ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 3
Διδάσκων: Γ. Σμυρλής

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{1+z^2}$, $z \in \mathbb{C}$.

   (i) Να δείξετε ότι
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0,$$
   όπου $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$, $R > 0$.

   (ii) Να υπολογίσετε το γενικευμένο ολοκλήρωμα
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}dx.$$
   [*Υπόδειξη*: Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy για τη συνάρτηση f πάνω στην κλειστή καμπύλη $\gamma_R + [-R,R]$, $R > 0$.]

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^2}dz,$$
   όπου

   (i) $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$ (ii) $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$.

3. Να δείξετε ότι
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4\cos^2 t + 9\sin^2 t} = \frac{\pi}{3}\ ,$$
   ολοκληρώνοντας τη συνάρτηση $1/z$ πάνω στην έλλειψη $\gamma(t) = 2\cos t + 3i\sin t$, $t \in [0,2\pi]$.

4. Ολοκληρώνοντας τη συνάρτηση e^z/z πάνω στον θετικά προσανατολισμένο κύκλο $|z| = 1$, να δείξετε ότι $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)dt = 2\pi$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin(\sin t)dt = 0$.

5. Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ με $\mathrm{Im}\,(z_0) < 0$, $R > 0$ και γ_R το ημικύκλιο με $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [\pi,\ 2\pi]$.

   (i) Να δείξετε ότι
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z(z-z_0)} = 0, \qquad \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z-z_0} = \pi i.$$
   (ii) Να υπολογίσετε το όριο
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dt}{t-z_0}\ .$$

6. Έστω f ολόμορφη σε ανοικτό σύνολο που περιέχει τον κλειστό δίσκο $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$, $|z_0| < 1$ και $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$. Να δείξετε ότι
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{1-|z_0|^2}\int_\gamma f(z)\frac{1-z\overline{z_0}}{z-z_0}dz, \qquad |f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1-|z_0|^2}\int_0^{2\pi}\left|f(e^{it})\right|dt.$$

7. Έστω f ολόμορφη σε ανοικτό σύνολο που περιέχει τον κλειστό δίσκο $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ και $\gamma(t) = e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$.

(i) Να δείξετε ότι

$$\int_\gamma \overline{f(z)}dz = 2\pi i \overline{f'(0)}.$$

(ii) Να υπολογίσετε το

$$\int_\gamma \overline{z \cos z} dz.$$

8. Έστω f ολόμορφη σε ανοικτό σύνολο που περιέχει τον κλειστό δίσκο $D[0, R] = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\},\ R > 0$. Εάν $f(z_0) = 0$, για κάποιο z_0 με $|z_0| < R$, να δείξετε ότι

$$|f(0)| \leq \frac{M_R |z_0|}{R - |z_0|},$$

όπου $M_R = \max\{|f(z)| : |z| = R\}$.

9. Έστω f ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε

$$|f(z)| \leq a|z|^2 + b, \quad \forall\, z \in \mathbb{C},$$

όπου $a,\ b$ θετικές σταθερές. Να δείξετε ότι:

(i) για όλα τα $n \in \mathbb{N},\ R > 0$,

$$\left| f^{(n)}(0) \right| \leq n! \frac{aR^2 + b}{R^n}.$$

(ii) υπάρχουν $A, B, C \in \mathbb{C}$ ώστε $|A| \leq a,\ |C| \leq b$ και

$$f(z) = Az^2 + Bz + C, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

10. Έστω $P(z)$ πολυώνυμο βαθμού $n \geq 2$ και με μεγιστοβάθμιο όρο $a_n z^n$.

(i) Να δείξετε ότι

$$\lim_{|z| \to \infty} \left| \frac{P(z)}{a_n z^n} - 1 \right| = 0.$$

Συμπεράνατε ότι υπάρχει $R_0 > 0$ τέτοιο ώστε για $|z| > R_0$,

$$|P(z)| > \frac{|a_n|}{2} |z|^n.$$

(ii)Να δείξετε ότι

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{P(z)} dz = 0,$$

όπου $\gamma_R(t) = Re^{it},\ t \in [0, 2\pi],\ R > 0$.

(iii) Εάν γ απλή κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη που περικλείει όλες τις ρίζες του $P(z)$, να δείξετε ότι

$$\int_\gamma \frac{1}{P(z)} dz = 0.$$

11. Να βρείτε τη σειρά Taylor της συνάρτησης f γύρω από το σημείο z_0, καθώς και την αντίστοιχη ακτίνα σύγκλισης, όπου:

    (i) $f(z) = 1 - \dfrac{2}{1+z} + \dfrac{1}{(1+z)^2}\,, \quad z_0 = i.$

    (ii) $f(z) = (\cos z)^2, \quad z_0 = \pi.$

12. Να βρείτε τη σειρά Taylor της συνάρτησης $f(z) = \dfrac{z}{2}(e^{z^2} - e^{-z^2})$ γύρω από το σημείο $z_0 = 0$, καθώς και την παράγωγο $f^{(23)}(0)$.

13. Να βρείτε τη σειρά Taylor της συνάρτησης $f(z) = \dfrac{z^5}{1+z^4}$ γύρω από το σημείο $z_0 = 0$, καθώς και την παράγωγο $f^{(21)}(0)$.

14. Για $|z| < 1$, να υπολογίσετε το άθροισμα $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$.

15. Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{z\to 0} \frac{(1-\cos z)^2}{(e^z - 1 - z)\sin^2 z}\,, \qquad \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos(2z)}{(e^{2iz}-1)\sin z}\,.$$

    [*Υπόδειξη:* Να χρησιμοποιήσετε αναπτύγματα Taylor.]

16. Έστω f ακέραια συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

    (i) $f^{(n)}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$

    (ii) $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$

    [*Υπόδειξη:* Να γράψετε την f ως σειρά Taylor γύρω από το 0.]