

**ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**  
**ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 4**  
**Διδάσκων: Γ. Σμυρλής**

1. Να βρείτε τα

$$\max\{|f(z)| : z \in K\}, \quad \min\{|f(z)| : z \in K\}$$

καθώς και τα σημεία στα οποία τα παραπάνω  $\max$ ,  $\min$  λαμβάνονται, όπου:

(i)  $f(z) = |z^2 + 3z - 1|$ ,  $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ .

(ii)  $f(z) = e^{z^2}$ ,  $K =$  το κλειστό και φραγμένο χωρίο που έχει σύνορο το τρίγωνο με κορυφές  $0$ ,  $-1$ ,  $1 + i$ .

2. Δίνεται ολόμορφη συνάρτηση  $f$  σε ανοικτό σύνολο  $U \subseteq \mathbb{C}$  που περιέχει τον κλειστό δακτύλιο

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 3\},$$

τέτοια ώστε

$$|f(z)| \leq 1, \text{ για } |z| = 1 \quad \text{και} \quad |f(z)| \leq 9, \text{ για } |z| = 3.$$

Να δείξετε ότι  $|f(z)| \leq |z|^2$ ,  $\forall z \in \Delta$ .

3. Έστω  $U \subseteq \mathbb{C}$  πεδίο και  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφη, μη σταθερή, τέτοια ώστε  $\operatorname{Re}(f(z)) \geq 0$ ,  $\forall z \in U$ . Να δείξετε ότι  $\operatorname{Re}(f(z)) > 0$ ,  $\forall z \in U$ .
4. Έστω  $f$  ακέραια συνάρτηση τέτοια ώστε  $|f(z)| \geq 1$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ . Να δείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή.
5. Έστω  $f = u + iv$  ακέραια συνάρτηση με  $u^2 \leq v^2$ . Να δείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή.

6. Έστω  $f$  ακέραια συνάρτηση με

$$|f(z)| \leq M e^{a \operatorname{Re}(z)}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

όπου  $a, M$  θετικές πραγματικές σταθερές. Να δείξετε ότι

$$f(z) = ce^{az}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

για κάποια σταθερά  $c \in \mathbb{C}$ .

7. Να βρείτε το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης  $f$  γύρω από το σημείο  $z_0$  στον “δακτύλιο”  $\Delta$ , όπου:

$$(i) f(z) = \frac{1}{z(z-1)}, \quad z_0 = -2, \quad \Delta = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z+2| < 3\}.$$

$$(ii) f(z) = \frac{\sin^2 z}{z}, \quad z_0 = 0, \quad \Delta = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

$$(iii) f(z) = \sin\left(\frac{z}{1-z}\right), \quad z_0 = 1, \quad \Delta = \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

8. Έστω  $f$  ολόμορφη και φραγμένη στον “τρυπημένο” ανοιχτό δίσκο  $D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ ,  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $\delta > 0$ . Να δείξετε ότι το  $z_0$  είναι αιρόμενο ανώμαλο σημείο της  $f$ . [Υπόδειξη: Ολοκλ. τύποι για τους συντελεστές του αναπτύγματος Laurent.]

9. Έστω  $f$  ολόμορφη στον ανοιχτό δίσκο  $D(z_0, r)$  ( $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$ ) με

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = 0, \quad f'''(z_0) \neq 0.$$

- (i) Να δείξετε ότι υπάρχει  $\varphi$  ολόμορφη στον  $D(z_0, r)$  τέτοια ώστε

$$f(z) = (z - z_0)^3 \varphi(z), \quad \forall z \in D(z_0, r), \quad \varphi(z_0) \neq 0.$$

- (ii) Εάν  $z_0$  η μοναδική ρίζα της  $f$  στον  $D(z_0, r)$ , να δείξετε ότι

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = 3.$$

10. (i) Έστω  $g$  ολόμορφη σε μια περιοχή του 0 με  $g(0) \neq 0$ . Να δείξετε ότι

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^3 g(z)}, 0\right) = \frac{2[g'(0)]^2 - g''(0)g(0)}{2[g(0)]^3}.$$

- (ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 \sin z},$$

όπου  $\gamma(t) = 4e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

11. (i) Να προσδιορίσετε ολόμορφη συνάρτηση  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  τέτοια ώστε  

$$\sin z = (\pi - z)\varphi(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \varphi(\pi) = 1, \quad \varphi'(\pi) = 0.$$

(ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} \frac{e^z - 1}{\sin^2 z} dz,$$

όπου  $\gamma(t) = 4e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

12. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} h(z) dz,$$

όπου

$$h(z) = \frac{1}{1 - \cos z} + \bar{z}z^{12} \cos(1/z^3), \quad \gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

13. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\gamma} (1 - z^2)e^{1/z} dz,$$

όπου  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

14. Με χρήση μιγαδικής ανάλυσης, να δείξετε ότι:

$$(i) \int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{2 + \cos t} dt = 2\pi \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

$$(ii) \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{a + \cos t} dt = \pi(a - \sqrt{a^2 - 1}), \quad a > 1.$$

15. Με χρήση μιγαδικής ανάλυσης, να δείξετε ότι:

$$(i) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{1 + x^6} dx = \frac{\pi}{3}.$$

$$(ii) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx = \pi/e.$$

$$(iii) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{1 + x^4} dx = -\pi \operatorname{Re}(a^2 e^{ia}), \quad \text{όπου } a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$