

Αποσπάσματα Gödel

1. Οι κλάσεις ... μπορούν ... επίσης να νοηθούν ως πραγματικά αντικείμενα, συγκεκριμένα ως «πολλαπλότητες πραγμάτων» ή ως δομές που αποτελούνται από μια πολλαπλότητα πραγμάτων ... και που υπάρχουν ανεξάρτητα από τους ορισμούς και τις κατασκευές μας. (Gödel 1944, 456)

2. ... οι έννοιες και τα θεωρήματα της θεωρίας των συνόλων περιγράφουν μια πραγματικότητα που είναι καλά προσδιορισμένη, και στην οποία η εικασία του Cantor πρέπει να είναι αληθής ή ψευδής. Επομένως, το ότι είναι αδύνατο να αποφανθούμε γι' αυτήν με βάση τα αξιώματα που χρησιμοποιούμε σήμερα, δεν μπορεί παρά να σημαίνει ότι τα αξιώματα αυτά δεν περιέχουν μια πλήρη περιγραφή αυτής της πραγματικότητας. (Gödel 1964, 476)

3. ... τα αντικείμενα της υπερπεπερασμένης θεωρίας των συνόλων ... ασφαλώς δεν ανήκουν στον φυσικό κόσμο ...

Αλλά παρ' όλη την απόστασή τους από την αισθητηριακή εμπειρία, έχουμε ένα είδος αντίληψης των αντικειμένων της θεωρίας συνόλων, όπως δείχνει το γεγονός ότι τα αξιώματά μας επιβάλλονται από μόνα τους ως αληθή. Δεν βλέπω το λόγο γιατί θα έπρεπε να έχουμε λιγότερη εμπιστοσύνη σ' αυτό το είδος αντίληψης – δηλαδή, στη μαθηματική εποπτεία (intuition) – απ' ό,τι στην αισθητηριακή αντίληψη, η οποία μας ωθεί να κατασκευάζουμε φυσικές θεωρίες και να προσδοκούμε ότι οι μελλοντικές αισθητηριακές αντιλήψεις μας θα συμφωνούν με αυτές και, επιπλέον, να πιστεύουμε ότι ένα ερώτημα που τώρα δεν μπορεί να απαντηθεί έχει νόημα και μπορεί να απαντηθεί στο μέλλον. Τα παράδοξα της θεωρίας συνόλων δύσκολα μπορούν να θεωρηθούν ως μεγαλύτερο εμπόδιο για τα μαθηματικά απ' ό,τι οι πλάνες των αισθήσεων για τη φυσική ...

Πρέπει να σημειωθεί πως δεν είναι ανάγκη να νοηθεί η μαθηματική εποπτεία ως ικανότητα που δίνει άμεση γνώση (*immediate knowledge*) των αντικειμένων της. Μάλλον, φαίνεται ότι, όπως στην περίπτωση της φυσικής εμπειρίας, *σχηματίζουμε* τις ιδέες και αυτών των αντικειμένων με βάση κάτι άλλο που είναι άμεσα δεδομένο. Μόνο που εδώ, αυτό το κάτι άλλο δεν είναι, ή τουλάχιστον δεν είναι πρωταρχικά, αισθητηριακές αντιλήψεις. Το ότι, εκτός από τις αισθητηριακές αντιλήψεις, είναι άμεσα δεδομένο κάτι διαφορετικό από αυτές, απορρέει (ανεξάρτητα από τα μαθηματικά) από το γεγονός ότι ακόμη και οι ιδέες μας που αναφέρονται σε φυσικά αντικείμενα περιέχουν συστατικά που διαφέρουν ποιοτικά από τις αισθητηριακές αντιλήψεις ή τους απλούς συνδυασμούς τους, λ.χ. την ίδια την ιδέα του αντικειμένου ... Προφανώς το μαθηματικό «δεδομένο» σχετίζεται στενά με τα αφηρημένα στοιχεία που περιέχονται στις εμπειρικές ιδέες μας. Ωστόσο, αυτό καθόλου δεν σημαίνει ότι τα δεδομένα αυτού του δεύτερου είδους, επειδή δεν μπορούν να συσχετισθούν με τη δράση ορισμένων πραγμάτων πάνω στα όργανα των αισθήσεων, είναι κάτι το καθαρά υποκειμενικό, όπως υποστήριξε ο Kant. Αντίθετα, μπορεί να αναπαριστούν μια όψη της αντικειμενικής πραγματικότητας ... (Gödel 1964, 483-484)

4. ... ακόμη και στην περίπτωση που [ένα νέο αξίωμα] δεν έχει καμία εγγενή αναγκαιότητα, ενδέχεται να μπορεί να αποφασισθεί η αλήθειά του και με άλλον τρόπο, δηλαδή επαγωγικά, εξετάζοντας την «επιτυχία» του. Σ' αυτή την περίπτωση, επιτυχία σημαίνει γονιμότητα σε συνέπειες, ιδιαίτερα σε «επαληθεύσιμες» συνέπειες, δηλαδή συνέπειες που μπορούν να αποδειχθούν χωρίς τη βοήθεια του νέου αξιώματος* ωστόσο, όμως, το νέο αξίωμα διευκολύνει και απλουστεύει σημαντικά την ανακάλυψη των αποδείξεων των συνεπειών αυτών, και επιτρέπει να συμπτυχθούν περισσότερες αποδείξεις σε μία απόδειξη... Ωστόσο, μπορούμε να συλλάβουμε ένα πολύ υψηλότερο βαθμό επαλήθευσης. Μπορεί να υπάρχουν αξιώματα που έχουν άφθονες επαληθεύσιμες συνέπειες, ρίχνουν άπλετο φως πάνω σ' ένα ολόκληρο πεδίο και προσφέρουν ισχυρές μεθόδους για τη λύση προβλημάτων ... ώστε ανεξάρτητα από το αν έχουν εγγενή αναγκαιότητα ή όχι, να πρέπει να γίνουν δεκτά τουλάχιστον όπως γίνεται δεκτή μια καλά θεμελιωμένη φυσική θεωρία. (Gödel 1964, 477)

Αναφορές

Gödel, K. (1944): "Russell's Mathematical Logic" στο Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds.) (1983): *Philosophy of Mathematics*. 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press, σ. 447-469.

Gödel, K. (1964): "What Is Cantor's Continuum Problem?" στο Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds.) (1983): *Philosophy of Mathematics*. 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press, σ. 470-485.

[Απόδοση στα ελληνικά στο Χριστοδουλίδης, Π. (επιμ.) (1993): *Η Φιλοσοφία των Μαθηματικών*. Αθήνα: Γ. Α. Πνευματικός.]