ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Ι
Διδάσκων: Γ. Σμυρλής

1. Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με
$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\overline{z}^{\,3}}{|z|^2}, & z \neq 0 \\ \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$
Να δείξετε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες Cauchy-Riemann στο σημείο $z_0 = 0$ αλλά η f δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο αυτό.

2. Να βρείτε το ευρύτερο πεδίο του $\mathbb{C}$ πάνω στο οποίο η συνάρτηση $\operatorname{Log}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$ είναι ολόμορφη.

3. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(z) = e^y \cos x + ie^y \sin x$ δεν είναι διαφορίσιμη σε κανένα σημείο $z \in \mathbb{C}$.

4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η συνάρτηση $f(z) = \overline{z}e^{-|z|^2}$ είναι διαφορίσιμη και να υπολογίσετε την παράγωγο στα σημεία αυτά.

5. Αν η $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη, δείξτε ότι και η $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ είναι ολόμορφη.

6. Να βρείτε ολόμορφη συνάρτηση $f = u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε:
(i) $u(x, y) = -e^{-x} \sin y + \dfrac{y^2 - x^2}{2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(0) = 0$.
(ii) $u(x, y) = 3x^2y - y^3 + e^{2y} \cos(2x)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(0) = 1$.

7. Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο και $f = u + iv \in \mathcal{H}(A)$ με $u_x + v_y = 0$ στο A. Να δείξετε ότι υπάρχουν $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε
$$f(z) = icz + d, \quad z \in A.$$

8. Έστω $f(z) = z^3$, $z_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει z_0 πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $[z_1,\ z_2]$ τέτοιο ώστε
$$f(z_2) - f(z_1) = f'(z_0)(z_2 - z_1).$$
Αυτό σημαίνει ότι το θεώρημα της μέσης τιμής δεν ισχύει στις μιγαδικές συναρτήσεις.

9. Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$ και $f = u + iv : A \to \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι οι u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους σε κάποια περιοχή του (x_0, y_0) και ότι το όριο
$$\lim_{z \to z_0} \operatorname{Re}\left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right)$$
υπάρχει στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο z_0.

10. Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο. Να δείξετε ότι:

    (i) Εάν $f \in \mathcal{H}(A)$ με $\overline{f} \in \mathcal{H}(A)$, τότε f σταθερή.

    (ii) Εάν $f \in \mathcal{H}(A)$ και $|f|$ σταθερή, τότε f σταθερή.

    (iii) Εάν $f : A \to \mathbb{C}$ με $f^5,\ \overline{f}^2 \in \mathcal{H}(A)$, τότε f σταθερή.

11. Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο και $f \in \mathcal{H}(A)$. Να δείξετε ότι:

    (i) Αν το $f(A)$ είναι υποσύνολο μιας ευθείας του μιγαδικού επιπέδου, τότε η f είναι σταθερή.

    (ii) Αν το $f(A)$ είναι υποσύνολο ενός κύκλου του μιγαδικού επιπέδου, τότε η f είναι σταθερή.

12. (i) Εάν x_0 αρνητικός πραγματικός αριθμός, να δείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{w \to x_0} \mathrm{Log} w$.

    (*Υπόδειξη*: Να θεωρήσετε τις ακολουθίες $|x_0|e^{i(\pi - 1/n)}$, $|x_0|e^{i(-\pi + 1/n)}$, $n \geq 1$.)

    (ii) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση $f = u + iv : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$