ΑΣΚ. (i) $(z+1)^2 - [i(z-1)]^2 = 0$

$\Leftrightarrow [z+1+i(z-1)]\cdot[z+1-i(z-1)] =$

κ.λ.π.

(ii) $\Delta = (-3)^2 - 4(3+i) = -3-4i$

$= -4-4i+1 = (2i)^2 - 4i + 1$

$= (2i-1)^2$

Ρίζες: $z_1 = \dfrac{3+2i-1}{2} = 1+i$

$z_2 = \dfrac{3+1-2i}{2} = 2-i$

ΑΣΚ. 2 Θέτω $w = \dfrac{z-i}{z+i}$.

- Εάν $w \in \mathbb{R}$, τότε $\bar{w} = w$ ή

$\dfrac{\bar{z}+i}{\bar{z}-i} = \dfrac{z-i}{z+i} \Rightarrow \dots \bar{z} = -z$

$\Rightarrow z \in \mathbb{I}$.

- $w \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \bar{w} = -w \Leftrightarrow \dots |z| =$

Άσκ. 3 2. $\overline{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)} = \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} =$

$$= \frac{1/z - 1}{1/z + 1} = \frac{1-z}{1+z} = -\left(\frac{z-1}{z+1}\right).$$

Άσκ. 5: (i) Μεσοκάθετος ευθείας..

(ii) κλειστός δίσκος

(iii) $z = x+iy$, $\operatorname{Re}(\bar{z}+i) \leq 2 \Leftrightarrow x \leq$
(ημιεπίπεδο)

(iv) Υψώνω στο τετράγωνο κ' παίρνω

. . . $|z|^2 + 4\operatorname{Re}(z) = 0$

$\Leftrightarrow |z+2|^2 = 4 \Leftrightarrow |z+2| = 2$

(v) έλλειψη (vi) υπερβολή

(θυμηθείτε τους γεωμετρικούς ορισμούς)

ΑΣΚ.6. Εάν A_1, A_2, A_3 οι εικόνες των z_1, z_2, z_3, τότε $\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{A_1A_3} = \lambda \overrightarrow{A_1A_2}$ κ.λ.π.

ΑΣΚ.7. (i), (ii) $z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = e^{2i\pi/3}$

$\Rightarrow z^3 = e^{2i\pi} = 1$ κ' $z \neq 1$

Από την ταυτότητα $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$

παίρνω $z^2+z+1=0$

(iii) $z^{2019} = (z^3)^{673} = 1$.

2. $(z+1)^{2n} = (z^2+2z+1)^n \overset{(i)}{=} z^n$?

ΑΣΚ.8. Χρήση της Άσκ. 4

ΑΣΚ.9. Σχεδιάστε στο μιγ. επίπεδο τον γ.τ. C των σημείων z με $|z-2|=1$, $|z-1|\leq 1$ (τομή δίσκου κ' κύκλου) κ' υπολογίστε γεωμετρικά τη μέγιστη κ' την ελάχιστη απόσταση σημείων του C από το O.

Ασκ. 10 $\quad z_k = \rho^k, \quad \rho = e^{2\pi i/n}$

$\mathrm{Arg}(z_k) = 2k\pi/n$

3. $z_0 + z_1 + \cdots + z_{n-1} = 1 + \rho + \cdots + \rho^{n-1} =$

$$= \frac{\rho^n - 1}{\rho - 1} = 0$$

4. $z_0 \cdot z_1 \cdots z_{n-1} = \rho \cdot \rho^2 \cdots \rho^{n-1} =$

$$= \rho^{1+2+\cdots+n-1} = \rho^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

περιπτώσεις: n άρτιος, n περιττός

5. $z^n - 1 = (z-1)(1 + z + \cdots + z^{n-1})$

κ' $\quad z^n - 1 = (z-1)(z-z_1)\cdots(z-z_{n-1})$

Για $z \neq 1$, παίρνω

$$1 + z + \cdots + z^{n-1} = (z-z_1)\cdots(z-z_{n-1})$$

Για $z \to 1$, παίρνω την αποδεικτέα.

6. $|z_k| = 1 \Rightarrow \overline{z_k} = \frac{1}{z_k}$

$$z_k z_{n-k} = \rho^n = 1.$$

<u>ΑΣκ. 11</u> $z = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$ . . . .

<u>ΑΣκ. 13</u> $e^{i\pi} = -1 \Rightarrow \left(e^{i\pi/6}\right)^6 = -1$

$$\Rightarrow \left(\underbrace{2e^{i\pi/6}}_{\rho}\right)^6 = -64$$

$$\rho = 2\cos\frac{\pi}{6} + 2i\sin\frac{\pi}{6} = \underline{\sqrt{3}+i}$$

$\pm\rho, \quad \pm\bar{\rho}$ 4 ρίζες

οι άλλες 2 είναι οι $\pm 2i$

. . . .

<u>ΑΣκ. 14:</u> (i) $z = 1+i+2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z}$

(ii) $e^z = e^{\mathrm{Log}(1+i)}$

$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$, $\mathrm{Log}(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\dfrac{\pi}{4}$

κλπ.

<u>ΑΣκ. 15:</u> $w = e^{iz}$, $\frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow w^2 + 1 = w \Leftrightarrow w^2 - w + 1 = 0$

. . . .

Ασκ. 16 $\quad f(z) = z + \bar{z} = 2\,Re(z)$

εικόνα $= [-2, 2]$

Ασκ. 17 $\quad$ (iii) $\quad -1 = e^{i\pi}$

$Arg(-1) = \pi \Rightarrow Log(-1) = i\pi$

(iv) $\quad Arg(i) = \pi/2, \quad Log(i) = i\pi/2$

Ασκ. 18. Θέτω $p = e^{iz}$

$\cos z = w \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(p + \frac{1}{p}\right) = w$

$\Leftrightarrow p^2 + 1 = 2pw$

$\Leftrightarrow p^2 - 2pw + 1 = 0$

έχει λύση - - -