ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ Θ. ΟΛΟΚΛ. ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ

Ι. Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα

ολοκληρώματα της μορφής

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt, \qquad (1)$$

όπου $R(u,v)$ ρητή συνάρτηση 2 μεταβλητών u, v.

Το ολοκλ. (1) μετασχηματίζεται σε μιγαδικό ολοκλ. πάνω στον κύκλο

$$\gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

ως εξής:

Θέτουμε $z = e^{it}$, οπότε $\bar{z} = 1/z$ κ'

$$\cos t = Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),$$

$$\sin t = Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

$$dz = i e^{it} dt = iz\,dt$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{aligned} \cos t &= \frac{z^2+1}{2z} \\ \sin t &= \frac{z^2-1}{2iz} \\ dt &= \frac{dz}{iz} \end{aligned} \right\} \qquad (2)$$

$$(1) \overset{(2)}{\Longrightarrow}$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt = \int_\gamma R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz}.$$

Παραδείγματα:

(i) $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+4\sin t} = ?$

$$I = \int_\gamma \frac{dz/iz}{5+4\frac{z^2-1}{2iz}} = \int_\gamma \frac{dz}{2z^2+5iz-2}$$

όπου $\gamma(t) = e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$

$$2z^2+5iz-2 = 2z^2+4iz+iz-2$$

$$= 2z(z+2i)+i(z+2i) = (z+2i)(2z+i)$$

ρίζες: $-2i$, $-i/2$

Μόνο η $-i/2 \in \operatorname{int}\gamma^*$

$$\Longrightarrow \quad I = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -i/2),$$

όπου $f(z) = \frac{1}{2z^2+5iz-2}$.

Το $-i/2$ είναι απλός πόλος της f

$$\Longrightarrow I = 2\pi i \left.\frac{1}{4z+5i}\right|_{z=-i/2} = \underline{\underline{2\pi/3}}.$$

(ii) $I = \int_0^{\pi} \frac{dt}{(3+\cos t)^2} = ?$

Είναι $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{dt}{(3+\cos t)^2} \overset{\xi = 2\pi - t}{=} \int_{\pi}^{0} \frac{(-d\xi)}{(3+\cos\xi)^2} = I$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3+\cos t)^2} = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} = 2I$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3+\cos t)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{\frac{dz}{iz}}{\left(3+\frac{z^2+1}{2z}\right)^2} = \frac{2}{i}\int_\gamma \frac{z}{(z^2+6z+1)^2}\,dz$$

$z^2+6z+1=0 \Leftrightarrow z_{1,2} = -3 \pm 2\sqrt{2}$

Μόνο η $z_1 = -3+2\sqrt{2} \in \operatorname{int}\gamma^*$

$$\Rightarrow I = \frac{2}{i}\, 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), z_1]$$

$$= 4\pi \operatorname{Res}[f(z), z_1],$$

όπου $$f(z) = \frac{z}{(z^2+6z+1)^2} = \frac{z}{(z-z_1)^2(z-z_2)^2}.$$

Το z_1 είναι διπλός πόλος της f, οπότε

$$\mathrm{Res}[f(z), z_1] = \lim_{z\to z_1}\left[(z-z_1)^2 f(z)\right]'$$

$$= \lim_{z\to z_1}\left[\frac{z}{(z-z_2)^2}\right]'$$

$$= \lim_{z\to z_1}\left[\frac{1}{z-z_2} + z_2\frac{1}{(z-z_2)^2}\right]'$$

$$= -\frac{1}{(z-z_2)^2} - \frac{2z_2}{(z-z_2)^3}\Bigg|_{z=z_1}$$

$$= -\frac{z_1+z_2}{(z_1-z_2)^3} = -\frac{-6}{(4\sqrt{2})^3}$$

$$= \frac{6}{4^3\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{3}{64\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad I = 4\pi\frac{3}{64\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{16\sqrt{2}}.$$

ΙΙ. Γενικευμένα ολοκληρώματα της μορφής $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\, dt$,

όπου P, Q πολυώνυμα τέτοια ώστε

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ Q(t) \neq 0,\ \forall t \in \mathbb{R} \\ \bullet\ \deg Q - \deg P \geq 2. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Θεώρημα ΙΙ.1: Εάν ισχύουν οι (3), τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\, dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{\nu} \operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_k\right],$$

όπου $z_1, z_2, \dots, z_\nu \in \mathbb{C}$ οι ρίζες του Q με θετικό Im.

Παράδειγμα:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\, dt = ?$$

$P(z) = z^2$, $Q(z) = 1+z^4$, $Q(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\deg Q - \deg P = 4 - 2 = 2$$

Ρίζες του Q: $\pm a$, $\pm \bar{a}$, $a = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

Μόνο οι a, $-\bar{a}$ έχουν $\operatorname{Im} > 0$

$$\xRightarrow{\text{Θ.ΙΙ.1}} \quad I = 2\pi i \left[\operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, a\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, -\bar{a}\right)\right].$$

$\forall \rho \in \{a, -\bar{a}\}$, $P(\rho) \neq 0$, $Q(\rho) = 0$, $Q'(\rho) \neq 0$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, \rho\right) = \frac{P(\rho)}{Q'(\rho)} = \frac{\rho^2}{4\rho^3}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{\rho} = \frac{\bar{\rho}}{4}$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i \cdot \frac{1}{4}\left(\bar{a} + \overline{-\bar{a}}\right) = \frac{\pi i}{2}\left(\bar{a} - a\right)$$

$$= -\frac{\pi i}{2}(a - \bar{a}) = -\frac{\pi i}{2} 2i \operatorname{Im}(a)$$

$$= \pi / \sqrt{2}.$$

III. Γενικευμένα ολοκληρώματα Fourier:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{i\lambda t} dt, \quad \lambda > 0$$

όπου P, Q πολυώνυμα με

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \ Q(t) \neq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}. \\ \cdot \ \deg Q - \deg P \geq 1 \end{array}\right\} (4)$$

Θεώρημα III.1. Εάν ισχύουν οι (4), τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{i\lambda t} dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{\nu} \operatorname{Res}(f, z_k), \text{ όπου}$$

$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}$, $z_k, 1 \leq k \leq \nu$, οι ρίζες του Q με $\operatorname{Im} > 0$.

Παραδείγματα:

(i) $$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\pi t)}{t^2-2t+2}\, dt = ?$$

Είναι $I = Re(J)$, όπου

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2-2t+2} e^{i\pi t} dt.$$

$P(z)=1$, $Q(z) = z^2-2z+2$, $Q(t) \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$Q(z) = 0 \Leftrightarrow z = a$ ή $\bar{a}$, $a = 1+i$.

Επειδή $Im(a) > 0$, έχουμε

$$J \underset{=}{\overset{\Theta.\text{III}.1}{=}} 2\pi i \, Res\left(\frac{e^{i\pi z}}{z^2-2z+2}, a\right)$$

$$= 2\pi i \left.\frac{e^{i\pi z}}{2z-2}\right|_{z=a}$$

$$= 2\pi i \frac{e^{i\pi a}}{2(a-1)} = \pi i \frac{e^{\pi(-1+i)}}{i}$$

$$= \pi \cdot e^{-\pi} \cdot e^{i\pi} = -\pi e^{-\pi}.$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{I = -\pi e^{-\pi}.}$$

(ii) $$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3 \sin t}{(1+t^2)^2}\, dt = ?$$

$$I = \mathrm{Im}(J), \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^2)^2} e^{it}\, dt.$$

$P(z) = z^3$, $Q(z) = (1+z^2)^2$, $\deg Q - \deg P = 1.$

Ρίζες του Q: $\pm i$, $\mathrm{Im}(i) > 0$

$\Longrightarrow J = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f(z), i)$, όπου

$f(z) = \dfrac{z^3 e^{iz}}{(1+z^2)^2}$. Το i είναι διπλός πόλος της f, οπότε

$$\mathrm{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} \left[(z-i)^2 \frac{z^3 e^{iz}}{(z-i)^2 (z+i)^2} \right]'$$

$$= \lim_{z \to i} \left[\frac{z^3 e^{iz}}{(z+i)^2} \right]'$$

$$= \left. \frac{(3z^2 e^{iz} + i z^3 e^{iz})(z+i) - 2z^3 e^{iz}}{(z+i)^3} \right|_{z=i}$$

$$= \left. \frac{z^2 e^{iz} \left[(3+iz)(z+i) - 2z \right]}{(z+i)^3} \right|_{z=i}$$

$= \cdots = 1/4e$ κλπ

Αποδείξεις των Θ. ΙΙ.1, ΙΙΙ.1 (σελ. 5, 6).

Λήμμα 1: Έστω $P(z)$ πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$ με μεγιστοβάθμιο όρο $a_n z^n$ ($n \geq 1$, $a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$). Τότε:

(i) $$\lim_{|z| \to \infty} \left| \frac{P(z)}{a_n z^n} - 1 \right| = 0.$$

(ii) $\exists R_0 > 0 \mid \forall z \in \mathbb{C}$ με $|z| \geq R_0$, ισχύει
$$\frac{1}{2} |a_n| \cdot |z|^n \leq |P(z)| \leq \frac{3}{2} |a_n| \cdot |z|^n.$$

Απόδειξη: **(i)** Το $P(z)$ έχει τη μορφή
$$P(z) = a_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C},\ 0 \leq k \leq n-1$$

$\Rightarrow \forall z \neq 0$,
$$\left| \frac{P(z)}{a_n z^n} - 1 \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} \cdot \frac{1}{z^{n-k}} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|} \cdot \frac{1}{|z|^{n-k}},$$

ενώ $\displaystyle\lim_{|z| \to \infty} \frac{1}{|z|^{n-k}} = 0$, για $0 \leq k \leq n-1$

$$\Rightarrow \lim_{|z| \to \infty} \left| \frac{P(z)}{a_n z^n} - 1 \right| = 0.$$

(ii) Για $\varepsilon = 1/2$, από το (i), $\exists R_0 > 0 \mid$

$$\forall |z| \geq R_0, \quad \left| \frac{P(z)}{a_n z^n} - 1 \right| < 1/2$$

οπότε

$$\left|\frac{P(z)}{a_n z^n}\right| \leq \left|\frac{P(z)}{a_n z^n}-1\right| + 1 < 1/2 + 1 = 3/2$$

$$\Rightarrow \quad |P(z)| < \frac{3}{2}|a_n|\cdot|z|^n$$

κ'

$$\left|\frac{P(z)}{a_n z^n}\right| = \left|1-\left(1-\frac{P(z)}{a_n z^n}\right)\right|$$

$$\geq 1-\left|1-\frac{P(z)}{a_n z^n}\right| > 1-1/2 = 1/2$$

$$\Rightarrow \quad |P(z)| > \frac{1}{2}|a_n|\cdot|z|^n. \quad \boxtimes$$

<u>Λήμμα 2:</u> Έστω $P(z)$, $Q(z)$ πολυώνυμα με $\deg Q = m$, $\deg P = n$, $m > n$.

Τότε, $\exists\ R_0 > 0, M > 0 \mid$

$$\frac{|P(z)|}{|Q(z)|} \leq \frac{M}{|z|^{m-n}}, \quad \forall\ |z| \geq R_0.$$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $\beta_m z^m$, $a_n z^n$ οι μεγιστοβάθμιοι όροι των Q, P αντίστοιχα ($\beta_m \neq 0$, $a_n \neq 0$).

Σύμφωνα με το Λήμμα 1, $\exists\ R_1, R_2 > 0 \mid$

$$\boxed{\forall\ |z| \geq R_1, \quad \frac{1}{2}|a_n|\cdot|z|^n \leq |P(z)| \leq \frac{3}{2}|a_n|\cdot|z|^n} \quad (1)$$

$$\boxed{\forall\ |z| \geq R_2, \quad \frac{1}{2}|\beta_m|\cdot|z|^m \leq |Q(z)| \leq \frac{3}{2}|\beta_m|\cdot|z|^m} \quad (2)$$

Επιλέγουμε $R_3 > \max\{|z| : Q(z)=0\}$ κ'

$$R_0 > \max\{R_1, R_2, R_3\}.$$

Τότε, $\forall\, |z| \geq R_0$, ισχύουν οι (1), (2) κ' $Q(z)\neq 0$, οπότε

$$\frac{|P(z)|}{|Q(z)|} \leq \frac{\frac{3}{2}|a_n|\cdot|z|^n}{\frac{1}{2}|\beta_m|\cdot|z|^m} = \frac{3|a_n|}{|\beta_m|}\cdot\frac{1}{|z|^{m-n}}.$$

Επομένως, η αποδεικτέα ισχύει για $M = \frac{3|a_n|}{|\beta_m|}$. $\boxtimes$

<u>Λήμμα 3:</u> Έστω $P(z)$, $Q(z)$ πολυώνυμα με

$$\deg Q = m,\ \deg P = n,\ m-n \geq 2.$$

Εάν $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t\in[\varphi_0, \varphi_1]$, $R>0$, τότε

$$\lim_{R\to+\infty}\left|\int_{\gamma_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz\right| = 0.$$

<u>Απόδειξη:</u> Σύμφωνα με το Λήμμα 2, $\exists\, M, R_0>0 \,|$

$\forall\, |z|\geq R_0$, $\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{M}{|z|^{m-n}}$. Έστω $R>R_0$.

Τότε, $\forall\, z\in\gamma_R^*$, $\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{M}{R^{m-n}}$

$$\overset{[\text{ML-ανισ.}]}{\Longrightarrow} \forall R>R_0,\ \left|\int_{\gamma_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz\right| \leq (\varphi_1-\varphi_0)R\frac{M}{R^{m-n}}$$

$$= \frac{M(\varphi_1-\varphi_0)}{R^{m-n-1}} \xrightarrow{R\to+\infty} 0$$

$\boxtimes$

Απόδειξη Θ. ΙΙ.1:

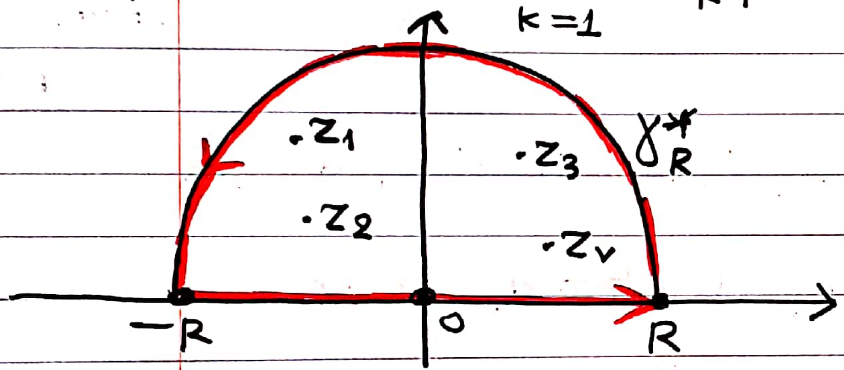
Θέτουμε

$$R_+ = \{z\in\mathbb{C} : Q(z)=0,\ \operatorname{Im} z>0\} = \{z_1, z_2, \dots, z_\nu\}$$
$(\nu \geq 1)$.

Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη $\Gamma_R \in \mathcal{C}_+$, όπου

$$\Gamma_R = \gamma_R + [-R,R], \quad \gamma_R(t) = Re^{it}, \quad t\in[0,\pi]$$

κ' $\quad R > \max\limits_{k=1}^{\nu} |z_k|$.



Τα ανώμαλα σημεία της P/Q που περιέχονται στο $\operatorname{int}\Gamma_R^*$ είναι τα z_k, $1\leq k\leq \nu$

$$\Longrightarrow \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{\nu} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_k\right)$$

$$\Longrightarrow \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}\,dz + \int_{-R}^{R} \frac{P(t)}{Q(t)}\,dt = 2\pi i \sum_{k=1}^{\nu} \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q}, z_k\right).$$

Για $R\to+\infty$, η αποδεικτέα έπεται από το Λήμμα 3. $\boxtimes$

Για την απόδειξη του Θ. ΙΙΙ.1 θα χρειαστούμε τρία επιπλέον λήμματα:

<u>Λήμμα 4:</u> $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$, $\forall t \in [0, \pi/2]$.

<u>Απόδειξη:</u> Θέτουμε $\varphi(t) = \sin t / t$, $t \in (0, \pi/2]$.
Έχουμε

$$\varphi'(t) = g(t)/t^2, \quad g(t) = t\cos t - \sin t, \quad t \in (0, \tfrac{\pi}{2}].$$

επί $g'(t) = -t\sin t < 0$, $\forall t \in (0, \pi/2)$

$$\Rightarrow g \downarrow \text{ στο } [0, \pi/2] \Rightarrow g(t) < g(0) = 0, \ \forall t \in (0, \tfrac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \varphi \downarrow \text{ στο } (0, \pi/2] \Rightarrow \varphi(t) > \varphi(\pi/2), \ \forall t \in (0, \tfrac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \sin t > \frac{2t}{\pi}, \ \forall t \in (0, \tfrac{\pi}{2}).$$

Επειδή $\sin t = \frac{2t}{\pi}$, για $t = 0$ ή $\pi/2$, έπεται η αποδεικτέα. ⊠

<u>Λήμμα 5:</u> $\forall R > 0$, $\forall \lambda > 0$,

$$\int_0^{\pi} \left| \exp(i\lambda R e^{it}) \right| dt \leq \frac{\pi}{\lambda R}\left(1 - e^{-\lambda R}\right).$$

<u>Απόδειξη:</u> Έχουμε

$$\left| \exp(i\lambda R e^{it}) \right| = \left| \exp(i\lambda R\cos t - \lambda R \sin t) \right|$$

$$= e^{-\lambda R \sin t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \left| \exp\left(i\lambda R e^{it}\right) \right| dt = \int_0^{\pi} e^{-\lambda R \sin t}\, dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R \sin t}\, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-\lambda R \sin t}\, dt.$$

Αλλά, το β' ολοκλήρωμα με την αντικατάσταση $\xi = \pi - t$ γράφεται

$$\int_{\pi/2}^{0} e^{-\lambda R \sin(\pi - \xi)} (-d\xi) = \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R \sin \xi}\, d\xi$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \left| \exp\left(i\lambda R e^{it}\right) \right| dt = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R \sin t}\, dt$$

$$\overset{[\text{Λήμμα } 4]}{\leq} 2 \int_0^{\pi/2} e^{-2\lambda R t/\pi}\, dt$$

$$= -\frac{\pi}{\lambda R} e^{-\frac{2\lambda R t}{\pi}} \Bigg|_{t=0}^{t=\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{\lambda R}\left(1 - e^{-\lambda R}\right).$$

$\boxtimes$

<u>Λήμμα 6: (Θ. Jordan)</u> Έστω $\lambda>0$ κ' $P(z)$, $Q(z)$ πολυώνυμα με $\deg Q = m$, $\deg P = n$, $m-n \geq 1$. Τότε,

$$\lim_{R\to+\infty} \left| \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z} dz \right| = 0,$$

όπου $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t\in[0,\pi]$.

<u>Απόδειξη:</u> Σύμφ. με Λήμμα 2, $\exists\, M>0, R_0>0 \,|$

$$\forall\, |z| \geq R_0, \quad \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{M}{|z|^{m-n}}.$$

Έστω $R>R_0$. Τότε, $\forall\, t\in[0,\pi]$,

$$\boxed{\left|\frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})}\right| \leq \frac{M}{R^{m-n}},} \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z} dz \right| =$$

$$= \left| \int_0^{\pi} \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} \exp(i\lambda Re^{it})\, iRe^{it} dt \right|$$

$$\leq R \int_0^{\pi} \left|\frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})}\right| \cdot \left|\exp(i\lambda Re^{it})\right| dt$$

$$\overset{(3)}{\leq} \frac{M}{R^{m-n-1}} \int_0^{\pi} \left|\exp(i\lambda Re^{it})\right| dt \overset{[\text{Λήμμα } 5]}{\leq}$$

Scanned with CamScanner

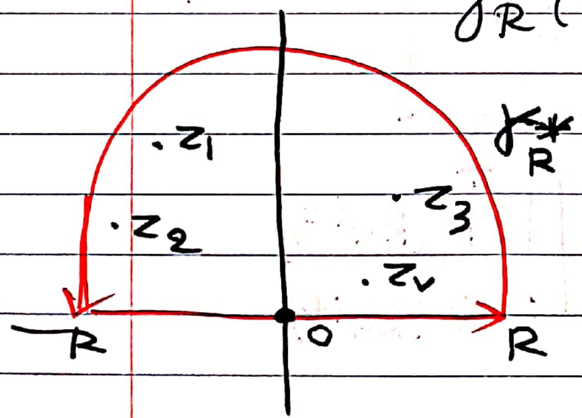
$$\leq \frac{M}{R^{m-n-1}} \frac{\pi}{\lambda R}\left(1-e^{-\lambda R}\right)=\frac{M\pi}{\lambda R^{m-n}}\left(1-e^{-\lambda R}\right), \quad \forall R>R_0$$

$$\xrightarrow{R\to+\infty} 0. \quad \boxtimes$$

Απόδειξη Θ. III.1

Έστω z_k, $1\leq k\leq \nu$, οι ρίζες του Q με θετικό φανταστικό μέρος. Επιλέγουμε
$$R_0 > \max\{|z_k| : 1\leq k\leq \nu\}.$$

$\forall R>R_0$, θεωρούμε την καμπύλη
$$\Gamma_R=\gamma_R+[-R,R],$$
όπου
$$\gamma_R(t)=Re^{it}, \quad t\in[0,\pi].$$



Εάν $R>R_0$, τα ανώμαλα σημεία της
$$z\mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\lambda z}$$
που βρίσκονται στο $\mathrm{int}\,\Gamma_R^*$ είναι τα z_k, $1\leq k\leq\nu$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\lambda z}dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{\nu} \mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\lambda z}, z_k\right]$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}e^{i\lambda z}dz + \int_{-R}^{R}\frac{P(t)}{Q(t)}e^{i\lambda t}dt =$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{\nu} \mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, z_k \right].$$

Για $R \to +\infty$, από το Λήμμα 6 έπεται η αποδεικτέα. $\boxtimes$