_A \to 0.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.6. *Έστω ότι η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο A και έστω $z_0 \in A$. Αν όλες οι f_n είναι συνεχείς στο z_0, τότε και η f είναι συνεχής στο z_0. Ειδικώτερα, αν όλες οι f_n είναι συνεχείς στο A, τότε και η f είναι συνεχής στο A.*

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $|f_n(z) - f(z)| \le \frac{\epsilon}{3}$ για κάθε $n \ge n_0$ και κάθε $z \in A$. Ειδικώτερα, ισχύει $|f_{n_0}(z) - f(z)| \le \frac{\epsilon}{3}$ για κάθε $z \in A$. Κατόπιν, επειδή η f_{n_0} είναι συνεχής στο z_0, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| \le \frac{\epsilon}{3}$ για κάθε $z \in A$ με $|z - z_0| < \delta$.
Συνδυάζοντας τα προηγούμενα, βλέπουμε ότι για κάθε $z \in A$ με $|z - z_0| < \delta$ ισχύει

$$|f(z) - f(z_0)| \le |f(z) - f_{n_0}(z)| + |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| + |f_{n_0}(z_0) - f(z_0)| \le \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Άρα η f είναι συνεχής στο z_0. □

Από την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης ακολουθίας συναρτήσεων περνάμε αμέσως στην έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης σειράς συναρτήσεων (μέσω της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων).

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f_n : A \to \mathbb{C}$ για κάθε n. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n : A \to \mathbb{C}$, όπου $s_n(z) = f_1(z) + \cdots + f_n(z)$ για κάθε $z \in A$. Επίσης, έστω $s : A \to \mathbb{C}$. Λέμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στο άθροισμα s ομοιόμορφα στο A αν η ακολουθία συναρτήσεων (s_n) συγκλίνει στη συνάρτηση s ομοιόμορφα στο A.*
Συμβολίζουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \overset{\text{ομ}}{=} f \quad \text{στο } A.$$

Όπως παραπάνω με την ακολουθία συναρτήσεων, έχουμε ότι, αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στο άθροισμα s ομοιόμορφα στο A, τότε ισχύει $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) = s(z)$ για κάθε $z \in A$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.7. *Έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στο άθροισμα s ομοιόμορφα στο A και έστω $z_0 \in A$. Αν όλες οι f_n είναι συνεχείς στο z_0, τότε και η s είναι συνεχής στο z_0. Ειδικώτερα, αν όλες οι f_n είναι συνεχείς στο A, τότε και η s είναι συνεχής στο A.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$. Επειδή πρόκειται για πεπερασμένα αθροίσματα, κάθε s_n είναι συνεχής στο z_0. Επομένως, από την Πρόταση 8.6, και η s είναι συνεχής στο z_0. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.8. *Έστω καμπύλη γ και έστω ότι η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στην τροχιά γ^*. Επίσης, έστω ϕ συνεχής στο γ^* και έστω ότι κάθε f_n είναι συνεχής στο γ^*. Τότε*

$$\int_\gamma f_n(z)\phi(z)\,dz \to \int_\gamma f(z)\phi(z)\,dz. \tag{8.2}$$

Απόδειξη. Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης, η f είναι συνεχής στο γ^*. Επομένως, η ύπαρξη των ολοκληρωμάτων $\int_\gamma f_n(z)\phi(z)\,dz$ και $\int_\gamma f(z)\phi(z)\,dz$ είναι εξασφαλισμένη, αφού πρόκειται για επικαμπύλια ολοκληρώματα συνεχών συναρτήσεων.
Επειδή η ϕ είναι συνεχής στο συμπαγές σύνολο γ^*, υπάρχει M ώστε να ισχύει $|\phi(z)| \leq M$ για κάθε $z \in \gamma^*$. Άρα για κάθε $z \in \gamma^*$ και κάθε n ισχύει

$$|f_n(z)\phi(z) - f(z)\phi(z)| = |f_n(z) - f(z)|\,|\phi(z)| \leq M\|f_n - f\|_{\gamma^*}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\left| \int_\gamma f_n(z)\phi(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\phi(z)\,dz\right| &= \left| \int_\gamma (f_n(z)\phi(z) - f(z)\phi(z))\,dz\right| \\ &\leq M\|f_n - f\|_{\gamma^*}\,\text{μήκος}\,(\gamma) \to 0.\end{aligned}$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.9. *Έστω καμπύλη γ και έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στο άθροισμα s ομοιόμορφα στην τροχιά γ^*. Επίσης, έστω ϕ συνεχής στο γ^* και έστω ότι κάθε f_n είναι συνεχής στο γ^*. Τότε*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_\gamma f_n(z)\phi(z)\,dz = \int_\gamma s(z)\phi(z)\,dz. \tag{8.3}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ και εφαρμόζουμε σ' αυτά την Πρόταση 8.8. Έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \int_\gamma f_k(z)\phi(z)\,dz = \int_\gamma \sum_{k=1}^{n} f_k(z)\phi(z)\,dz = \int_\gamma s_n(z)\phi(z)\,dz \to \int_\gamma s(z)\phi(z)\,dz. \tag{8.4}$$

Άρα η σειρά (αριθμών) $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_\gamma f_n(z)\phi(z)\,dz$ συγκλίνει στον (αριθμό) $\int_\gamma s(z)\phi(z)\,dz$. □

Η σχέση (8.3) γράφεται, φυσικά, και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_\gamma f_n(z)\phi(z)\,dz = \int_\gamma \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)\phi(z)\,dz,$$

αφού ισχύει $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) = s(z)$ για κάθε $z \in \gamma^*$. Έτσι η σχέση (8.3) εκφράζει εναλλαγή των συμβόλων του άπειρου αθροίσματος $\sum_{n=1}^{+\infty}$ και του ολοκληρώματος $\int_\gamma$. Μια τέτοια εναλλαγή ισχύει μόνο υπο προϋποθέσεις. Στην Πρόταση 8.9 αποδείξαμε ότι ισχύει με την προϋπόθεση της ομοιόμορφης σύγκλισης της σειράς συναρτήσεων. Φυσικά, στην απόδειξη χρησιμοποιήσαμε, στην πρώτη ισότητα της σχέσης (8.4), ότι η εναλλαγή πεπερασμένου αθροίσματος $\sum_{k=1}^{n}$ και ολοκληρώματος ισχύει και αυτό δικαιολογείται από την Πρόταση 4.12.

Αναλόγως, μπορούμε να πούμε ότι η σχέση (8.2) γράφεται

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\gamma f_n(z)\phi(z)\,dz=\int_\gamma \lim_{n\to+\infty} f_n(z)\phi(z)\,dz$$

και εκφράζει εναλλαγή των συμβόλων του ορίου $\lim_{n\to+\infty}$ και του ολοκληρώματος $\int_\gamma$. Κι αυτή η εναλλαγή ισχύει με την προϋπόθεση της ομοιόμορφης σύγκλισης.

Τέλος, έχουμε ένα βασικό κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης σειράς συναρτήσεων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.10. [Κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης του Weierstrass] *Έστω ότι ισχύει $|f_n(z)|\leq M_n$ για κάθε n και κάθε $z\in A$. Αν η σειρά (μη-αρνητικών αριθμών) $\sum_{n=1}^{+\infty}M_n$ συγκλίνει, δηλαδή αν $\sum_{n=1}^{+\infty}M_n<+\infty$, τότε η $\sum_{n=1}^{+\infty}f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A.*

Απόδειξη. Εργαζόμενοι αρχικά με σειρές (μη-αρνητικών) αριθμών, βλέπουμε ότι για κάθε $z\in A$ ισχύει

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(z)|\leq\sum_{n=1}^{+\infty}M_n<+\infty,$$

οπότε για κάθε $z\in A$ η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(z)$ συγκλίνει. Έτσι ορίζουμε συνάρτηση με τύπο

$$s(z)=\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(z)\qquad\text{για κάθε }\ z\in A.$$

Κατόπιν, θεωρούμε τα μερικά αθροίσματα $s_n=f_1+\cdots+f_n$ και εχουμε ότι για κάθε $z\in A$ ισχύει

$$\begin{aligned}|s_n(z)-s(z)|&=\big|\textstyle\sum_{k=1}^{n}f_k(z)-\sum_{k=1}^{+\infty}f_k(z)\big|=\big|\sum_{k=n+1}^{+\infty}f_k(z)\big|\\&\leq\textstyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}|f_k(z)|\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}M_k.\end{aligned}$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $z\in A$, συνεπάγεται

$$\|s_n-s\|_A=\sup\{|s_n(z)-s(z)|\,|\,z\in A\}\leq\textstyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}M_k\to0\qquad\text{όταν }\ n\to+\infty,$$

επειδή $\sum_{n=1}^{+\infty}M_n<+\infty$. Άρα η (s_n) συγκλίνει στην s ομοιόμορφα στο A, οπότε η $\sum_{n=1}^{+\infty}f_n$ συγκλίνει στο άθροισμα s ομοιόμορφα στο A. □

Ασκήσεις.

8.2.1. [α] Αν $\mathrm{Re}\,z>-\frac12$, αποδείξτε ότι $\left|\frac{z}{z+1}\right|<1$. Αν το K είναι συμπαγές υποσύνολο του ημιεπιπέδου $\mathrm{Re}\,z>-\frac12$, αποδείξτε ότι υπάρχει r με $0<r<1$ (το r εξαρτάται από το K) ώστε να ισχύει $\left|\frac{z}{z+1}\right|\leq r$ για κάθε $z\in K$.

[β] Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{z}{z+1})^n$ συγκλίνει για κάθε z στο ημιεπίπεδο $\mathrm{Re}\,z>-\frac12$ και συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του ημιεπιπέδου αυτού.

8.2.2. [α] Αν το K είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}\setminus C(0;1)$, αποδείξτε ότι υπάρχει r με $0<r<1$ (το r εξαρτάται από το K) ώστε για κάθε $z\in K$ να ισχύει είτε $|z|\leq r$ είτε $|z|\geq\frac1r$.

[β] Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{z^{2n}+1}$ συγκλίνει για κάθε z στο $\mathbb{C}\setminus C(0;1)$ και συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}\setminus C(0;1)$.

8.2.3. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z+n)^2}$ συγκλίνει για κάθε $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ και ότι για κάθε συμπαγές K η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $K\setminus\mathbb{Z}$.

8.2.4. Ορίζουμε

$$t^z=e^{z\ln t}\qquad\text{για κάθε }\ z\in\mathbb{C},\ \ t>0.$$

[α] Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^z}$ συγκλίνει απολύτως για κάθε z στο ημιεπίπεδο $\mathrm{Re}\,z>1$ και αποκλίνει για κάθε z στο ημιεπίπεδο $\mathrm{Re}\,z\leq1$.

[β] Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^z}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο ημιεπίπεδο $\mathrm{Re}\,z\geq1+\delta$ για κάθε

$\delta > 0$.
Η συνάρτηση

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} \qquad \text{για } \operatorname{Re} z > 1$$

είναι η περίφημη **συνάρτηση ζήτα** του Riemann και συνδέεται με ένα από τα δυσκολότερα (ίσως το δυσκολότερο) άλυτα προβλήματα των μαθηματικών.

8.2.5. Υπάρχουν πολυώνυμα $p_n(z)$ ώστε να ισχύει $p_n(z) \to \frac{1}{z}$ ομοιόμορφα στον κύκλο $C(0;1)$; Σκεφτείτε στη βάση επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων στο $C(0;1)$.

8.3 Δημιουργία αναλυτικών συναρτήσεων.

Το Θεώρημα 8.4 είναι ένα από τα πιο σημαντικά εργαλεία κατασκευής αναλυτικών συναρτήσεων. Ξεκινάμε από κάποια ακολουθία συναρτήσεων (f_n) οι οποίες είναι όλες αναλυτικές σε κάποιο ανοικτό σύνολο Ω και, υπό κάποιες προϋποθέσεις, παίρνοντας το όριο της ακολουθίας, καταλήγουμε σε μια συνάρτηση f αναλυτική στο Ω.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.4. *Έστω ανοικτό σύνολο Ω και έστω ότι η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω. Αν όλες οι f_n είναι αναλυτικές στο Ω τότε και η f είναι αναλυτική στο Ω και, επιπλέον, και η $({f_n}')$ συγκλίνει στην f' ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω.*

Απόδειξη. Έστω $z \in \Omega$. Επειδή το μονοσύνολο $\{z\}$ είναι συμπαγές, από την υπόθεση συνεπάγεται ότι ισχύει $f_n(z) \to f(z)$. Δηλαδή, η (f_n) συγκλίνει στην f κατά σημείο στο Ω.
Τώρα, πάλι έστω $z_0 \in \Omega$. Το Ω είναι ανοικτό, οπότε υπάρχει κάποιος κλειστός δίσκος $\overline{D}(z_0;r)$ ο οποίος περιέχεται στο Ω. Επειδή κάθε f_n είναι αναλυτική στο Ω, ισχύει

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0;r) \text{ και κάθε } n. \tag{8.5}$$

Είδαμε ήδη ότι $f_n(z) \to f(z)$. Επίσης, ο κύκλος $C(z_0;r)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Ω, οπότε η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $C(z_0;r)$. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 8.8 στο δεξιό μέρος της (8.5) με τη συνάρτηση $\phi(\zeta) = \frac{1}{\zeta - z}$ ως συνάρτηση του ζ στο $C(z_0;r)$, βρίσκουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0;r). \tag{8.6}$$

Επειδή κάθε f_n είναι συνεχής στο $C(z_0;r)$ και επειδή η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $C(z_0;r)$, συνεπάγεται ότι και η f είναι συνεχής στο $C(z_0;r)$. Επομένως, το Λήμμα 6.2 μας λέει ότι η δεξιά μεριά της (8.6) είναι, ως συνάρτηση του z, αναλυτική στο σύνολο $\mathbb{C} \setminus C(z_0;r)$, το οποίο αποτελείται από τον δίσκο $D(z_0;r)$ και από το εξωτερικό του. Ειδικώτερα, η δεξιά μεριά της (8.6) είναι, ως συνάρτηση του z, αναλυτική στον $D(z_0;r)$. Επειδή, όμως, σύμφωνα με την (8.6), η f ταυτίζεται με αυτήν την συνάρτηση στον $D(z_0;r)$, συνεπάγεται ότι η f είναι αναλυτική στον $D(z_0;r)$ και, ειδικώτερα, η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0.
Αποδείξαμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $z_0 \in \Omega$, οπότε η f είναι αναλυτική στο Ω.
Τώρα μένει να αποδείξουμε ότι η $({f_n}')$ συγκλίνει στην f' ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω. (Παρατηρήστε ότι, αφού αποδείξαμε ότι η f είναι αναλυτική στο Ω, μπορούμε να μιλάμε για την παράγωγό της στο Ω.)
Έστω συμπαγές $K \subseteq \Omega$.
Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει

$$|z - w| \geq \delta \qquad \text{για κάθε } z \in K \text{ και κάθε } w \notin \Omega. \tag{8.7}$$

Τώρα ορίζουμε το σύνολο L ως εξής:

$$L = \{z \,|\, \text{υπάρχει } z' \in K \text{ με } |z - z'| \leq \tfrac{\delta}{2}\}.$$

Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι το L είναι συμπαγές υποσύνολο του Ω.
(i) Έστω $z \in L$. Τότε υπάρχει $z' \in K$ ώστε $|z - z'| \leq \frac{\delta}{2} < \delta$. Αν το z ανήκε στο Ω^c, τότε από την (8.7) θα είχαμε ότι $|z - z'| \geq \delta$. Άρα $z \in \Omega$. Έτσι αποδείξαμε ότι $L \subseteq \Omega$.
(ii) Το K είναι φραγμένο, οπότε υπάρχει M ώστε να ισχύει $|z'| \leq M$ για κάθε $z' \in K$. Τώρα έστω $z \in L$. Τότε υπάρχει $z' \in K$ ώστε $|z - z'| \leq \frac{\delta}{2}$. Επομένως,

$$|z| \leq |z - z'| + |z'| \leq \tfrac{\delta}{2} + M.$$

Άρα ισχύει $|z| \leq \frac{\delta}{2} + M$ για κάθε $z \in L$, οπότε το L είναι φραγμένο.
(iii) Έστω ακολουθία (z_n) στο L και έστω $z_n \to z$. Για κάθε z_n υπάρχει κάποιο $z'_n \in K$ ώστε $|z_n - z'_n| \leq \frac{\delta}{2}$. Επειδή το K είναι συμπαγές και η (z'_n) είναι στο K, υπάρχει υποακολουθία z'_{n_k} η οποία συγκλίνει σε στοιχείο, έστω z', του K. Από τις

$$z_{n_k} \to z, \qquad z'_{n_k} \to z', \qquad |z_{n_k} - z'_{n_k}| \leq \tfrac{\delta}{2}$$

συνεπάγεται $|z - z'| \leq \frac{\delta}{2}$. Άρα $z \in L$. Είδαμε, λοιπόν, ότι αν μια ακολουθία στο L συγκλίνει τότε το όριό της ανήκει στο L. Άρα το L είναι κλειστό.
Από τα (i), (ii), (iii) έχουμε ότι το L είναι συμπαγές υποσύνολο του Ω.
Κατόπιν, έστω $z \in K$. Από τον ορισμό του L είναι σαφές ότι ο κύκλος $C(z; \frac{\delta}{2})$ περιέχεται στο L. Επίσης,

$$f_n{}'(z) = \tfrac{1}{2\pi i} \int_{C(z;\delta/2)} \tfrac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } n \tag{8.8}$$

και

$$f'(z) = \tfrac{1}{2\pi i} \int_{C(z;\delta/2)} \tfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta. \tag{8.9}$$

Αφαιρούμε τις (8.8) και (8.9) και τότε

$$|f_n{}'(z) - f'(z)| = \tfrac{1}{2\pi} \Big| \int_{C(z;\delta/2)} \tfrac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \Big| \qquad \text{για κάθε } n. \tag{8.10}$$

Επειδή ο κύκλος $C(z; \frac{\delta}{2})$ περιέχεται στο L, για κάθε $\zeta \in C(z; \frac{\delta}{2})$ ισχύει $\zeta \in L$ και, επομένως, $|f_n(\zeta) - f(\zeta)| \leq \|f_n - f\|_L$. Άρα ισχύει

$$\Big| \tfrac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \Big| \leq \tfrac{\|f_n - f\|_L}{(\delta/2)^2} \qquad \text{για κάθε } \zeta \in C(z; \tfrac{\delta}{2}) \text{ και κάθε } n.$$

Άρα από την (8.10) έχουμε

$$|f_n{}'(z) - f'(z)| \leq \tfrac{1}{2\pi} \tfrac{\|f_n - f\|_L}{(\delta/2)^2}\, 2\pi \tfrac{\delta}{2} = \tfrac{2}{\delta} \|f_n - f\|_L \qquad \text{για κάθε } n.$$

Αυτή η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $z \in K$, οπότε συνεπάγεται ότι ισχύει

$$\|f_n{}' - f'\|_K \leq \tfrac{2}{\delta} \|f_n - f\|_L \qquad \text{για κάθε } n. \tag{8.11}$$

Επειδή η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο L, συνεπάγεται $\|f_n - f\|_L \to 0$, οπότε από την (8.11) ισχύει $\|f_n{}' - f'\|_K \to 0$ και, επομένως, η $(f_n{}')$ συγκλίνει στην f' ομοιόμορφα στο K. □

Το πέρασμα σε σειρές αναλυτικών συναρτήσεων είναι άμεσο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.5. *Έστω ανοικτό σύνολο Ω και έστω ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στην s ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω. Αν όλες οι f_n είναι αναλυτικές στο Ω τότε και η s είναι αναλυτική στο Ω και, επιπλέον, και η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n{}'$ συγκλίνει στην s' ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω.*

Απόδειξη. Εφαρμογή του Θεωρήματος 8.4 στα μερικά αθροίσματα $s_n = f_1 + \cdots + f_n$ τα οποία είναι, προφανώς, αναλυτικές συναρτήσεις στο Ω με $s_n{}' = f_1{}' + \cdots + f_n{}'$. □

Τα συμπεράσματα των Θεωρημάτων 8.4 και 8.5 μπορούν να επεκταθούν ως εξής. Στο Θεώρημα 8.4 η ακολουθία των παραγώγων $(f_n{}')$ ικανοποιεί τις ίδιες υποθέσεις με την ακολουθία (f_n). Δηλαδή, η $(f_n{}')$ συγκλίνει στην f' ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω. Άρα το Θεώρημα 8.4 εφαρμόζεται σ' αυτήν την ακολουθία και συμπεραίνουμε ότι η $(f_n{}'')$ συγκλίνει στην f'' ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω. Αυτό, όμως, συνεχίζεται επαγωγικά και βλέπουμε ότι:

Αν η ακολουθία αναλυτικών στο ανοικτό Ω συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω, τότε η f είναι αναλυτική στο Ω και για κάθε k η $(f_n{}^{(k)})$ συγκλίνει στην $f^{(k)}$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω.

Το ίδιο ισχύει και για σειρά αναλυτικών συναρτήσεων στο Θεώρημα 8.5.

Αν η σειρά αναλυτικών στο ανοικτό Ω συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στην s ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω, τότε η s είναι αναλυτική στο Ω και για κάθε k η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n{}^{(k)}$ συγκλίνει στην $s^{(k)}$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω.

Εμείς θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 8.5 σε μια ειδική κατηγορία σειρών συναρτήσεων, τις λεγόμενες **δυναμοσειρές**. Υπάρχουν τριών ειδών δυναμοσειρές. Αρχίζουμε με το πρώτο και πιο συνηθισμένο είδος δυναμοσειράς.

Δυναμοσειρές πρώτου είδους. Οποιαδήποτε σειρά

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

ονομάζεται **δυναμοσειρά** με **κέντρο** z_0 και **συντελεστές** a_n. Μια τέτοια σειρά είναι σειρά των συναρτήσεων $a_n(z-z_0)^n$ οι οποίες είναι αναλυτικές στο $\mathbb{C}$ διότι είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις.

Για κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ ορίζουμε την αντίστοιχη **ακτίνα σύγκλισης**:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\overline{\lim}\,|a_n|^{1/n}}, & \text{αν } 0 < \overline{\lim}\,|a_n|^{1/n} < +\infty \\ 0, & \text{αν } \overline{\lim}\,|a_n|^{1/n} = +\infty \\ +\infty, & \text{αν } \overline{\lim}\,|a_n|^{1/n} = 0 \end{cases}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.11. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης R. Τότε:*

[α] *Η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $z \in D(z_0;R)$.*

[β] *Η δυναμοσειρά αποκλίνει για κάθε $z \in D(z_0;R,+\infty)$.*

[γ] *Η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $D(z_0;R)$.*

Απόδειξη. [α] Έστω $z \in D(z_0;R)$, δηλαδή $|z-z_0| < R \leq +\infty$. Αυτομάτως, είναι $R > 0$. Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε R' έτσι ώστε

$$|z-z_0| < R' < R.$$

Συνεπάγεται

$$\overline{\lim}\,|a_n|^{1/n} < \tfrac{1}{R'}$$

και, επομένως, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|a_n|^{1/n} \leq \tfrac{1}{R'} \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Άρα ισχύει

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n|\,|z-z_0|^n \leq \big(\tfrac{|z-z_0|}{R'}\big)^n \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Επειδή $\frac{|z-z_0|}{R'} < 1$, συνεπάγεται

$$\textstyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n(z-z_0)^n| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} \big(\frac{|z-z_0|}{R'}\big)^n < +\infty.$$

Άρα η $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει απολύτως, οπότε και η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει απολύτως.

[β] Έστω $z \in D(z_0; R, +\infty)$, δηλαδή $0 \le R < |z-z_0|$. Αυτομάτως, είναι $R < +\infty$. Συνεπάγεται

$$\overline{\lim}\,|a_n|^{1/n} > \tfrac{1}{|z-z_0|},$$

οπότε ισχύει

$$|a_n|^{1/n} \ge \tfrac{1}{|z-z_0|} \qquad \text{για άπειρους } n.$$

Άρα ισχύει

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n|\,|z-z_0|^n \ge 1 \qquad \text{για άπειρους } n,$$

οπότε δεν ισχύει $a_n(z-z_0)^n \to 0$ και, επομένως, η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ αποκλίνει.

[γ] Έστω συμπαγές $K \subseteq D(z_0; R)$. Το $D(z_0; R)^c = \overline{D}(z_0; R, +\infty)$ είναι κλειστό και είναι ξένο προς το K. Άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|z-w| \ge \delta$ για κάθε $z \in K$ και κάθε $w \in D(z_0; R)^c$. Τώρα είναι προφανές ότι, αν πάρουμε $r = R - \delta < R$, ισχύει

$$K \subseteq D(z_0; r).$$

Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε R' έτσι ώστε

$$r < R' < R.$$

Συνεπάγεται

$$\overline{\lim}\,|a_n|^{1/n} < \tfrac{1}{R'}$$

και, επομένως, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει

$$|a_n|^{1/n} \le \tfrac{1}{R'} \qquad \text{για κάθε } n \ge n_0.$$

Επειδή $K \subseteq D(z_0; r)$, συνεπάγεται ότι ισχύει $|z-z_0| \le r$ για κάθε $z \in K$, οπότε ισχύει

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n|\,|z-z_0|^n \le \left(\tfrac{r}{R'}\right)^n \qquad \text{για κάθε } z \in K \text{ και κάθε } n \ge n_0.$$

Επειδή $\frac{r}{R'} < 1$, συνεπάγεται

$$\textstyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} \left(\tfrac{r}{R'}\right)^n < +\infty.$$

Από το Κριτήριο του Weierstrass συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο K, οπότε και η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο K. $\square$

Αν R είναι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, τότε ο δίσκος $D(z_0; R)$ ονομάζεται **δίσκος σύγκλισης** της δυναμοσειράς και από την Πρόταση 8.11 έχουμε τα εξής συμπεράσματα.

(i) Αν $R = 0$, τότε ο δίσκος σύγκλισης είναι κενός και ο συνοριακός κύκλος αποτελείται μόνο από το κέντρο z_0 : $C(z_0; R) = \{z_0\}$. Η δυναμοσειρά συγκλίνει για $z = z_0$ και αποκλίνει για κάθε $z \ne z_0$.

(ii) Αν $R = +\infty$, τότε ο δίσκος σύγκλισης είναι ολόκληρο το επίπεδο: $D(z_0; R) = \mathbb{C}$. Η δυναμοσειρά συγκλίνει (και, μάλιστα, απολύτως) για κάθε z και συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Από το Θεώρημα 8.5 συνεπάγεται ότι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο $\mathbb{C}$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$.

(iii) Αν $0 < R < +\infty$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει (και, μάλιστα, απολύτως) για κάθε $z \in D(z_0; R)$ και αποκλίνει για κάθε $z \in D(z_0; R, +\infty)$. Για τα σημεία z του κύκλου $C(z_0; R)$ δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα. Ανάλογα με τη συγκεκριμένη δυναμοσειρά, αυτή συγκλίνει για κάποια σημεία $z \in C(z_0; R)$ και αποκλίνει για τα υπόλοιπα. Τέλος, η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $D(z_0; R)$, οπότε από το Θεώρημα 8.5 συνεπάγεται ότι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στον δίσκο $D(z_0; R)$ είναι αναλυτική στον $D(z_0; R)$.

Στις περιπτώσεις (ii) και (iii), όπου $R > 0$ και η συνάρτηση, έστω s, που ορίζεται από τη δυναμοσειρά, είναι αναλυτική στον δίσκο σύγκλισης $D(z_0; R)$, ισχύει

$$s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{για } z \in D(z_0; R)$$

αλλά και για τις παραγώγους έχουμε

$$s^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k} \qquad \text{για } z \in D(z_0; R).$$

Θα ξαναδούμε τα παραδείγματα της ενότητας 8.1.

Παράδειγμα 8.3.1. Για την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ έχουμε $\overline{\lim}\, |\frac{1}{n}|^{1/n} = \lim \frac{1}{n^{1/n}} = 1$, οπότε $R = 1$. Άρα ο δίσκος σύγκλισης είναι ο $D(0; 1)$.

Παράδειγμα 8.3.2. Για την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ είναι $\overline{\lim}\, |\frac{1}{n^2}|^{1/n} = \lim \frac{1}{(n^{1/n})^2} = 1$, οπότε $R = 1$. Άρα ο δίσκος σύγκλισης είναι ο $D(0; 1)$.

Παράδειγμα 8.3.3. Για την $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ είναι $\overline{\lim}\, |\frac{1}{n!}|^{1/n} = \lim \frac{1}{(n!)^{1/n}} = 0$, οπότε $R = +\infty$. Άρα ο δίσκος σύγκλισης είναι ο $D(0; +\infty) = \mathbb{C}$.

Παράδειγμα 8.3.4. Για την $\sum_{n=1}^{+\infty} n! z^n$ είναι $\overline{\lim}\, |n!|^{1/n} = \lim (n!)^{1/n} = +\infty$, οπότε $R = 0$. Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για $z = 0$.

Δυναμοσειρές δεύτερου είδους. Στο δεύτερο είδος δυναμοσειρών εντάσσεται κάθε

$$\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n (z - z_0)^n = \cdots + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0}.$$

Κάθε τέτοια σειρά ονομάζεται, επίσης, **δυναμοσειρά** με **κέντρο** z_0 και **συντελεστές** a_n και είναι σειρά των ρητών συναρτήσεων $\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ οι οποίες είναι αναλυτικές στο $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Παρατηρήστε ότι η δυναμοσειρά δεν έχει καν νόημα αν $z = z_0$ (όπως δεν έχει νόημα κάθε δυναμοσειρά πρώτου είδους αν $z = \infty$). Απο την άλλη μεριά, αν $z = \infty$, τότε η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n 0 = 0$ και, επομένως, συγκλίνει και έχει άθροισμα 0.

Τώρα, για την $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n (z - z_0)^n$ ορίζουμε την αντίστοιχη **ακτίνα σύγκλισης**:

$$R = \begin{cases} \overline{\lim}\, |a_{-m}|^{1/m}, & \text{αν } 0 < \overline{\lim}\, |a_{-m}|^{1/m} < +\infty \\ +\infty, & \text{αν } \overline{\lim}\, |a_{-m}|^{1/m} = +\infty \\ 0, & \text{αν } \overline{\lim}\, |a_{-m}|^{1/m} = 0 \end{cases}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.12. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n (z - z_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης R. Τότε:*
[α] *Η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $z \in D(z_0; R, +\infty) \cup \{\infty\}$.*
[β] *Η δυναμοσειρά αποκλίνει για κάθε $z \in D(z_0; 0, R) = D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$.*
[γ] *Η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $D(z_0; R, +\infty)$.*

Απόδειξη. [α] Είδαμε προηγουμένως ότι, αν $z = \infty$, τότε όλοι οι όροι της δυναμοσειράς είναι μηδέν και, επομένως, συγκλίνει απολύτως.
Έστω $z \in D(z_0; R, +\infty)$, δηλαδή $0 \leq R < |z - z_0|$. Αυτομάτως, είναι $R < +\infty$. Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε R' έτσι ώστε

$$R < R' < |z - z_0|.$$

Συνεπάγεται

$$\overline{\lim}\, |a_{-m}|^{1/m} < R'$$

και, επομένως, υπάρχει m_0 ώστε να ισχύει

$$|a_{-m}|^{1/m} \leq R' \qquad \text{για κάθε } \ m \geq m_0.$$

Άρα ισχύει

$$|a_{-m}(z - z_0)^{-m}| = |a_{-m}|\,|z - z_0|^{-m} \leq \big(\tfrac{R'}{|z-z_0|}\big)^m \qquad \text{για κάθε } \ m \geq m_0.$$

Επειδή $\frac{R'}{|z-z_0|} < 1$, συνεπάγεται

$$\textstyle\sum_{m=m_0}^{+\infty} |a_{-m}(z - z_0)^{-m}| \leq \sum_{m=m_0}^{+\infty} \big(\tfrac{R'}{|z-z_0|}\big)^m < +\infty.$$

Άρα η $\sum_{m=m_0}^{+\infty} a_{-m}(z-z_0)^{-m}$ συγκλίνει απολύτως, οπότε και η $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m}(z-z_0)^{-m}$ συγκλίνει απολύτως και, επομένως, η $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z - z_0)^n$ συγκλίνει απολύτως.
[β] Έστω $z \in D(z_0; 0, R)$, δηλαδή $0 < |z - z_0| < R$. Αυτομάτως, είναι $R > 0$. Συνεπάγεται

$$\overline{\lim}\, |a_{-m}|^{1/m} > |z - z_0|,$$

οπότε ισχύει

$$|a_{-m}|^{1/m} \geq |z - z_0| \qquad \text{για άπειρους } \ m.$$

Άρα ισχύει

$$|a_{-m}(z - z_0)^{-m}| = |a_{-m}|\,|z - z_0|^{-m} \geq 1 \qquad \text{για άπειρους } \ m,$$

οπότε δεν ισχύει $a_{-m}(z - z_0)^{-m} \to 0$ και, επομένως, η $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m}(z - z_0)^{-m}$ αποκλίνει και, επομένως, η $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z - z_0)^n$ αποκλίνει.
[γ] Έστω συμπαγές $K \subseteq D(z_0; R, +\infty)$. Το $D(z_0; R, +\infty)^c = \overline{D}(z_0; R)$ είναι κλειστό και είναι ξένο προς το K. Άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει $|z - w| \geq \delta$ για κάθε $z \in K$ και κάθε $w \in D(z_0; R, +\infty)^c$. Είναι σαφές ότι, αν πάρουμε $r = R + \delta > R$, ισχύει

$$K \subseteq D(z_0; r, +\infty).$$

Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε R' έτσι ώστε

$$R < R' < r.$$

Συνεπάγεται

$$\overline{\lim}\, |a_{-m}|^{1/m} < R'$$

και, επομένως, υπάρχει m_0 ώστε να ισχύει

$$|a_{-m}|^{1/m} \leq R' \qquad \text{για κάθε } \ m \geq m_0.$$

Επειδή $K \subseteq D(z_0; r, +\infty)$, συνεπάγεται ότι ισχύει $|z - z_0| \geq r$ για κάθε $z \in K$, οπότε ισχύει

$$|a_{-m}(z - z_0)^{-m}| = |a_{-m}|\,|z - z_0|^{-m} \leq \big(\tfrac{R'}{r}\big)^m \qquad \text{για κάθε } \ z \in K \ \text{ και κάθε } \ m \geq m_0.$$

Επειδή $\frac{R'}{r} < 1$, συνεπάγεται

$$\textstyle\sum_{m=m_0}^{+\infty} \big(\tfrac{R'}{r}\big)^m < +\infty.$$

Από το Κριτήριο του Weierstrass συνεπάγεται ότι η $\sum_{m=m_0}^{+\infty} a_{-m}(z - z_0)^{-m}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο K, οπότε και η $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m}(z - z_0)^{-m}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο K και, επομένως, και η $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z - z_0)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο K. $\square$

Αν R είναι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$, τότε ο δακτύλιος $D(z_0; R, +\infty)$ ονομάζεται **δακτύλιος σύγκλισης** της δυναμοσειράς. Είδαμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει και για $z=\infty$. (Πολλοί επισυνάπτουν το σημείο ∞ στον δακτύλιο $D(z_0; R, +\infty)$ και μιλάνε για *δίσκο σύγκλισης* $D(z_0; R, +\infty) \cup \{\infty\}$.) Από την Πρόταση 8.12 έχουμε τα εξής συμπεράσματα.

(i) *Αν $R=+\infty$, τότε ο δακτύλιος σύγκλισης είναι κενός. Η δυναμοσειρά συγκλίνει για $z=\infty$ και αποκλίνει για κάθε $z \neq z_0, \infty$. (Όπως είπαμε, η σειρά δεν έχει νόημα για $z=z_0$.)*

(ii) *Αν $R=0$, τότε ο δακτύλιος σύγκλισης είναι ολόκληρο το επίπεδο εκτός του σημείου z_0: $D(z_0; 0, +\infty) = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Η δυναμοσειρά συγκλίνει (και, μάλιστα, απολύτως) για κάθε $z \neq z_0$ και συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. Από το Θεώρημα 8.5 συνεπάγεται ότι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στο $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.*

(iii) *Αν $0 < R < +\infty$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει (και, μάλιστα, απολύτως) για κάθε $z \in D(z_0; R, +\infty) \cup \{\infty\}$ και αποκλίνει για κάθε $z \in D(z_0; 0, R) = D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$. Για τα σημεία z του κύκλου $C(z_0; R)$ δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα. Ανάλογα με τη συγκεκριμένη δυναμοσειρά, αυτή συγκλίνει για κάποια σημεία $z \in C(z_0; R)$ και αποκλίνει για τα υπόλοιπα. Τέλος, η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $D(z_0; R, +\infty)$ και από το Θεώρημα 8.5 συνεπάγεται ότι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά στον δακτύλιο $D(z_0; R, +\infty)$ είναι αναλυτική στον $D(z_0; R, +\infty)$.*

Στις περιπτώσεις (ii) και (iii), όπου $R < +\infty$ και η συνάρτηση, έστω s, που ορίζεται από τη δυναμοσειρά, είναι αναλυτική στον δακτύλιο σύγκλισης $D(z_0; R, +\infty)$, ισχύει

$$s(z) = \sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n \qquad \text{για } z \in D(z_0; R, +\infty)$$

και για τις παραγώγους έχουμε

$$s^{(k)}(z) = \sum_{-\infty}^{n=-1} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k} \qquad \text{για } z \in D(z_0; R, +\infty).$$

Παράδειγμα 8.3.5. Η $\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{z^n}{-n} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{mz^m}$ έχει ακτίνα σύγκλισης 1 και δακτύλιο σύγκλισης τον $D(0; 1, +\infty)$.

Παράδειγμα 8.3.6. Η $\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{z^n}{n^2} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2 z^m}$ έχει ακτίνα σύγκλισης 1 και δακτύλιο σύγκλισης τον $D(0; 1, +\infty)$.

Παράδειγμα 8.3.7. Η $\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{z^n}{(-n)!} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m! z^m}$ έχει ακτίνα σύγκλισης 0 και δακτύλιο σύγκλισης τον $D(0; 0, +\infty)$.

Παράδειγμα 8.3.8. Η $\sum_{-\infty}^{n=-1} (-n)! z^n = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m!}{z^m}$ έχει ακτίνα σύγκλισης $+\infty$ και κενό δακτύλιο σύγκλισης. Η σειρά αυτή συγκλίνει μόνο για $z=\infty$.

Δυναμοσειρές τρίτου είδους. Το τρίτο είδος δυναμοσειρών είναι συνδυασμός των δυο προηγουμένων και σ' αυτό εντάσσονται οι

$$\begin{aligned}\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n &= \sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \\ &= \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots .\end{aligned}$$

Κάθε τέτοια **δυναμοσειρά** έχει **κέντρο** z_0 και **συντελεστές** a_n. Στην περίπτωση που η μια από τις δυο δυναμοσειρές που αποτελούν την $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ έχει όλους τους συντελεστές της ίσους με 0 τότε, φυσικά, καταλήγουμε σε μια από τις δυο προηγούμενες περιπτώσεις, οπότε ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει αυτή η περίπτωση. Τότε η δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ δεν έχει νόημα για $z = z_0$ και για $z = \infty$ ή, με άλλα λόγια, έχει νόημα μόνο αν $0 < |z - z_0| < +\infty$. Λέμε ότι η δυναμοσειρά **συγκλίνει** αν και οι δυο δυναμοσειρές $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z - z_0)^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ συγκλίνουν και σε κάθε άλλη περίπτωση λέμε ότι η δυναμοσειρά **αποκλίνει**. Άρα για να συγκλίνει η $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ θα πρέπει ο z να ανήκει στον δακτύλιο σύγκλισης της $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ (ή να είναι κάποιο ειδικό σημείο του αντίστοιχου συνοριακού κύκλου) *και* στον δίσκο σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ (ή να είναι κάποιο ειδικό σημείο του αντίστοιχου συνοριακού κύκλου). Έστω, λοιπόν, ότι R_1 είναι η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z - z_0)^n$ και R_2 η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$. Δηλαδή, ο δακτύλιος σύγκλισης της πρώτης είναι ο $D(z_0; R_1, +\infty)$ και ο δίσκος σύγκλισης της δεύτερης είναι ο $D(z_0; R_2)$. Τώρα διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.

(i) *Αν $R_1 < R_2$, τότε η τομή των $D(z_0; R_1, +\infty)$ και $D(z_0; R_2)$ είναι ο δακτύλιος $D(z_0; R_1, R_2)$ και η αρχική δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε z στον δακτύλιο αυτόν και πιθανόν και για μερικά σημεία των συνοριακών κύκλων $C(z_0; R_1)$, $C(z_0; R_2)$.*

(ii) *Αν $R_1 = R_2$, τότε οι $D(z_0; R_1, +\infty)$ και $D(z_0; R_2)$ δεν τέμνονται, οπότε η δυναμοσειρά συγκλίνει, ίσως, για μερικά σημεία του κοινού συνοριακού κύκλου $C(z_0; R_1) = C(z_0; R_2)$.*

(iii) *Αν $R_1 > R_2$, τότε η δυναμοσειρά αποκλίνει για κάθε $z \neq z_0, \infty$.*

Όταν $R_1 < R_2$, ο δακτύλιος $D(z_0; R_1, R_2)$ ονομάζεται **δακτύλιος σύγκλισης** της δυναμοσειράς $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.13. *Έστω δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ και έστω $R_1 < R_2$, όπου R_1 και R_2 είναι οι ακτίνες σύγκλισης της $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z - z_0)^n$ και της $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$, αντιστοίχως. Τότε:*

[α] *Η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $z \in D(z_0; R_1, R_2)$.*

[β] *Η δυναμοσειρά αποκλίνει για κάθε $z \in D(z_0; R_1) \cup D(z_0; R_2, +\infty)$.*

[γ] *Η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $D(z_0; R_1, R_2)$.*

Απόδειξη. Όλα είναι άμεσα βάσει της προηγούμενης συζήτησης. □

Στην περίπτωση που ισχύει $R_1 < R_2$, όπως στην Πρόταση 8.13, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση, έστω s, που ορίζεται από την $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ στον δακτύλιο σύγκλισης $D(z_0; R_1, R_2)$ είναι αναλυτική στον $D(z_0; R_1, R_2)$. Πράγματι, έχουμε πει ότι η συνάρτηση, έστω s_1, που ορίζεται από την $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$ στον δακτύλιο $D(z_0; R_1, +\infty)$ είναι αναλυτική στον $D(z_0; R_1, +\infty)$ και η συνάρτηση, έστω s_2, που ορίζεται από την $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ στον δίσκο $D(z_0; R_2)$ είναι αναλυτική στον $D(z_0; R_2)$. Τώρα στην τομή των δυο συνόλων, δηλαδή στον $D(z_0; R_1, R_2)$, ισχύει

$$s(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = s_1(z) + s_2(z),$$

οπότε η s είναι αναλυτική στον $D(z_0; R_1, R_2)$.

Παράδειγμα 8.3.9. Θεωρούμε τη δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{2^n}{-n} z^n + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} z^n$.
Για την $\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{2^n}{-n} z^n$ υπολογίζουμε $\overline{\lim}\, |\frac{2^{-m}}{m}|^{1/m} = \lim \frac{2^{-1}}{m^{1/m}} = \frac{1}{2}$, οπότε η ακτίνα σύγκλισής της είναι ίση με $\frac{1}{2}$.
Για την $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ γνωρίζουμε ήδη ότι έχει ακτίνα σύγκλισης ίση με 1.
Άρα η $\sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{2^n}{-n} z^n + 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} z^n$ έχει δακτύλιο σύγκλισης τον $D(0; \frac{1}{2}, 1)$.

Ασκήσεις.

8.3.1. Βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης και τους δίσκους σύγκλισης των $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ όταν $a_n = n^{13}$, $a_n = \frac{1}{n^5}$, $a_n = \frac{1}{n^n}$, $a_n = n^{\log n}$, $a_n = (\log n)^n$, $a_n = \frac{n!}{n^n}$, $a_n = \frac{(n!)^2}{n^n}$, $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

8.3.2. Βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης και τους δακτύλιους σύγκλισης των $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n z^n$ όταν $a_n = n^3$, $a_n = \frac{1}{n^2}$, $a_n = \frac{1}{2^n}$, $a_n = 3^n$, $a_n = \frac{1}{(-n)! n^n}$.

8.3.3. Βρείτε τον δακτύλιο σύγκλισης της $\sum_{-\infty}^{n=-1}(-1)^n z^n + \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{2i})^{n+1}z^n$ και υπολογίστε το άθροισμά της στον δακτύλιο σύγκλισης.

8.3.4. [α] Γράψτε την $\frac{1}{z-1}$ ως δυναμοσειρά με δίσκο σύγκλισης τον $D(0;1)$ και ως δυναμοσειρά με δακτύλιο σύγκλισης τον $D(0;1,+\infty)$.

[β] Γράψτε την $\frac{1}{(z-3)(z-4)}$ ως δυναμοσειρά με δίσκο σύγκλισης τον $D(0;3)$ και ως δυναμοσειρά με δακτύλιο σύγκλισης τον $D(0;3,4)$ και ως δυναμοσειρά με δακτύλιο σύγκλισης τον $D(0;4,+\infty)$.

8.3.5. Αν $m \in \mathbb{N}$, γράψτε την $\frac{1}{(1-z)^m}$ ως δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, προσδιορίζοντας την ακτίνα σύγκλισής της. Ξεκινήστε με τη γεωμετρική δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

8.3.6. Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης της

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{1\cdot 2\cdots n\cdot c(c+1)\cdots(c+n-1)} z^n \quad (c \neq 0, -1, -2, \ldots).$$

Η δυναμοσειρά αυτή ονομάζεται **υπεργεωμετρική σειρά** με παραμέτρους a, b, c. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $w = F(z; a, b, c)$, που ορίζεται από την υπεργεωμετρική σειρά στον δίσκο σύγκλισής της, είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$z(1-z)w'' + (c - (a+b+1)z)w' - abw = 0.$$

8.3.7. [α] Αποδείξτε ότι, αν δυο δυναμοσειρές του είδους $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ με θετικές ακτίνες σύγκλισης ορίζουν την ίδια συνάρτηση στην τομή των δίσκων σύγκλισής τους, τότε οι δυναμοσειρές είναι ίδιες (δηλαδή, έχουν τα ίδια αντίστοιχα a_n).

[β] Αποδείξτε το αντίστοιχο του [α] για δυο δυναμοσειρές του είδους $\sum_{-\infty}^{n=-1} a_n(z-z_0)^n$.

[γ] Μπορείτε να αποδείξετε κάτι ανάλογο για δυο δυναμοσειρές του είδους $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$;

8.3.8. Έστω $0 < R < +\infty$ και δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$.

[α] Αν η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάποιον $z \in C(z_0;R)$, αποδείξτε ότι συγκλίνει απολύτως για κάθε $z \in \overline{D}(z_0;R)$.

[β] Αν η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάποιον $z \in C(z_0;R)$, αποδείξτε ότι συγκλίνει απολύτως για κάθε $z \in D(z_0;R)$.

8.3.9. Έστω R', R'' και R οι ακτίνες σύγκλισης των $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n{}'(z-z_0)^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n{}''(z-z_0)^n$ και $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n{}' + a_n{}'')(z-z_0)^n$, αντιστοίχως. Αν $R' \neq R''$, αποδείξτε ότι $R = \min\{R', R''\}$. Αν $R' = R''$, αποδείξτε ότι $R \geq R' = R''$.

8.3.10. Έστω R η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$. Αν $0 < R < +\infty$, βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης των $\sum_{n=1}^{+\infty} n^5 a_n(z-z_0)^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^7}(z-z_0)^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n! a_n(z-z_0)^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}(z-z_0)^n$.

8.3.11. Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Για ποιους z συγκλίνει η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{kn}}{n}$;

8.3.12. Για ποιους z συγκλίνει η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} z^{n!}$;

8.4 Σειρές Taylor και σειρές Laurent.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.14. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω, $z_0 \in \Omega$ και $D(z_0;R)$ ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος με κέντρο z_0 ο οποίος περιέχεται στο Ω. Τότε υπάρχει μοναδική δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ ώστε να ισχύει*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0;R).$$

Οι συντελεστές δίνονται από τους τύπους

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{για } 0 < r < R.$$

Απόδειξη. Έστω οποιοσδήποτε $z \in D(z_0; R)$, οπότε $|z - z_0| < R$. Επιλέγουμε έναν οποιονδήποτε r ώστε $|z - z_0| < r < R$. Τότε $z \in D(z_0; r)$ και, σύμφωνα με τον τύπο του Cauchy, ισχύει

$$f(z) = \tfrac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta. \tag{8.12}$$

Τώρα, για κάθε $\zeta \in C(z_0; r)$ γράφουμε

$$\tfrac{1}{\zeta - z} = \tfrac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \tfrac{1}{\zeta - z_0} \tfrac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \tfrac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \big(\tfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\big)^n$$

βάσει της γεωμετρικής σειράς $\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{+\infty} w^n$ με $w = \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$, αφού $|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}| = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$.
Έτσι ο τύπος (8.12) γίνεται

$$f(z) = \tfrac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \big(\tfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\big)^n \, d\zeta. \tag{8.13}$$

Κατόπιν βλέπουμε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \big(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\big)^n$ συγκλίνει, ως σειρά συναρτήσεων του ζ, ομοιόμορφα στο $C(z_0; r)$. Αυτό ισχύει λόγω του κριτηρίου ομοιόμορφης σύγκλισης του Weierstrass, διότι

$$\big|\tfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\big|^n = \big(\tfrac{|z - z_0|}{r}\big)^n \qquad \text{για κάθε } \zeta \in C(z_0; r)$$

και

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \big(\tfrac{|z - z_0|}{r}\big)^n < +\infty.$$

Από την Πρόταση 8.9 συνεπάγεται ότι μπορούμε να εναλλάξουμε την σειρά ολοκλήρωσης και άθροισης στον τύπο (8.13) και βρίσκουμε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \big(\tfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\big)^n \, d\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \tfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \, (z - z_0)^n. \tag{8.14}$$

Από τους τύπους του Cauchy για τις παραγώγους μιας αναλυτικής συνάρτησης έχουμε ότι

$$\tfrac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \tfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta = \tfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \tag{8.15}$$

οπότε η σχέση (8.14) γίνεται

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Άρα ισχύει

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0; R)$$

με

$$a_n = \tfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Και, φυσικά, ισχύει

$$a_n = \tfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \tfrac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \tfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \qquad \text{για } 0 < r < R$$

λόγω των τύπων του Cauchy για τις παραγώγους (όπως ήδη είπαμε λίγο πιο πάνω).
Το μόνο που απομένει είναι να αποδειχτεί η μοναδικότητα της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$.
Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ ώστε να ισχύει

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0; R). \tag{8.16}$$

Θεωρούμε οποιονδήποτε r με $0 < r < R$. Από τα αποτελέσματα που έχουμε για τις γενικές δυναμοσειρές, γνωρίζουμε ότι η $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον $C(z_0; r)$, ο οποίος είναι συμπαγές υποσύνολο του δίσκου σύγκλισης $D(z_0; R)$. Άρα, σύμφωνα και με τα παραδείγματα 6.1.4 και 6.1.5, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ ισχύει

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\, d\zeta &= \textstyle\int_{C(z_0;r)} \frac{1}{(\zeta-z_0)^{k+1}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\zeta - z_0)^n\, d\zeta \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_{C(z_0;r)} (\zeta - z_0)^{n-k-1}\, d\zeta = 2\pi i a_k.\end{aligned}$$

Άρα οι συντελεστές της δυναμοσειράς ταυτίζονται με τους συντελεστές της δυναμοσειράς που βρήκαμε στο πρώτο μέρος της απόδειξης (στο μέρος που αφορά την ύπαρξη μιας δυναμοσειράς), οπότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ για την οποία ισχύει η (8.16) είναι μοναδική. $\square$

Εδώ πρέπει να κάνουμε μια παρατήρηση σχετικά με κάποιο "λεπτό" σημείο της προηγούμενης απόδειξης. Γενικά, όταν έχουμε μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ εννοείται ότι οι συντελεστές a_n δεν εξαρτώνται από τις τιμές που παίρνει ο z στον δίσκο σύγκλισης της δυναμοσειράς. Στον τύπο (8.14) της παραπάνω απόδειξης εμφανίζεται η δυναμοσειρά

$$\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\, d\zeta\, (z - z_0)^n$$

με συντελεστές

$$a_n = \textstyle\frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\, d\zeta$$

και, μέχρι αυτό το σημείο της απόδειξης, δεν είναι σαφές αν ο συντελεστής a_n εξαρτάται ή όχι από τις τιμές του z. Ο λόγος είναι ότι η ακτίνα r που εμφανίζεται στο συγκεκριμένο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα έχει επιλεγεί με βάση τον z, αφού είπαμε ότι επιλέγουμε έναν οποιονδήποτε r ώστε $|z - z_0| < r < R$. Όμως, *εκ των υστέρων* είδαμε ότι στην πραγματικότητα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα που ορίζει τον a_n δεν εξαρτάται από τον z. Αυτό ισχύει ακριβώς λόγω των τύπων του Cauchy για τις παραγώγους, δηλαδή των τύπων (8.15). Πρέπει, όμως, να τονιστεί ότι υπάρχει και ένας άλλος λόγος που το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\textstyle\frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\, d\zeta$$

δεν εξαρτάται από την τιμή του r στο διάστημα $(0, R)$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$ είναι, ως συνάρτηση του ζ, αναλυτική στο $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$, οπότε, σύμφωνα με το παράδειγμα 6.2.2, έχουμε

$$\textstyle\frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r_1)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r_2)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{για } 0 < r_1 < r_2 < R. \tag{8.17}$$

Όμως, θα δούμε τη σχέση (8.17) και μέσα στο ευρύτερο πλαίσιο του σφαιρικού θεωρήματος του Cauchy. Αυτό θα το κάνουμε εν όψει της επόμενης Πρότασης 8.15, όπου δεν θα μας βοηθήσουν οι τύποι του Cauchy για παραγώγους ούτε το παράδειγμα 6.2.2.

Θεωρούμε, λοιπόν, τον κύκλο Σ ο οποίος αποτελείται από την καμπύλη γ_1, η οποία περιγράφει την περιφέρεια $C(z_0; r_1)$ με τη θετική φορά περιστροφής, με πολλαπλότητα -1 και από την καμπύλη γ_2, η οποία περιγράφει την περιφέρεια $C(z_0; r_2)$ με τη θετική φορά περιστροφής, με πολλαπλότητα 1. Είναι πολύ απλό να δει κανείς ότι ο Σ είναι ομόλογος του μηδενός στο ανοικτό σύνολο $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$ και, επειδή η $\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$ είναι αναλυτική στο σύνολο αυτό, από το σφαιρικό θεώρημα του Cauchy συνεπάγεται

$$\textstyle\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\, d\zeta - \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\, d\zeta = \int_{\Sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\, d\zeta = 0,$$

δηλαδή η σχέση (8.17).

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η δυναμοσειρά*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

με συντελεστές

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{για } 0 < r < R$$

ονομάζεται **σειρά Taylor** *της f στον δίσκο $D(z_0; R)$, τον μεγαλύτερο ανοικτό δίσκο με κέντρο z_0 ο οποίος περιέχεται στο σύνολο αναλυτικότητας της f.*

Τονίζουμε ότι *η συνάρτηση f ταυτίζεται με την σειρά Taylor της στον μεγαλύτερο ανοικτό δίσκο με κέντρο z_0 ο οποίος περιέχεται στο σύνολο αναλυτικότητας της f.*

Παράδειγμα 8.4.1. Η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{1-z}$ είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος με κέντρο 0 ο οποίος περιέχεται στο $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ είναι ο $D(0; 1)$. Για να βρούμε τη σειρά Taylor της f στον δίσκο $D(0; 1)$ υπολογίζουμε τις διαδοχικές παραγώγους:

$$f(z) = \tfrac{1}{1-z}, \qquad f'(z) = \tfrac{1}{(1-z)^2}, \qquad f''(z) = \tfrac{2}{(1-z)^3}, \qquad f'''(z) = \tfrac{2\cdot 3}{(1-z)^4}$$

και, γενικότερα,

$$f^{(n)}(z) = \tfrac{n!}{(1-z)^{n+1}} \qquad \text{για } n \geq 0.$$

Άρα

$$a_n = \tfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1 \qquad \text{για } n \geq 0$$

και η σειρά Taylor της f είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, οπότε

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \qquad \text{για κάθε } z \in D(0; 1).$$

Ο τύπος αυτός είναι, φυσικά, γνωστός!

Παράδειγμα 8.4.2. Η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$ είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$. Ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος με κέντρο 0 ο οποίος περιέχεται στο $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ είναι ο $D(0; 1)$. Για να βρούμε τη σειρά Taylor της f στον δίσκο $D(0; 1)$ υπολογίζουμε τις παραγώγους της f. Κατ' αρχάς γράφουμε την f ώς άθροισμα "απλών κλασμάτων":

$$f(z) = -\tfrac{1}{2i}\big(\tfrac{1}{i-z} + \tfrac{1}{i+z}\big).$$

Επομένως,

$$f^{(n)}(z) = -\tfrac{1}{2i}\big(\tfrac{n!}{(i-z)^{n+1}} + (-1)^n \tfrac{n!}{(i+z)^{n+1}}\big) \qquad \text{για } n \geq 0.$$

Άρα

$$a_n = \tfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \tfrac{1+(-1)^n}{2i^n} \qquad \text{για } n \geq 0.$$

Αν ο n είναι περιττός, τότε $a_n = 0$. Αν ο n είναι άρτιος, τότε $a_n = \frac{1}{i^n} = (-1)^{\frac{n}{2}}$ και η σειρά Taylor της f είναι η $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^{2k}$, οπότε

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^{2k} \qquad \text{για κάθε } z \in D(0; 1).$$

Φυσικά, τον ίδιο τύπο μπορούμε να βρούμε πιο εύκολα, χρησιμοποιώντας τη σειρά Taylor της $\frac{1}{1-z}$, δηλαδή τη γεωμετρική σειρά: στη θέση του z στον τύπο $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ χρησιμοποιούμε τον $-z^2$ και βρίσκουμε $\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{2n}$. Είναι απαραίτητο να παρατηρήσουμε ότι $-z^2 \in D(0; 1)$ αν και μόνο αν $z \in D(0; 1)$. Από τη στιγμή που έχουμε βρει *κάποια* δυναμοσειρά η οποία ταυτίζεται με τη συνάρτησή μας στον δίσκο $D(0; 1)$, αυτή η σειρά *πρέπει* να είναι η σειρά Taylor της συνάρτησης. Αυτό προκύπτει από την Πρόταση 8.14 και ειδικά από την μοναδικότητα της δυναμοσειράς η οποία ταυτίζεται με μια συνάρτηση στον μεγαλύτερο δίσκο με δεδομένο κέντρο ο οποίος περιέχεται στο σύνολο αναλυτικότητας της συνάρτησης.

Παράδειγμα 8.4.3. Η εκθετική συνάρτηση $f(z) = e^z$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος με κέντρο 0 ο οποίος περιέχεται στο $\mathbb{C}$ είναι ο $D(0; +\infty) = \mathbb{C}$. Οι παράγωγοι της f είναι

$$f^{(n)}(z) = e^z \qquad \text{για κάθε } \ n \geq 0,$$

οπότε οι συντελεστές της σειράς Taylor της f είναι οι

$$a_n = \tfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \tfrac{1}{n!} \qquad \text{για κάθε } \ n \geq 0.$$

Άρα η σειρά Taylor της f είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$ και, επομένως,

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n \qquad \text{για κάθε } \ z.$$

Παράδειγμα 8.4.4. Η συνάρτηση $f(z) = \cos z$, που ορίστηκε στην άσκηση 5.4.4, είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και ο μεγαλύτερος ανοικτός δίσκος με κέντρο 0 ο οποίος περιέχεται στο $\mathbb{C}$ είναι ο $D(0; +\infty) = \mathbb{C}$. Οι παράγωγοι της f είναι

$$f^{(n)}(z) = (-1)^{\frac{n}{2}} \cos z \quad \text{για άρτιο } n \qquad \text{και} \qquad f^{(n)}(z) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin z \quad \text{για περιττό } n.$$

Άρα οι συντελεστές της σειράς Taylor της f είναι οι

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n!} \quad \text{για άρτιο } n \qquad \text{και} \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0 \quad \text{για περιττό } n.$$

Άρα η σειρά Taylor της f είναι η $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$ και, επομένως,

$$\cos z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \qquad \text{για κάθε } \ z.$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\sin z = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} z^{2k-1} \qquad \text{για κάθε } \ z.$$

Ένας άλλος τρόπος για να βρούμε τις σειρές Taylor των $\cos z$ και $\sin z$ είναι να χρησιμοποιήσουμε τους ορισμούς τους και τη σειρά Taylor της e^z. Για παράδειγμα:

$$\begin{aligned} \cos z &= \tfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{n!}(iz)^n + \tfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{n!}(-iz)^n \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{i^n(1+(-1)^n)}{2\,n!} z^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \tfrac{i^{2k}}{(2k)!} z^{2k} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{+\infty} \tfrac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}. \end{aligned}$$

Έτσι βρίσκουμε μια δυναμοσειρά η οποία ταυτίζεται με την $\cos z$ στον μεγαλύτερο δίσκο με κέντρο 0 ο οποίος περιέχεται στο σύνολο αναλυτικότητας της $\cos z$, οπότε, λόγω μοναδικότητας, η σειρά αυτή είναι ακριβώς η σειρά Taylor της $\cos z$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.15. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω και $D(z_0; R_1, R_2)$ ένας μέγιστος ανοικτός δακτύλιος με κέντρο z_0 ο οποίος περιέχεται στο Ω. Τότε υπάρχει μοναδική δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ ώστε να ισχύει*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad \text{για κάθε } \ z \in D(z_0; R_1, R_2).$$

Οι συντελεστές δίνονται από τους τύπους

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta \qquad \text{για } \ R_1 < r < R_2.$$

Απόδειξη. Έστω οποιοσδήποτε $z \in D(z_0; R_1, R_2)$, οπότε $R_1 < |z - z_0| < R_2$. Επιλέγουμε δυο οποιουσδήποτε r_1, r_2 ώστε $R_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R_2$. Τότε $z \in D(z_0; r_1, r_2)$ και ισχύει

$$f(z) = \tfrac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r_2)} \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \tfrac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r_1)} \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{8.18}$$

Για να αποδείξουμε τον τύπο (8.18) θεωρούμε την $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$, η οποία, ως συνάρτηση του ζ, είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο $\Omega = D(z_0; R_1, R_2) \setminus \{z\}$ και θεωρούμε και τον κύκλο Σ ο οποίος αποτελείται από την καμπύλη γ_1, η οποία περιγράφει την περιφέρεια $C(z_0; r_1)$ με τη θετική φορά περιστροφής, με πολλαπλότητα -1, από την καμπύλη γ_2, η οποία περιγράφει την περιφέρεια $C(z_0; r_2)$ με τη θετική φορά περιστροφής, με πολλαπλότητα 1 και από την καμπύλη γ_3, η οποία περιγράφει μια πολύ μικρή περιφέρεια $C(z; r_3)$ με τη θετική φορά περιστροφής, με πολλαπλότητα -1. Βλέπουμε αμέσως ότι ο Σ είναι ομόλογος του μηδενός στο Ω, οπότε από το σφαιρικό θεώρημα του Cauchy συνεπάγεται

$$\int_{\gamma_2} \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{\gamma_1} \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{\gamma_3} \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\Sigma} \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta = 0.$$

Τώρα, από τον γνωστό τύπο του Cauchy έχουμε

$$\tfrac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_3} \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z)$$

και καταλήγουμε στην σχέση (8.18).
Τώρα, για κάθε $\zeta \in C(z_0; r_2)$ γράφουμε

$$\tfrac{1}{\zeta - z} = \tfrac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \tfrac{1}{\zeta - z_0} \tfrac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \tfrac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \big(\tfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\big)^n$$

βάσει της γεωμετρικής σειράς $\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{+\infty} w^n$ με $w = \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$, αφού $|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}| = \frac{|z - z_0|}{r_2} < 1$.
Επίσης, για κάθε $\zeta \in C(z_0; r_1)$ γράφουμε (προσέξτε την αλλαγή!)

$$\tfrac{1}{\zeta - z} = \tfrac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = -\tfrac{1}{z - z_0} \tfrac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\tfrac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \big(\tfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\big)^n$$

πάλι βάσει της γεωμετρικής σειράς $\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{+\infty} w^n$ με $w = \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}$, αφού $|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}| = \frac{r_1}{|z - z_0|} < 1$.
Έτσι ο τύπος (8.18) γίνεται

$$f(z) = \tfrac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r_2)} \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \big(\tfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\big)^n d\zeta + \tfrac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r_1)} \tfrac{f(\zeta)}{z - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \big(\tfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\big)^n d\zeta. \tag{8.19}$$

Ακριβώς όπως στην απόδειξη της Πρότασης 8.14, βλέπουμε με το κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης του Weierstrass ότι οι σειρές μέσα στα δυο ολοκληρώματα του τύπου (8.19) συγκλίνουν ομοιόμορφα και, αφού εναλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης και άθροισης, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r_2)} \tfrac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \big(\tfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\big)^n d\zeta + \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r_1)} \tfrac{f(\zeta)}{z - z_0} \big(\tfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\big)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r_2)} \tfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta\, (z - z_0)^n \\ &\quad + \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r_1)} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n\, d\zeta\, \tfrac{1}{(z - z_0)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Στην τελευταία σειρά αλλάζουμε το $n + 1$ σε $-n$ και βρίσκουμε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r_2)} \tfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta\, (z - z_0)^n + \sum_{-\infty}^{n=-1} \tfrac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r_1)} \tfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta\, (z - z_0)^n. \tag{8.20}$$

Από τη συζήτηση μετά από την Πρόταση 8.14 βλέπουμε ότι, επειδή η $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$ είναι, ως συνάρτηση του ζ, αναλυτική στον δακτύλιο $D(z_0; R_1, R_2)$, ισχύει

$$\int_{C(z_0;r_1)} \tfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta = \int_{C(z_0;r_2)} \tfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{για } R_1 < r_1 < r_2 < R_2.$$

Άρα οι συντελεστές των δυο σειρών στον τύπο (8.20) δεν εξαρτώνται από την τιμή που παίρνουν οι ακτίνες r_1, r_2, οπότε θεωρούμε στη θέση των r_1, r_2 οποιονδήποτε r με $R_1 < r < R_2$ και γράφουμε

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0; R_1, R_2)$$

με

$$a_n = \tfrac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \tfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{για } R_1 < r < R_2.$$

Τώρα θα αποδείξουμε τη μοναδικότητα της δυναμοσειράς $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$.
Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει δυναμοσειρά $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ ώστε να ισχύει

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \qquad \text{για κάθε } z \in D(z_0; R_1, R_2). \tag{8.21}$$

Θεωρούμε οποιονδήποτε r με $R_1 < r < R_2$. Η $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον $C(z_0; r)$, ο οποίος είναι συμπαγές υποσύνολο του δακτύλιου σύγκλισης $D(z_0; R_1, R_2)$. Άρα για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ισχύει

$$\begin{aligned}\int_{C(z_0;r)} \tfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta &= \int_{C(z_0;r)} \tfrac{1}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(\zeta - z_0)^n\, d\zeta \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \int_{C(z_0;r)} (\zeta - z_0)^{n-k-1}\, d\zeta = 2\pi i a_k.\end{aligned}$$

Άρα οι συντελεστές της δυναμοσειράς ταυτίζονται με τους συντελεστές της δυναμοσειράς που βρήκαμε στο πρώτο μέρος της απόδειξης, οπότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ για την οποία ισχύει η (8.21) είναι μοναδική. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Η δυναμοσειρά*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$$

με συντελεστές

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0;r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \qquad \text{για } R_1 < r < R_2$$

ονομάζεται **σειρά Laurent** *της f στον δακτύλιο $D(z_0; R_1, R_2)$, τον μεγαλύτερο ανοικτό δακτύλιο με κέντρο z_0 ο οποίος περιέχεται στο σύνολο αναλυτικότητας της f.*

Παράδειγμα 8.4.5. Η $f(z) = \frac{1}{z}$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ο δακτύλιος $D(0; 0, +\infty) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι μέγιστος ανοικτός δακτύλιος (και, μάλιστα, ο μόνος) με κέντρο 0 ο οποίος περιέχεται στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Για να βρούμε τη σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(0; 0, +\infty)$ υπολογίζουμε τους συντελεστές a_n. Θεωρούμε οποιονδήποτε r με $0 < r < +\infty$, και τότε

$$a_n = \tfrac{1}{2\pi i} \int_{C(0;r)} \tfrac{1/\zeta}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta = \tfrac{1}{2\pi i} \int_{C(0;r)} \tfrac{1}{\zeta^{n+2}}\, d\zeta \qquad \text{για κάθε } n.$$

Αν $n \neq -1$, τότε $a_n = 0$ και, αν $n = -1$, τότε $a_{-1} = 1$. Άρα η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(0; 0, +\infty)$ είναι η $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n = z^{-1}$ και, επομένως, ισχύει (το απολύτως προφανές) $\frac{1}{z} = z^{-1}$ για κάθε $z \in D(0; 0, +\infty)$.

Στα επόμενα παραδείγματα θα εκμεταλευτούμε την μοναδικότητα της σειράς Laurent για να βρούμε τις σειρές Laurent διαφόρων συναρτήσεων χωρίς να προσφύγουμε στους υπολογισμούς με επικαμπύλια ολοκληρώματα: βρίσκουμε με έμμεσο τρόπο (μέσω βοηθητικών συναρτήσεων) μια δυναμοσειρά που ταυτίζεται με τη δεδομένη συνάρτηση σε κάποιον δακτύλιο, ο οποίος περιέχεται στο σύνολο αναλυτικότητας της συνάρτησης, οπότε η σειρά που βρήκαμε είναι ακριβώς η σειρά Laurent που ζητάμε.

Παράδειγμα 8.4.6. Η $f(z)=\frac{1}{1-z}$ είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Έχουμε δει ότι ο μέγιστος ανοικτός δίσκος με κέντρο 0 ο οποίος περιέχεται στο $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ είναι ο $D(0;1)$ και ότι η σειρά Taylor της f σ' αυτόν τον δίσκο είναι η $\sum_{n=0} z^n$.
Ένας μέγιστος ανοικτός δακτύλιος με κέντρο 0 ο οποίος περιέχεται στο $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ είναι ο $D(0;1,+\infty)$. Για να βρούμε τη σειρά Laurent της f στον δακτύλιο αυτόν, μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές a_n με τους τύπους με τα επικαμπύλια ολοκληρώματα. Μπορούμε, όμως, να κάνουμε κάτι πιο απλό. Αν $z\in D(0;1,+\infty)$, τότε $|z|>1$, οπότε $|\frac{1}{z}|<1$ και, επομένως,

$$\tfrac{1}{1-z}=-\tfrac{1}{z}\tfrac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\tfrac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\big(\tfrac{1}{z}\big)^n=\sum_{-\infty}^{n=-1}(-1)z^n.$$

Λόγω μοναδικότητας, η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(0;1,+\infty)$ είναι η $\sum_{-\infty}^{n=-1}(-1)z^n$.

Παράδειγμα 8.4.7. Η $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο $\mathbb{C}\setminus\{1,2\}$. Υπάρχει ένας μέγιστος ανοικτός δίσκος με κέντρο 0 και δυο μέγιστοι ανοικτοί δακτύλιοι με κέντρο 0 οι οποίοι περιέχονται στο $\mathbb{C}\setminus\{1,2\}$: ο δίσκος $D(0;1)$ και οι δακτύλιοι $D(0;1,2)$ και $D(0;2,+\infty)$. Για να βρούμε τις αντίστοιχες σειρές Taylor και Laurent της f, γράφουμε την f ως άθροισμα “απλών κλασμάτων” ως εξής:

$$f(z)=\tfrac{1}{z-2}-\tfrac{1}{z-1}.$$

Αν $z\in D(0;1)$, τότε $|z|<1$ και $|\frac{z}{2}|<1$, οπότε

$$f(z)=-\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{1-\frac{z}{2}}+\tfrac{1}{1-z}=-\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\big(\tfrac{z}{2}\big)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\big(1-\tfrac{1}{2^{n+1}}\big)z^n.$$

Άρα η σειρά Taylor της f στον δίσκο $D(0;1)$ είναι η $\sum_{n=0}^{+\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})z^n$.
Αν $z\in D(0;1,2)$, τότε $|\frac{1}{z}|<1$ και $|\frac{z}{2}|<1$, οπότε

$$\begin{aligned}f(z)&=-\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{1-\frac{z}{2}}-\tfrac{1}{z}\tfrac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\big(\tfrac{z}{2}\big)^n-\tfrac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\big(\tfrac{1}{z}\big)^n\\&=\sum_{-\infty}^{n=-1}(-1)z^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\big(-\tfrac{1}{2^{n+1}}\big)z^n.\end{aligned}$$

Άρα η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(0;1,2)$ είναι η $\sum_{-\infty}^{n=-1}(-1)z^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{1}{2^{n+1}})z^n$ με συντελεστές $a_n=-1$, αν $n\le -1$, και $a_n=-\frac{1}{2^{n+1}}$, αν $n\ge 0$.
Αν $z\in D(0;2,+\infty)$, τότε $|\frac{1}{z}|<1$ και $|\frac{2}{z}|<1$, οπότε

$$f(z)=\tfrac{1}{z}\tfrac{1}{1-\frac{2}{z}}-\tfrac{1}{z}\tfrac{1}{1-\frac{1}{z}}=\tfrac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\big(\tfrac{2}{z}\big)^n-\tfrac{1}{z}\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\tfrac{1}{z}\big)^n=\sum_{-\infty}^{n=-2}\big(\tfrac{1}{2^{n+1}}-1\big)z^n.$$

Άρα η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(0;2,+\infty)$ είναι η $\sum_{-\infty}^{n=-2}(\frac{1}{2^{n+1}}-1)z^n$ με συντελεστές $a_n=\frac{1}{2^{n+1}}-1$, αν $n\le -2$, και $a_n=0$, αν $n\ge -1$.

Παράδειγμα 8.4.8. Η $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Ο $D(0;0,+\infty)=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ είναι ο μόνος μέγιστος ανοικτός δακτύλιος με κέντρο 0 ο οποίος περιέχεται στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Βρίσκουμε τη σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(0;0,+\infty)$ χρησιμοποιώντας τη σειρά Taylor της e^z στο $\mathbb{C}$. Στην ισότητα $e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^n$ αντικαθιστούμε τον z με τον $\frac{1}{z}$ και βρίσκουμε

$$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{-\infty}^{n=-1}\frac{1}{(-n)!}z^n+1\qquad\text{για κάθε }\ z\neq 0.$$

Άρα η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(0;0,+\infty)$ είναι η $\sum_{-\infty}^{n=-1}\frac{1}{(-n)!}z^n+1$ με συντελεστές $a_n=\frac{1}{(-n)!}$, αν $n\le 0$, και $a_n=0$, αν $n\ge 1$.

Ασκήσεις.

8.4.1. Βρείτε τη σειρά Taylor της $\mathrm{Log}\,(1-z)$ με κέντρο $z_0=0$.

8.4.2. Έστω $0 < |a| < |b|$. Βρείτε τις τρεις σειρές Laurent με κέντρο 0, τις δυο σειρές Laurent με κέντρο a και τις δυο σειρές Laurent με κέντρο b της συνάρτησης $\frac{z}{(z-a)(z-b)}$.

8.4.3. Έστω f αναλυτική στον $D(z_0;R)$ και $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ η σειρά Taylor της f.
[α] Αποδείξτε ότι, αν $0 \leq r < R$,

$$\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+re^{it})|^2\,dt = \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

[β] Αν η f είναι φραγμένη στον $D(z_0;R)$, δηλαδή ισχύει $|f(z)| \leq M$ για $z \in D(z_0;R)$, αποδείξτε ότι

$$\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 R^{2n} \leq M^2.$$

[γ] Αν και η g είναι αναλυτική στον $D(z_0;R)$ με σειρά Taylor $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, αποδείξτε ότι, αν $0 \leq r < R$,

$$\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})\,\overline{g(z_0+re^{it})}\,dt = \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\overline{b_n} r^{2n}.$$

8.4.4. Έστω f αναλυτική στον δακτύλιο $D(z_0;R_1,R_2)$. Χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη σειρά Laurent της f, αποδείξτε ότι υπάρχουν δυο συναρτήσεις, f_1 και f_2, όπου η f_2 είναι αναλυτική στον δίσκο $D(z_0;R_2)$ και η f_1 είναι αναλυτική στον $D(z_0;R_1,+\infty)$, ώστε να ισχύει

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) \qquad \text{για } z \in D(z_0;R_1,R_2).$$

8.5 Ρίζες και η αρχή της ταυτότητας.

Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω και έστω $z_0 \in \Omega$. Θεωρούμε τον μεγαλύτερο δίσκο $D(z_0;R)$ ο οποίος περιέχεται στο Ω και την σειρά Taylor της f σ' αυτόν τον δίσκο, οπότε έχουμε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad \text{για } z \in D(z_0;R).$$

Επειδή $a_0 = f(z_0)$, το z_0 είναι ρίζα της f αν και μόνο αν $a_0 = 0$.
Τώρα υποθέτουμε ότι το z_0 είναι ρίζα της f, οπότε $a_0 = 0$, και διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.
Πρώτη περίπτωση: Ισχύει $a_n = 0$ για κάθε n.
Τότε, προφανώς, ισχύει $f(z) = 0$ για κάθε $z \in D(z_0;R)$, δηλαδή η f είναι ταυτοτικά 0 στον δίσκο $D(z_0;R)$. Βάσει των τύπων των a_n, η συνθήκη "$a_n = 0$ για κάθε n" ισοδυναμεί με την "$f^{(n)}(z_0) = 0$ για κάθε n".
Δεύτερη περίπτωση: Ισχύει $a_n \neq 0$ για τουλάχιστον έναν n.
Τότε θεωρούμε τον ελάχιστο $n \geq 1$ για τον οποίο ισχύει $a_n \neq 0$ και έστω ότι αυτός είναι ο N. Δηλαδή έχουμε ότι $a_0 = a_1 = \ldots = a_{N-1} = 0$ και $a_N \neq 0$. Και πάλι, αυτό ισοδυναμεί με $f(z_0) = f^{(1)}(z_0) = \ldots = f^{(N-1)}(z_0) = 0$ και $f^{(N)}(z_0) \neq 0$. Τότε έχουμε ότι

$$f(z) = \sum_{n=N}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad \text{για } z \in D(z_0;R).$$

Η σχέση αυτή γράφεται

$$f(z) = (z-z_0)^N \sum_{n=N}^{+\infty} a_n(z-z_0)^{n-N} = (z-z_0)^N \sum_{n=0}^{+\infty} a_{N+n}(z-z_0)^n \qquad \text{για } z \in D(z_0;R).$$

Αφού η δυναμοσειρά

$$\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{N+n}(z-z_0)^n = a_N + a_{N+1}(z-z_0) + a_{N+2}(z-z_0)^2 + \cdots$$

συγκλίνει στον δίσκο $D(z_0;R)$, ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση $g : D(z_0;R) \to \mathbb{C}$. Τότε

$$f(z) = (z-z_0)^N g(z) \qquad \text{για } z \in D(z_0;R), \tag{8.22}$$

οπότε

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^N} \qquad \text{για } z \in D(z_0;R) \setminus \{z_0\}.$$

Η τιμή της g στο z_0 είναι, φυσικά, $g(z_0) = a_N = \frac{f^{(N)}(z_0)}{N!}$, οπότε έχουμε τον διπλό τύπο

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-z_0)^N}, & \text{αν } z \in D(z_0;R) \setminus \{z_0\} \\ \frac{f^{(N)}(z_0)}{N!}, & \text{αν } z = z_0 \end{cases} \tag{8.23}$$

Παρατηρούμε ότι ο τύπος $\frac{f(z)}{(z-z_0)^N}$ ορίζει αναλυτική συνάρτηση σε ολόκληρο το $\Omega \setminus \{z_0\}$ και όχι μόνο στο $D(z_0;R) \setminus \{z_0\}$, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση g είναι ορισμένη σε ολόκληρο το Ω με τον διπλό τύπο

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-z_0)^N}, & \text{αν } z \in \Omega \setminus \{z_0\} \\ \frac{f^{(N)}(z_0)}{N!}, & \text{αν } z = z_0 \end{cases} \tag{8.24}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι αναλυτική σε ολόκληρο το Ω, διότι η $\frac{f(z)}{(z-z_0)^N}$ είναι αναλυτική στο $\Omega \setminus \{z_0\}$ και διότι ο περιορισμός της στον $D(z_0;R)$ είναι απλώς η αρχική συνάρτηση g του διπλού τύπου (8.23), πριν επεκταθεί στο Ω, η οποία είναι αναλυτική στον $D(z_0;R)$ και, επομένως, είναι αναλυτική και στο σημείο z_0. Η συνάρτηση $g : \Omega \to \mathbb{C}$ έχει στον δίσκο $D(z_0;R)$ σειρά Taylor την $a_N + a_{N+1}(z-z_0) + a_{N+2}(z-z_0)^2 + \cdots$.
Συνεχίζοντας στην ίδια περίπτωση, επειδή $g(z_0) = a_N \neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο z_0, υπάρχει κάποιο r με $0 < r \leq R$ έτσι ώστε να ισχύει $g(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D(z_0;r)$, οπότε από την (8.22) έχουμε

$$f(z) \neq 0 \qquad \text{για } z \in D(z_0;r) \setminus \{z_0\}.$$

Βάσει των προηγουμένων, έχουμε τον εξής ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω και έστω $z_0 \in \Omega$ με $f(z_0) = 0$. Επίσης, έστω $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ η σειρά Taylor της f στο σημείο z_0.*
Αν $a_n = 0$ για κάθε n, τότε λέμε ότι το z_0 είναι ρίζα πολλαπλότητας $+\infty$ της f.
Αν $a_0 = a_1 = \ldots = a_{N-1} = 0$ και $a_N \neq 0$, τότε λέμε ότι το z_0 είναι ρίζα πολλαπλότητας N της f.
Στην περίπτωση $f(z_0) = a_0 \neq 0$ λέμε ότι το z_0 είναι ρίζα πολλαπλότητας $N = 0$ της f.

Όπως είδαμε, αν το z_0 είναι ρίζα άπειρης πολλαπλότητας της f, τότε η f είναι ταυτοτικά 0 σε έναν δίσκο με κέντρο z_0 και, μάλιστα, στον μεγαλύτερο τέτοιο δίσκο ο οποίος περιέχεται στο σύνολο αναλυτικότητας της f. Αν το z_0 είναι ρίζα πεπερασμένης πολλαπλότητας της f, τότε υπάρχει κάποιος δίσκος $D(z_0;r)$ στον οποίο η f δεν έχει καμία άλλη ρίζα εκτός του z_0. Σ' αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η ρίζα z_0 είναι **μεμονωμένη**. Μάλιστα, είδαμε ότι αν η πολλαπλότητα της ρίζας z_0 είναι N, τότε η συνάρτηση $g(z) = \frac{f(z)}{(z-z_0)^N}$, η οποία είναι αναλυτική στο $\Omega \setminus \{z_0\}$, μπορεί να οριστεί και στο z_0 με $g(z_0) = a_N = \frac{f^{(N)}(z_0)}{N!}$ και τότε είναι αναλυτική στο Ω.

ΛΗΜΜΑ 8.2. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό και συνεκτικό σύνολο Ω και έστω $z_0 \in \Omega$ με $f(z_0) = 0$. Αν το z_0 είναι ρίζα άπειρης πολλαπλότητας της f, τότε η f είναι ταυτοτικά 0 στο Ω.*

Απόδειξη. Όπως είδαμε προηγουμένως, η f είναι ταυτοτικά 0 σε κάποιον δίσκο κέντρου z_0.
Τώρα ορίζουμε

$$B = \{z \in \Omega \,|\, \text{η } f \text{ είναι ταυτοτικά } 0 \text{ σε κάποιον δίσκο κέντρου } z\}$$

και το συμπληρωματικό σύνολο

$$C = \Omega \setminus B.$$

Προφανώς, τα σύνολα B, C είναι ξένα και η ένωσή τους είναι το Ω. Επίσης, το B δεν είναι κενό διότι περιέχει το z_0.
Αν $z \in B$, τότε η f είναι ταυτοτικά 0 σε κάποιον δίσκο $D(z;r)$, οπότε, αν πάρουμε οποιοδήποτε $w \in D(z;r)$, τότε η f είναι ταυτοτικά 0 σε κάποιο δίσκο $D(w;r')$ ο οποίος είναι αρκετά μικρός ώστε να είναι $D(w;r') \subseteq D(z;r)$. Άρα κάθε $w \in D(z;r)$ ανήκει στο B, οπότε $D(z;r) \subseteq B$ και, επομένως, το z δεν μπορεί να είναι οριακό σημείο του C.
Τώρα, έστω $z \in C$. Τότε η f δεν είναι ταυτοτικά 0 σε *κανένα* δίσκο κέντρου z, οπότε το z δεν είναι ρίζα άπειρης πολλαπλότητας της f. Αφού το z είναι ρίζα πεπερασμένης (μπορεί και μηδενικής) πολλαπλότητας της f, υπάρχει κάποιος δίσκος $D(z;r)$ όπου το μοναδικό σημείο στο οποίο (ίσως) μηδενίζεται η f είναι το z. Προφανώς, αυτός ο δίσκος δεν περιέχει κανένα σημείο w του B διότι η f μηδενίζεται ταυτοτικά σε ολόκληρο δίσκο με κέντρο ένα τέτοιο w. Άρα το z δεν είναι οριακό σημείο του B.
Επομένως, κανένα από τα B, C δεν περιέχει οριακό σημείο του άλλου. Τώρα, το B δεν είναι κενό. Αν το C δεν ήταν κενό, τότε τα B, C θα αποτελούσαν διάσπαση του Ω. Αλλά το Ω είναι συνεκτικό και, επομένως, $C = \emptyset$, δηλαδή $\Omega = B$. Άρα η f μηδενίζεται ταυτοτικά στο Ω. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.6. [Η Αρχή Ταυτότητας] *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό και συνεκτικό σύνολο Ω. Έστω ότι οι ρίζες της f έχουν σημείο συσσώρευσης στο Ω, δηλαδή υπάρχει ακολουθία ριζών (z_n) της f ώστε $z_n \to z$ με $z \in \Omega$ και $z_n \neq z$ για κάθε n. Τότε η f είναι ταυτοτικά 0 στο Ω.*

Απόδειξη. Επειδή η f είναι συνεχής στο z και $z_n \to z$, συνεπάγεται $f(z_n) \to f(z)$. Και, επειδή $f(z_n) = 0$ για κάθε n, συνεπάγεται $f(z) = 0$, οπότε και το z είναι ρίζα της f.
Αν το z ήταν ρίζα πεπερασμένης πολλαπλότητας της f, τότε θα υπήρχε κάποιος δίσκος $D(z;r)$ στον οποίο η μοναδική ρίζα της f θα ήταν το z. Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι στον $D(z;r)$ ανήκουν τελικά οι ρίζες z_n που είναι όλες διαφορετικές από το z.
Άρα το z είναι ρίζα άπειρης πολλαπλότητας της f, οπότε από το Λήμμα 8.2 συνεπάγεται ότι η f είναι ταυτοτικά 0 στο Ω. $\square$

Μια πρώτη παρατήρηση είναι ότι το Λήμμα 8.2 και το Θεώρημα 8.6 μπορούν να διατυπωθούν για γενικό, μη-συνεκτικό, ανοικτό σύνολο Ω. Τότε το αποτέλεσμα του Λήμματος 8.2 ισχύει στην συνεκτική συνιστώσα του Ω η οποία περιέχει την ρίζα άπειρης πολλαπλότητας z_0 και το αποτέλεσμα της αρχής της ταυτότητας ισχύει στην συνεκτική συνιστώσα του Ω η οποία περιέχει το σημείο συσσώρευσης των ριζών της f.

Μια δεύτερη παρατήρηση είναι η εξής. Μιλώντας για τις ρίζες μιας συνάρτησης f, δηλαδή για τις λύσεις της εξίσωσης $f(z) = 0$, προσδίδουμε "τεχνητά" ιδιαίτερη σημασία στην τιμή 0. Δεν είναι, όμως, έτσι. Μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε σταθερό w και να μελετάμε τις λύσεις της εξίσωσης $f(z) = w$. Τα συμπεράσματα είναι ακριβώς ίδια με τα συμπεράσματα για τις ρίζες και τα βρίσκουμε θεωρώντας την συνάρτηση $g(z) = f(z) - w$, οπότε οι λύσεις της $f(z) = w$ είναι οι ίδιες με τις ρίζες της g. Για παράδειγμα, αν το z_0 είναι λύση άπειρης πολλαπλότητας της $f(z) = w$, τότε η f είναι σταθερή w σε ένα δίσκο $D(z_0;R)$ και, αν το z_0 είναι λύση πεπερασμένης πολλαπλότητας N της $f(z) = w$, τότε σε κάποιον δίσκο $D(z_0;r)$ η f παίρνει την τιμή w μόνο στο κέντρο z_0 του δίσκου. Το Λήμμα 8.2 λέει τότε ότι, αν η f είναι αναλυτική στο ανοικτό, συνεκτικό Ω και το z_0 είναι λύση άπειρης πολλαπλότητας της $f(z) = w$, τότε η f είναι σταθερή w στο Ω. Τέλος, η αρχή ταυτότητας λέει ότι αν η f είναι αναλυτική στο ανοικτό, συνεκτικό Ω και αν οι λύσεις της $f(z) = w$ έχουν σημείο συσσώρευσης στο Ω, τότε η f είναι σταθερή w στο Ω.

Ασκήσεις.

8.5.1. Έστω f αναλυτική στον δίσκο $D(z_0;R)$ και έστω ότι το z_0 είναι ρίζα πολλαπλότητας $N \geq 1$ της f. Βρείτε πώς συμπεριφέρεται οποιαδήποτε αντιπαράγωγος F της f στο z_0.

8.5.2. Βρείτε, αν υπάρχει, f αναλυτική στο $\mathbb{C}$ η οποία ικανοποιεί ένα από τα παρακάτω:
(i) $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(ii) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1+(-1)^n}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(iii) $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(iv) $f(\frac{1}{2k}) = f(\frac{1}{2k+1}) = \frac{1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

8.5.3. [α] Υπάρχει f αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ώστε να ισχύει $f(x) = |x|$ για $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
[β] Υπάρχει f αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ώστε να ισχύει $f(x) = \sqrt{x}$ για $x \in (0, +\infty)$;

8.5.4. Έστω f, g αναλυτικές στο ανοικτό και συνεκτικό σύνολο Ω και $0 \in \Omega$. Αν οι f, g δεν μηδενίζονται πουθενά στο Ω και ισχύει

$$f'(\tfrac{1}{n})/f(\tfrac{1}{n}) = g'(\tfrac{1}{n})/g(\tfrac{1}{n})$$

για κάθε n, τί συμπεραίνετε για τη σχέση ανάμεσα στις f, g;

8.6 Μεμονωμένες ανωμαλίες.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω ανοικτό σύνολο Ω και μιγαδική συνάρτηση f. Λέμε ότι το $z_0 \in \Omega$ είναι* **μεμονωμένη ανωμαλία** *της f αν υπάρχει δίσκος $D(z_0; R) \subseteq \Omega$ ώστε η f να είναι ορισμένη και αναλυτική στο $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$.*

Αν το $z_0 \in \Omega$ είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f, τότε στον αντίστοιχο δακτύλιο $D(z_0; 0, R) = D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$ η f παριστάνεται από την σειρά Laurent της:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{για } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}.$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις και τις κωδικοποιούμε με τον εξής ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω ότι το $z_0 \in \Omega$ είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f στο ανοικτό σύνολο Ω και έστω $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$.*
Αν ισχύει $a_n = 0$ για κάθε $n < 0$, τότε λέμε ότι το z_0 είναι **αιρόμενη ανωμαλία** *της f.*
Αν ισχύει $a_n \neq 0$ για τουλάχιστον έναν $n < 0$ και το πλήθος των $n < 0$ για τους οποίους ισχύει $a_n \neq 0$ είναι πεπερασμένο, τότε λέμε ότι το z_0 είναι **πόλος** *της f.*
Αν ισχύει a_n για άπειρους $n < 0$, τότε λέμε ότι το z_0 είναι **ουσιώδης ανωμαλία** *της f.*

Τώρα θα εξετάσουμε καθεμιά από τις τρεις περιπτώσεις. Και αρχίζουμε με την περίπτωση που το $z_0 \in \Omega$ είναι αιρόμενη ανωμαλία της f. Σ' αυτήν την περίπτωση η f γράφεται

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{για } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}.$$

Επομένως, η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ συγκλίνει για κάθε $z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$ και, φυσικά, συγκλίνει και για $z = z_0$, ανεξάρτητα από το αν η f είναι ορισμένη ή όχι στο σημείο z_0. Αυτό σημαίνει ότι η δυναμοσειρά ορίζει αναλυτική συνάρτηση σε ολόκληρο τον δίσκο $D(z_0; R)$. Αν συμβολίσουμε g αυτήν την συνάρτηση, τότε

$$g(z) = \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{για } z \in D(z_0; R).$$

Η τιμή της g στο z_0 είναι $g(z_0) = a_0$ και η g ταυτίζεται με την f στο $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$. Δηλαδή

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & \text{αν } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\} \\ a_0, & \text{αν } z = z_0 \end{cases}$$

Αυτό, απλώς, μας λέει ότι *αν ορίσουμε την f στο σημείο z_0 με τιμή $f(z_0) = a_0$, τότε η f θα ταυτιστεί με την g σε ολόκληρο τον δίσκο $D(z_0; R)$ και, επομένως, θα γίνει αναλυτική σε ολόκληρο τον δίσκο* $D(z_0; R)$. Αν η f δεν ήταν ήδη ορισμένη στο z_0, τότε την ορίζουμε εξ αρχής στο z_0 με τιμή a_0. Αν η f ήταν ήδη ορισμένη στο z_0 και η τιμή της στο z_0 ήταν ίση με a_0, τότε κρατάμε την τιμή a_0 στο z_0 χωρίς αλλαγή. Αν η f ήταν ήδη ορισμένη στο z_0 και η τιμή της στο z_0 ήταν διαφορετική από a_0, τότε αλλάζουμε την τιμή της στο z_0 και την εξισώνουμε με a_0. Συνοψίζουμε:

Αν το $z_0 \in \Omega$ είναι αιρόμενη ανωμαλία της f, τότε η f μπορεί να οριστεί κατάλληλα στο z_0 και να γίνει αναλυτική σε ένα δίσκο με κέντρο z_0. Η σειρά Laurent της f στο z_0 εκφυλίζεται σε δυναμοσειρά πρώτου τύπου και αυτή η δυναμοσειρά είναι η σειρά Taylor της (επεκτεταμένης) f στο z_0.

Τώρα θα δούμε ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο για να αποφασίζουμε αν μια μεμονωμένη ανωμαλία είναι αιρόμενη χωρίς να πρέπει να υπολογίζουμε την σειρά laurent της αντίστοιχης συνάρτησης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.7. **[Το κριτήριο του Riemann]** *Έστω ότι το $z_0 \in \Omega$ είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f στο ανοικτό σύνολο Ω. Αν υπάρχει το $\lim_{z\to z_0} f(z)$ και είναι πεπερασμένο ή, πιο γενικά, αν η f είναι φραγμένη κοντά στο z_0, τότε το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f.*

Απόδειξη. Έστω

$$f(z) = \textstyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad \text{για } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\},$$

και έστω ότι υπάρχει $M \geq 0$ και R_1 με $0 < R_1 \leq R$ ώστε να ισχύει

$$|f(z)| \leq M \qquad \text{για } z \in D(z_0; R_1) \setminus \{z_0\}. \tag{8.25}$$

Θεωρούμε τυχόν r με $0 < r < R_1$ και τυχόν $n < 0$. Τότε

$$a_n = \tfrac{1}{2\pi i} \textstyle\int_{C(z_0;r)} \tfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta,$$

οπότε από την (8.25) έχουμε

$$|a_n| \leq \tfrac{1}{2\pi} \tfrac{M}{r^{n+1}}\, 2\pi r = M r^{-n} = M r^{|n|}.$$

Επειδή $|n| > 0$ και επειδή η τελευταία ανισότητα ισχύει για κάθε r με $0 < r < R_1$, παίρνοντας $r \to 0+$, βρίσκουμε $a_n = 0$. Αυτό ισχύει για τυχόν $n < 0$, οπότε το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f. □

Φυσικά, ισχύει και το αντίστροφο του κριτηρίου του Riemann και αυτό είναι στοιχειώδες. Αν το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f, τότε είδαμε ότι η f μπορεί να οριστεί κατάλληλα στο z_0 και να γίνει αναλυτική σε ένα δίσκο με κέντρο z_0 και, επομένως, συνεχής στο z_0. Άρα το $\lim_{z\to z_0} f(z)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο αφού ισούται με την τιμή $f(z_0)$.

Προσέξτε μια εντυπωσιακή διαφορά με το τι συμβαίνει σε συναρτήσεις μιας *πραγματικής* μεταβλητής. Μπορεί μια συνάρτηση $f(x)$ να είναι παραγωγίσιμη στην ένωση $(x_0 - R, x_0) \cup (x_0, x_0 + R)$ και να είναι ακόμη και συνεχής στο x_0, αλλά να μην είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Απλό παράδειγμα είναι η $f(x) = |x|$ με $x_0 = 0$.

Τώρα πάμε στην περίπτωση που το $z_0 \in \Omega$ είναι πόλος της f. Θεωρούμε την σειρά Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ της f στον κατάλληλο δακτύλιο $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$ και τότε υπάρχει κάποιος μέγιστος $m \geq 1$ ώστε να ισχύει $a_{-m} \neq 0$. Έστω N αυτός ο μέγιστος m. Τότε έχουμε

$$f(z) = \frac{a_{-N}}{(z-z_0)^N} + \frac{a_{-N+1}}{(z-z_0)^{N-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad \text{για } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$$

με $a_{-N} \neq 0$. Η τελευταία σχέση γράφεται, φυσικά,

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^N} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-N} (z-z_0)^n \qquad \text{για } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}.$$

Αφού η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-N}(z-z_0)^n$ συγκλίνει στον δίσκο $D(z_0;R)$, ορίζει μια αναλυτικη συνάρτηση, έστω g, στον $D(z_0;R)$ και ισχύει

$$g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n-N}(z-z_0)^n \qquad \text{για } z\in D(z_0;R)$$

και

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^N} \qquad \text{για } z\in D(z_0;R)\setminus\{z_0\}.$$

Προσέξτε ότι

$$g(z_0)=a_{-N}\neq 0.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω ότι το $z_0\in\Omega$ είναι πόλος της f και έστω N ο μέγιστος $m\geq 1$ για τον οποίο ισχύει $a_{-m}\neq 0$. Τότε λέμε ότι το z_0 είναι πόλος τάξης N ή πολλαπλότητας N της f.*

Είδαμε ότι, αν το z_0 είναι πόλος τάξης N της f στο ανοικτό σύνολο Ω, τότε υπάρχει συνάρτηση g η οποία είναι αναλυτική σε κάποιον δίσκο $D(z_0;R)\subseteq\Omega$ και ισχύει

$$g(z_0)\neq 0 \qquad \text{και} \qquad f(z)=\tfrac{g(z)}{(z-z_0)^N} \quad \text{για } z\in D(z_0;R)\setminus\{z_0\}. \tag{8.26}$$

Είναι εύκολο να δούμε και το αντίστροφο. Πράγματι έστω ότι η g είναι αναλυτική στον $D(z_0;R)$ και ότι ισχύουν αυτά που είναι στην (8.26). Θεωρούμε τη σειρά Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n$ της g και για $z\in D(z_0;R)\setminus\{z_0\}$ έχουμε

$$f(z)=\tfrac{g(z)}{(z-z_0)^N}=\tfrac{1}{(z-z_0)^N}\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n=\tfrac{b_0}{(z-z_0)^N}+\cdots+\tfrac{b_{N-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{+\infty} b_{n+N}(z-z_0)^n.$$

Επομένως, η τελευταία δυναμοσειρά είναι η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(z_0;R)\setminus\{z_0\}$ και επειδή $b_0=g(z_0)\neq 0$, το z_0 είναι πόλος τάξης N της f.

Παράδειγμα 8.6.1. Πολλές φορές προκύπτουν συναρτήσεις της μορφής

$$f(z)=\tfrac{g(z)}{h(z)},$$

όπου οι g,h είναι αναλυτικές στο ανοικτό σύνολο Ω και θέλουμε να δούμε πώς συμπεριφέρεται η f σε κάποιο $z_0\in\Omega$.
Για καθεμιά από τις g και h θεωρούμε το z_0 ότι είναι ρίζα της με την αντίστοιχη πολλαπλότητα M και N. Φυσικά, μπορεί το z_0 να μην είναι ρίζα κάποιας από τις g,h, οπότε ο αντίστοιχος από τους M,N είναι ίσος με 0. Τώρα, είδαμε ότι υπάρχουν αναλυτικές συναρτήσεις g_1 και h_1 στο Ω με

$$g(z)=(z-z_0)^M g_1(z), \quad h(z)=(z-z_0)^N h_1(z) \qquad \text{για } z\in\Omega$$

και

$$g_1(z_0)\neq 0, \qquad h_1(z_0)\neq 0.$$

(Φυσικά, εξετάζουμε την περίπτωση που καμιά από τις g,h δεν είναι ταυτοτικά μηδέν.)
Τότε υπάρχει κάποιο $r>0$ ώστε να ισχύει $g_1(z)\neq 0$ και $h_1(z)\neq 0$ για $z\in D(z;r)$, οπότε έχουμε

$$f(z)=\tfrac{g(z)}{h(z)}=(z-z_0)^{M-N}\tfrac{g_1(z)}{h_1(z)}=(z-z_0)^{M-N}F(z) \qquad \text{για } z\in D(z_0;r)\setminus\{z_0\},$$

όπου η συνάρτηση $F(z)=\frac{g_1(z)}{h_1(z)}$ είναι αναλυτική στον $D(z_0;r)$ και $F(z_0)=\frac{g_1(z_0)}{h_1(z_0)}\neq 0$.
Και τώρα συμπεραίνουμε ότι (i) αν $M>N$, τότε η f είναι αναλυτική στο z_0 και το z_0 είναι ρίζα πολλαπλότητας $M-N$ της f, (ii) αν $M=N$, τότε η f είναι αναλυτική στο z_0 και το z_0 δεν είναι ρίζα της f και (iii) αν $M<N$, τότε το z_0 είναι πόλος τάξης $N-M$ της f.

Για τους πόλους έχουμε ένα κριτήριο παρόμοιο με το κριτήριο του Riemann για τις αιρόμενες ανωμαλίες.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.16. *Έστω ότι το $z_0 \in \Omega$ είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f στο ανοικτό σύνολο Ω. Τότε το z_0 είναι πόλος της f αν και μόνο αν $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.*

Απόδειξη. Επειδή το $z_0 \in \Omega$ είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f στο ανοικτό σύνολο Ω, υπάρχει δίσκος $D(z_0; R) \subseteq \Omega$ ώστε η f να είναι αναλυτική στο $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$.
Αν το z_0 είναι πόλος τάξης N της f, τότε είδαμε ότι υπάρχει συνάρτηση g η οποία είναι αναλυτική σε κάποιον δίσκο $D(z_0; R) \subseteq \Omega$ και ισχύει

$$g(z_0) \neq 0 \qquad \text{και} \qquad f(z) = \tfrac{g(z)}{(z-z_0)^N} \quad \text{για } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}.$$

Από αυτό συνεπάγεται αμέσως ότι $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.
Αντιστρόφως, έστω $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.
Τότε υπάρχει r με $0 < r \leq R$ ώστε να ισχύει $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in D(z_0; r) \setminus \{z_0\}$. Άρα η συνάρτηση

$$h(z) = \tfrac{1}{f(z)} \qquad \text{για } \ z \in D(z_0; r) \setminus \{z_0\} \tag{8.27}$$

είναι αναλυτική στον δακτύλιο $D(z_0; r) \setminus \{z_0\}$. Επειδή $\lim_{z \to z_0} h(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$, από το κριτήριο του Riemann έχουμε ότι το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της h, οπότε, αν ορίσουμε κατάλληλα την h στο z_0 θα γίνει αναλυτική στον δίσκο $D(z_0; r)$. Επειδή η h θα πρέπει να είναι τουλάχιστον συνεχής στο z_0, θα πρέπει να ορίσουμε $h(z_0) = \lim_{z \to z_0} h(z) = 0$. Άρα η

$$h(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & \text{αν } z \in D(z_0; r) \setminus \{z_0\} \\ 0, & \text{αν } z = z_0 \end{cases}$$

είναι αναλυτική στον δίσκο $D(z_0; r)$.
Είναι προφανές ότι το z_0 είναι η μοναδική ρίζα της h στον $D(z_0; r)$ και, αν N είναι η πολλαπλότητα αυτής της ρίζας, τότε έχουμε

$$h(z) = (z - z_0)^N h_1(z) \qquad \text{για } z \in D(z_0; r), \tag{8.28}$$

όπου η h_1 είναι αναλυτική στον $D(z_0; r)$ και δεν έχει καμία ρίζα στον $D(z_0; r)$. Άρα η συνάρτηση

$$g(z) = \tfrac{1}{h_1(z)} \qquad \text{για } z \in D(z_0; r) \tag{8.29}$$

είναι αναλυτική στον $D(z_0; r)$ και, προφανώς, δεν μηδενίζεται πουθενά στον $D(z_0; r)$.
Τώρα, όμως, από τις (8.27), (8.28) και (8.29) έχουμε

$$f(z) = \tfrac{g(z)}{(z-z_0)^N} \qquad \text{για } z \in D(z_0; r) \setminus \{z_0\}$$

με $g(z_0) \neq 0$. Άρα το z_0 είναι πόλος τάξης N της f. □

Και, τέλος, για την περίπτωση ουσιώδους ανωμαλίας έχουμε το εξής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 8.17. *Έστω ότι το $z_0 \in \Omega$ είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f στο ανοικτό σύνολο Ω. Τότε το z_0 είναι ουσιώδης ανωμαλία της f αν και μόνο αν το $\lim_{z \to z_0} f(z)$ δεν υπάρχει.*

Απόδειξη. Από το κριτήριο του Riemann και το αντίστροφό του έχουμε ότι το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία αν και μόνο αν το $\lim_{z \to z_0} f(z)$ υπάρχει και είναι αριθμός. Στην Πρόταση 8.16 είδαμε ότι το z_0 είναι πόλος αν και μόνο αν το $\lim_{z \to z_0} f(z)$ υπάρχει και είναι ∞. Άρα το συμπέρασμα είναι άμεσο. □

Ασκήσεις.

8.6.1. Είναι το σημείο 0 μεμονωμένη ανωμαλία της $\frac{1}{\sin(1/z)}$;

8.6.2. Βρείτε τα σημεία μεμονωμένης ανωμαλίας των:

$$\tfrac{1}{z^2+5z+6},\quad \tfrac{1}{(z^2-1)^2},\quad \tfrac{1}{\sin\pi z},\quad \cot\pi z,\quad \tfrac{1}{\sin^2\pi z},\quad e^{1/z},\quad e^z+e^{1/z},\quad \tfrac{1}{e^z-1}.$$

Κατατάξτε τα σημεία αυτά σε πόλους και σε ουσιώδεις ανωμαλίες και βρείτε τα μη-αναλυτικά μέρη των αντίστοιχων σειρών Laurent και τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα.

8.6.3. Αποδείξτε ότι μια μεμονωμένη ανωμαλία της $f(z)$ δεν μπορεί να είναι πόλος της $e^{f(z)}$.

8.6.4. Έστω z_0 μεμονωμένη ανωμαλία της f, η οποία δεν είναι σταθερή συνάρτηση κοντά στο z_0. Αν υπάρχει $s\in\mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{z\to z_0}|z-z_0|^s|f(z)|\in[0,+\infty],$$

αποδείξτε ότι το z_0 είναι είτε αιρόμενη ανωμαλία είτε πόλος της f και ότι υπάρχει $m\in\mathbb{Z}$ ώστε

$$\lim_{z\to z_0}|z-z_0|^s|f(z)|\begin{cases}=0, & \text{αν } s>m\\ =+\infty, & \text{αν } s<m\\ \in(0,+\infty), & \text{αν } s=m\end{cases}$$

8.6.5. Έστω ότι η f είναι αναλυτική στο $D(z_0;R)\setminus\{z_0\}$ και έστω ότι η $\mathrm{Re}\,f$ ή η $\mathrm{Im}\,f$ είναι άνω φραγμένη ή κάτω φραγμένη στο $D(z_0;R)\setminus\{z_0\}$. Αποδείξτε ότι το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f.

Υπόδειξη: Έστω $\mathrm{Re}\,f(z)\le M$ για $0<|z-z_0|<R$. Χρησιμοποιήστε το κριτήριο του Riemann στη συνάρτηση $\frac{f(z)-M+1}{f(z)-M-1}$.

8.6.6. Έστω ότι η f είναι αναλυτική στο $D(0;R)\setminus\{z_0\}$, όπου $R>1$ και $|z_0|=1$. Έστω ότι το z_0 είναι πόλος της f. Αν

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$$

είναι η σειρά Taylor της f στον $D(0;1)$, αποδείξτε ότι

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\to z_0.$$

Υπόδειξη: Είναι $f(z)=$ πολυώνυμο του $\frac{1}{z-z_0}+$ αναλυτική συνάρτηση στον $D(0;R)$.

8.6.7. Έστω ανοικτό και συνεκτικό σύνολο Ω ώστε κάθε σημείο του Ω είναι είτε σημείο αναλυτικότητας είτε μεμονωμένη ανωμαλία της συνάρτησης f. Αν οι ρίζες της f έχουν σημείο συσσώρευσης στο Ω, το οποίο δεν είναι ουσιώδης ανωμαλία της f, αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή 0 στο Ω. (Επομένως, δεν υπάρχει καμιά μεμονωμένη ανωμαλία της f.)

8.7 Το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων και πορίσματα.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω ότι το $z_0\in\Omega$ είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f στο ανοικτό σύνολο Ω και έστω $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$ η σειρά Laurent της f στον δακτύλιο $D(z_0;R)\setminus\{z_0\}$. Τότε ο συντελεστής a_{-1} ονομάζεται* **ολοκληρωτικό υπόλοιπο** *της f στο z_0 και συμβολίζεται*

$$\mathit{Res}\,(f;z_0)=a_{-1}.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\mathrm{Res}\,(f;z_0)=a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)}f(\zeta)\,d\zeta\qquad \text{για }\ 0<r<R.$$

Αν το z_0 είναι αιρόμενη ανωμαλία της f, οπότε η f μπορεί να θεωρηθεί, εκ των υστέρων, αναλυτική στο z_0, τότε ισχύει $a_n=0$ για κάθε $n<0$ και, επομένως και για $n=-1$, οπότε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0 είναι μηδέν. Μπορεί, όμως, το z_0 να είναι πόλος ή και ουσιώδης ανωμαλία της f και το ολοκληρωτικό υπόλοιπο να είναι μηδέν.

Παράδειγμα 8.7.1. Κάθε συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^N}$ με $N \geq 2$ έχει ολοκληρωτικό υπόλοιπο ίσο με 0 στο z_0.

Αυτό ισχύει διότι είναι προφανές ότι η σειρά Laurent της f στο z_0 αποτελείται από έναν μόνο όρο, τον $\frac{1}{(z-z_0)^N}$, οπότε ο συντελεστής του $\frac{1}{z-z_0}$ είναι ίσος με 0. Αλλά και από το παράδειγμα 6.1.4 γνωρίζουμε ότι

$$\text{Res}\,(f; z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} f(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0;r)} \frac{1}{(\zeta-z_0)^N}\,d\zeta = 0.$$

Παράδειγμα 8.7.2. Αν το z_0 είναι πόλος της f στο ανοικτό σύνολο Ω, τότε μπορούμε να βρούμε "σχετικά εύκολα" το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0. Είδαμε ότι, αν το z_0 είναι πόλος τάξης N, τότε υπάρχει συνάρτηση g αναλυτική σε κάποιον δίσκο $D(z_0; R) \subseteq \Omega$ και ισχύει

$$g(z_0) \neq 0 \qquad \text{και} \qquad f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^N} \quad \text{για } z \in D(z_0; R) \setminus \{z_0\}.$$

Αν η f δίνεται σ' αυτήν την μορφή, τότε αναπτύσσοντας την σειρά Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-z_0)^n$ της g, όπως κάναμε αμέσως μετά την (8.26), βλέπουμε ότι

$$\text{Res}\,(f; z_0) = b_{N-1} = \frac{g^{(N-1)}(z_0)}{(N-1)!}.$$

Για παράδειγμα, αν το z_0 είναι πόλος τάξης 1, τότε $\text{Res}\,(f; z_0) = g(z_0)$ και, αν το z_0 είναι πόλος τάξης 2, τότε $\text{Res}\,(f; z_0) = g'(z_0)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8.8. [**Θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων**] *Έστω ότι η f είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο Ω εκτός από μεμονωμένες ανωμαλίες στο Ω. Επίσης, έστω κύκλος Σ στο Ω ομόλογος του μηδενός στο Ω και τέτοιος ώστε καμιά από τις τροχιές των κλειστών καμπυλών που αποτελούν τον Σ να μην περιέχει μεμονωμένη ανωμαλία της f. Τότε ισχύει $n(\Sigma; z) \neq 0$ για το πολύ πεπερασμένου πλήθους μεμονωμένες ανωμαλίες z της f, οπότε το άθροισμα $\sum_{z \text{ μ. α. της } f} n(\Sigma; z)\,\text{Res}\,(f; z)$ (όπου μ. α. σημαίνει μεμονωμένη ανωμαλία) είναι πεπερασμένο και*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma} f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{z \text{ μ. α. της } f} n(\Sigma; z)\,\text{Res}\,(f; z).$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει $n(\Sigma; z) \neq 0$ για άπειρες μεμονωμένες ανωμαλίες z της f στο Ω. Τότε μπορούμε να επιλέξουμε μια ακολουθία (z_n) από μεμονωμένες ανωμαλίες της f στο Ω, όλες διαφορικές ανά δύο, ώστε να ισχύει $n(\Sigma; z_n) \neq 0$ για κάθε n. Επειδή οι τροχιές των πεπερασμένου πλήθους καμπυλών που αποτελούν τον Σ είναι συμπαγή σύνολα, υπάρχει κάποιος μεγάλος δίσκος $D(0; R)$ ο οποίος περιέχει όλες αυτές τις τροχιές. Δηλαδή ο κύκλος Σ είναι στον $D(0; R)$ οπότε είναι σαφές ότι ισχύει $n(\Sigma; z) = 0$ για κάθε z εκτός του $D(0; R)$. Άρα ολόκληρη η ακολουθία (z_n) είναι μέσα στον δίσκο $D(0; R)$, δηλαδή είναι φραγμένη. Από το θεώρημα Bolzano - Weierstrass συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποια υποακολουθία (z_{n_k}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο z. Επειδή η (z_{n_k}) είναι στο Ω, το z είναι οριακό σημείο του Ω και διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

Το z είναι εσωτερικό σημείο του Ω. Τότε είτε η f είναι αναλυτική στο z είτε το z είναι σημείο μεμονωμένης ανωμαλίας της f. Σε κάθε περίπτωση θα υπάρχει κάποιος δακτύλιος $D(z; R) \setminus \{z\}$ στον οποίο η f είναι αναλυτική και, επομένως, σ' αυτόν δεν θα υπάρχει καμιά μεμονωμένη ανωμαλία της f. Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι η (z_{n_k}) αποτελείται από μεμονωμένες ανωμαλίες της f οι οποίες συγκλίνουν στο z και είναι διαφορετικές ανά δύο, οπότε θα βρίσκονται τελικά στον δακτύλιο $D(z; R) \setminus \{z\}$.

Το z είναι συνοριακό σημείο του Ω και, επομένως, δεν ανήκει στο Ω, αφού το Ω είναι ανοικτό. Επειδή ο Σ είναι ομόλογος του μηδενός στο Ω, συνεπάγεται $n(\Sigma; z) = 0$. Τώρα, μπορούμε να βρούμε έναν δίσκο $D(z; r)$ αρκετά μικρό ώστε να μην τέμνει καμιά από τις τροχιές των καμπυλών που αποτελούν τον Σ. Αυτό ισχύει διότι όλες αυτές οι τροχιές είναι κλειστά σύνολα και δεν περιέχουν το z (που είναι εκτός του Ω). Επειδή ο $D(z; r)$ είναι συνεκτικό σύνολο και γνωρίζουμε ότι "σε συνεκτικό υποσύνολο του συμπληρώματος της τροχιάς καμπύλης ο δείκτης στροφής της καμπύλης ως προς σημείο είναι σταθερή συνάρτηση του σημείου στο συνεκτικό αυτό υποσύνολο", συνεπάγεται ότι ο δείκτης στροφής του Σ είναι μηδέν ως προς κάθε σημείο του $D(z;r)$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, διότι η (z_{n_k}) συγκλίνει στο z, οπότε τελικά τα z_{n_k} είναι μέσα στον $D(z;r)$ και ισχύει $n(\Sigma;z_{n_k}) \neq 0$ για κάθε k.

Άρα σε κάθε περίπτωση καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε ισχύει $n(\Sigma;z) \neq 0$ για το πολύ πεπερασμένου πλήθους μεμονωμένες ανωμαλίες z της f στο Ω. Επομένως και το άθροισμα

$$\textstyle\sum_{z \text{ μ. α. της } f} n(\Sigma;z)\,\mathrm{Res}\,(f;z)$$

είναι πεπερασμένο.

Τώρα συμβολίζουμε $z_1, \dots, z_n$ τις μεμονωμένες ανωμαλίες της f στο Ω για τις οποίες ισχύει $n(\Sigma;z_k) \neq 0$ για $k = 1, \dots, n$. Δηλαδή ισχύει $n(\Sigma;z) = 0$ για κάθε άλλη μεμονωμένη ανωμαλία z της f στο Ω.

Ορίζουμε τους ακέραιους

$$p_1 = n(\Sigma;z_1), \dots, p_n = n(\Sigma;z_n)$$

και τότε. προφανώς,

$$\textstyle\sum_{z \text{ μ. α. της } f} n(\Sigma;z)\,\mathrm{Res}\,(f;z) = \sum_{z\in\{z_1,\dots,z_n\}} n(\Sigma;z)\,\mathrm{Res}\,(f;z) = \sum_{k=1}^n p_k\,\mathrm{Res}\,(f;z_k).$$

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\tfrac{1}{2\pi i}\textstyle\int_\Sigma f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{k=1}^n p_k\,\mathrm{Res}\,(f;z_k). \tag{8.30}$$

Τώρα, επειδή κάθε ανωμαλία $z_1, \dots, z_n$ είναι μεμονωμένη, μπορούμε να βρούμε μικρούς κλειστούς δίσκους $\overline{D}(z_k;r_k)$ για $k = 1, \dots, n$ ώστε καθένας από αυτούς να μην περιέχει καμιά ανωμαλία της f εκτός από αυτήν που είναι στο κέντρο του. Συμβολίζουμε γ_k την κλειστή καμπύλη που διαγράφει μια φορά με τη θετική κατεύθυνση την περιφέρεια $C(z_k;r_k)$ και σχηματίζουμε τον κύκλο Σ' ο οποίος αποτελείται από τον Σ (δηλαδή από τις κλειστές καμπύλες που αποτελούν τον Σ με τις ίδιες πολλαπλότητες) και από τις κλειστές καμπύλες $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ με αντίστοιχες πολλαπλότητες $-p_1, \dots, -p_n$. Τέλος θεωρούμε το ανοικτό σύνολο

$$\Omega' = \Omega \setminus \{z \in \Omega \,|\, z \text{ μ. α. της } f\}.$$

Προφανώς, η f είναι αναλυτική στο Ω'.

Θα αποδείξουμε ότι ο κύκλος Σ' είναι ομόλογος του μηδενός στο Ω', δηλαδή ότι $n(\Sigma';z) = 0$ για κάθε $z \notin \Omega'$. Διακρίνουμε τα σημεία $z \notin \Omega'$ σε τρεις κατηγορίες: τα $z \notin \Omega$, τις μεμονωμένες ανωμαλίες $z_1, \dots, z_n$ και τις υπόλοιπες μεμονωμένες ανωμαλίες.

Αν $z \notin \Omega$, τότε ισχύει $n(\Sigma;z) = 0$ (επειδή ο Σ είναι ομόλογος του μηδενός στο Ω) και ισχύει $n(\gamma_k;z) = 0$ για κάθε $k = 1, \dots, n$ (αφού οι δίσκοι $\overline{D}(z_k;r_k)$ περιέχονται στο Ω και το z δεν ανήκει στο Ω, οπότε είναι εκτός όλων αυτών των δίσκων). Άρα για κάθε $z \notin \Omega$ έχουμε

$$n(\Sigma';z) = n(\Sigma;z) - p_1 n(\gamma_1;z) - \cdots - p_n n(\gamma_n;z) = 0 - p_1 0 - \cdots - p_n 0 = 0.$$

Αν $z = z_{k_0}$ για κάποιον $k_0 = 1, \dots, n$, τότε $n(\Sigma;z) = n(\Sigma;z_{k_0}) = p_{k_0}$ και $n(\gamma_{k_0};z) = n(\gamma_{k_0};z_{k_0}) = 1$ και $n(\gamma_k;z) = n(\gamma_k;z_{k_0}) = 0$ για κάθε $k = 1, \dots k_0 - 1, k_0 + 1, \dots n$. Επομένως

$$\begin{aligned} n(\Sigma';z) &= n(\Sigma;z) - p_1 n(\gamma_1;z) - \cdots - p_{k_0-1} n(\gamma_{k_0-1};z) \\ &\qquad - p_{k_0} n(\gamma_{k_0};z) - p_{k_0+1} n(\gamma_{k_0+1};z) - \cdots - p_n n(\gamma_n;z) \\ &= p_{k_0} - p_1 0 - \cdots - p_{k_0-1} 0 - p_{k_0} 1 - p_{k_0+1} 0 - \cdots - p_n 0 = 0. \end{aligned}$$

Δηλαδή ισχύει $n(\Sigma';z) = 0$ για κάθε $z = z_1, \dots, z_n$.

Τέλος, έστω μεμονωμένη ανωμαλία z της f στο Ω διαφορετική από κάθε $z_1, \dots, z_n$. Τότε είναι $n(\Sigma;z) = 0$ και $n(\gamma_k;z) = 0$ για κάθε $k = 1, \dots, n$. Άρα

$$n(\Sigma';z) = n(\Sigma;z) - p_1 n(\gamma_1;z) - \cdots - p_n n(\gamma_n;z) = 0 - p_1 0 - \cdots - p_n 0 = 0.$$

Συνολικά, έχουμε αποδείξει ότι ισχύει $n(\Sigma'; z) = 0$ για κάθε $z \notin \Omega'$, οπότε, πράγματι, ο Σ' είναι ομόλογος του μηδενός στο Ω'.
Επειδή η f είναι αναλυτική στο Ω', από το σφαιρικό θεώρημα του Cauchy συνεπάγεται

$$\int_{\Sigma'} f(\zeta)\, d\zeta = 0$$

ή, ισοδύναμα,

$$\int_{\Sigma} f(\zeta)\, d\zeta - \sum_{k=1}^{n} p_k \int_{\gamma_k} f(\zeta)\, d\zeta = 0$$

ή, ισοδύναμα,

$$\int_{\Sigma} f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{k=1}^{n} p_k \int_{\gamma_k} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} p_k \mathrm{Res}\,(f; z_k),$$

διότι $\int_{\gamma_k} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{C(z_k; r_k)} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \mathrm{Res}\,(f; z_k)$.
Έτσι τέλειωσε η απόδειξη της (8.30). □

Ασκήσεις.

8.7.1. Αν $f(z) = e^{z+(1/z)}$, αποδείξτε ότι

$$\mathrm{Res}\,(f; 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}.$$

Υπόδειξη: Γράψτε $\mathrm{Res}\,(f; 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0;1)} f(z)\, dz$ και σκεφτείτε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n! z^n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $e^{1/z}$ στον $C(0; 1)$.

8.7.2. Αν $f = gh$, η g είναι αναλυτική στο z_0 και η h έχει απλό πόλο στο z_0, αποδείξτε ότι

$$\mathrm{Res}\,(f; z_0) = g(z_0)\, \mathrm{Res}\,(h; z_0).$$

8.7.3. Αν $n \in \mathbb{N}$ και $\gamma(t) = ne^{it}$ για $t \in [0, 2\pi]$, υπολογίστε το

$$\int_{\gamma} \tan(\pi z)\, dz.$$

8.7.4. Αν $z_1, \dots, z_n \in D(0; R)$, η f είναι αναλυτική σε ένα ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχει τον $\overline{D}(0; R)$ και $\gamma(t) = Re^{it}$ για $t \in [0, 2\pi]$, υπολογίστε το

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_n)}\, dz.$$

8.7.5. Έστω f αναλυτική στο απλά συνεκτικό ανοικτό σύνολο Ω εκτός από μεμονωμένες ανωμαλίες στο Ω. Αποδείξτε ότι τα (i), (ii) είναι ισοδύναμα:
(i) $e^{\int_{\gamma} f(z)\, dz} = 1$ για κάθε κλειστή καμπύλη γ στο Ω η τροχιά της οποίας δεν περιέχει καμία μεμονωμένη ανωμαλία της f.
(ii) $\mathrm{Res}\,(f; z) \in \mathbb{Z}$ για κάθε μεμονωμένη ανωμαλία z της f στο Ω.
Αν η f ικανοποιεί τα (i), (ii) και είναι αναλυτική στο $z_0 \in \Omega$, ορίζουμε

$$F(z) = e^{\int_{\gamma} f(\zeta)\, d\zeta} \qquad \text{για } z \in \Omega,$$

όπου γ είναι οποιαδήποτε καμπύλη στο Ω με αρχικό άκρο z_0 και τελικό άκρο z και δεν διέρχεται από καμία μεμονωμένη ανωμαλία της f.

Αποδείξτε ότι η F είναι καλώς ορισμένη και αναλυτική στο Ω εκτός από τις μεμονωμένες ανωμαλίες της f.

Αποδείξτε ότι κάθε σημείο του Ω είναι είτε σημείο αναλυτικότητας της F είτε πόλος της F αν και μόνο αν όλες οι μεμονωμένες ανωμαλίες της f στο Ω είναι απλοί πόλοι της f.