

# ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

## ΦΥΛΛΑΔΙΟ 0

Διδάσκοντες: Γ. Σμυρλής, Ν. Λαμπρόπουλος.

**Άσκηση 1.** Να λύσετε τις εξισώσεις:

(i)  $(z + 1)^2 + (z - 1)^2 = 0$ , (ii)  $z^2 - 3z + 3 + i = 0$ .

**Άσκηση 2.** Θεωρούμε τον μιγαδικό αριθμό  $z = x + yi$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Αν  $\frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{R}$  να αποδείξετε ότι  $z \in \mathbb{I}$ , ενώ αν  $\frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{I}$  να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του  $z$  στο  $\mathbb{C}$ . (Με  $\mathbb{I}$  συμβολίζουμε το σύνολο των φανταστικών αριθμών.)

**Άσκηση 3.** Να αποδείξετε ότι:

1. Αν  $z \in \mathbb{C}$  τότε  $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$
2. Αν  $z \neq -1$  και  $|z| = 1$  τότε  $\frac{z-1}{z+1} \in \mathbb{I}$

**Άσκηση 4.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $z, w \in \mathbb{C}$  ισχύει:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

Ποιά είναι η γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας αυτής;

**Άσκηση 5.** Να σχεδιάσετε τους γεωμετρικούς τόπους:

- (i)  $|z - 3 + 4i| = |z - 1|$  (ii)  $|z - i| \leq 1$  (iii)  $\operatorname{Re}(\bar{z} + i) = 2$   
(iv)  $|z - 2| = 2|z + 1|$  (v)  $|1 - z| + |i + z| = 4$  (vi)  $|z - 2 + i| - |z + 1| = 10$ .

**Άσκηση 6.** Αν οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2, z_3$  είναι ανά δύο διάφοροι και οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο βρίσκονται σε ευθεία γραμμή να αποδείξετε ότι  $\frac{z_1 - z_3}{z_3 - z_2} \in \mathbb{R}$ .

**Άσκηση 7.** Αν  $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  να αποδείξετε ότι:

1. (i)  $z^2 + z + 1 = 0$  (ii)  $z^3 - 1 = 0$  (iii)  $z^{2019} = 1$ .
2.  $(1 + z)^{2n} = z^n, n \in \mathbb{N}$ .

**Άσκηση 8.** Αν  $|z + w| = |z| = |w|$  να αποδείξετε ότι  $|z - w| = \sqrt{3}|z|$  για κάθε  $z, w \in \mathbb{C}^*$ .

**Άσκηση 9.** Αν  $|z - 1| \leq 1$  και  $|z - 2| = 1$  να αποδείξετε ότι  $1 \leq |z| \leq \sqrt{3}$ .

**Άσκηση 10.** Έστω  $z_k, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  οι νιοστές ρίζες της μονάδας. Να αποδείξετε ότι:

1. Τα ορίσματα των  $z_k, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.
2. Οι  $z_k, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.
3.  $z_0 + z_1 + \dots + z_{n-1} = 0$ .
4.  $z_0 \cdot z_1 \cdot \dots \cdot z_{n-1} = (-1)^{n-1}$ .
5.  $(1 - z_1)(1 - z_2) \cdot \dots \cdot (1 - z_n) = n$ .

6.  $\bar{z}_k = \frac{1}{z_k} = z_{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$

**Άσκηση 11.** Αν  $z = 1 + i$  να υπολογίσετε τον μιγαδικό  $z^8$  καθώς επίσης το μέτρο και το κύριο όρισμα του μιγαδικού  $z^{2019}$ .

**Άσκηση 12.** Να λύσετε την εξίσωση:  $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0.$

**Άσκηση 13.** Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση της εικόνας του μιγαδικού  $3 + i\sqrt{3}$  από τις εικόνες των ριζών της εξίσωσης  $z^6 = -64.$

**Άσκηση 14.** Να λύσετε τις εξισώσεις: (i)  $e^z = e^{1+i}$  (ii)  $e^z = 1 + i.$

**Άσκηση 15.** Να λύσετε την εξίσωση:  $\cos z = \frac{1}{2}.$  Τι παρατηρείτε;

**Άσκηση 16.** Να βρείτε την εικόνα του κύκλου  $|z| = 1$  μέσω της απεικόνισης  $f(z) = z + \frac{1}{z};$

**Άσκηση 17.** Να υπολογίσετε τους μιγαδικούς:

(i)  $i^\pi$  (ii)  $\pi^i$  (iii)  $\text{Log}(-1)$  (iv)  $\text{Log}(i).$

**Άσκηση 18.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\cos z = w$  έχει λύση για κάθε  $w \in \mathbb{C}.$  Τι συμπεραίνετε για τη συνάρτηση  $\cos z.$

**Άσκηση 19.** Αν  $f(z) = z + 1 + z \text{Log} z$  να αποδείξετε ότι  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1.$

**Άσκηση 20.** Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια:

(i)  $\lim_{z \rightarrow 0} \text{Log} z$  (ii)  $\lim_{z \rightarrow 0} e^z$  (iii)  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\bar{z}}$  (iv)  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{Im} z^2}{|z|}.$