ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2
Διδάσκων: Γ. Σμυρλής

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα κατά μήκος της δοσμένης καμπύλης:

   (i) $\displaystyle\int_\gamma (3z^2-2z)dz, \quad \gamma(t)=t+it^2,\ \ t\in[0,1].$

   (ii) $\displaystyle\int_\Gamma \mathrm{Im}(z-i)dz, \quad \Gamma=\gamma+[i,-1],\ \ \gamma(t)=e^{it},\ \ t\in[0,\pi/2].$

   (iii) $\displaystyle\int_\gamma \cos z dz, \quad \gamma=\left[-\frac{\pi}{2}+i,\ \pi+i\right].$

   (iv) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{Log} z}{z}dz, \quad \gamma=[1,\ i].$

   (vi) $\displaystyle\int_\gamma |z+1|^2dz, \quad \gamma(t)=e^{it},\ \ t\in[0,2\pi].$

   (vii) $\displaystyle\int_\gamma \overline{z^2e^z}dz, \quad \gamma(t)=e^{it},\ \ t\in[0,\pi].$

2. Να δείξετε ότι:

   (i) $\displaystyle\left|\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2}\,dz\right| \ \le\ \pi, \quad$ όπου $\gamma(t)=e^{it},\ \ t\in[0,\pi].$

   (iii) $\displaystyle\left|\int_\gamma \frac{dz}{\overline{z}^2+\overline{z}+1}\ \right| \ \le\ \frac{3\pi}{10}, \quad$ όπου $\gamma(t)=3e^{it},\ \ t\in[0,\ \pi/2].$

3. Να δείξετε ότι:

   (i) $|\sin(z^2)| \ \le\ e, \quad$ για $|z|=1.$

   (ii) $\displaystyle\left|\int_\gamma e^{2\overline{z}}\sin(z^2)\ dz\right| \ \le\ 2\pi e^3,$ όπου $\gamma(t)=e^{it},\ \ t\in[0,\ 2\pi].$

4. Να δείξετε ότι

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}\frac{e^{iz^2}}{1+z^2}dz=0,$$

   όπου $\gamma_R(t)=Re^{it},\ t\in[0,\pi/2],\ \ R>0.$

5. Εάν $z_1,\ z_2\in\mathbb{C}$ με $\mathrm{Real}(z_1)\le 0,\ \ \mathrm{Real}(z_2)\le 0,$ να δείξετε ότι

$$|e^{z_1}\ -\ e^{z_2}|\ \le\ |z_1\ -z_2|.$$

6. Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f, g : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους και $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ απλή, τμηματικά λεία καμπύλη με $\gamma^* \subset U$. Εάν $z_0 = \gamma(a)$, $z_1 = \gamma(b)$, να δείξετε ότι
$$\int_\gamma f'(z)g(z)dz = f(z_1)g(z_1) - f(z_0)g(z_0) \ - \int_\gamma f(z)g'(z)dz.$$

7. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{\gamma_r} \mathrm{Re} z dz$, όπου $\gamma_r(t) = re^{it}$, $t \in [0,\ 2\pi]$ $(r > 0)$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι η συνάρτηση $\mathrm{Re} z$ δεν έχει παράγουσα σε κανένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ που περιέχει το 0.

8. (i) Εάν $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ διαφορίσιμη $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$, να δείξετε ότι
$$\frac{d}{dt}\left[\ |\varphi(t)|^2\ \right] = 2\mathrm{Re}\left[\ \varphi'(t)\overline{\varphi(t)}\ \right], \quad \forall\, t \in [a, b].$$

   (ii) Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f : U \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με συνεχή παράγωγο και γ απλή, κλειστή, λεία καμπύλη με $\gamma^* \subset U$. Να δείξετε ότι το μιγαδικό ολοκλήρωμα
$$\int_\gamma f'(z)\overline{f(z)}dz$$
   είναι φανταστικός αριθμός.