

## Ενδεικτικά και Πρόχειρα Διατυπωμένα Θέματα

2017-2018

Παρακάτω διατυπώνονται με συντομία (και κάποια δόση «προχειρότητας») μερικά θέματα φιλοσοφίας των μαθηματικών σύμφωνα με την ύλη που διδάχθηκε στο μάθημα ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ της ΣΗΜΜΥ, ΕΜΠ, κατά το εαρινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2015-2016. Φυσικά, η λίστα είναι απλώς «ενδεικτική».

1. Οι διακρίσεις ‘αναγκαία / ενδεχομενική πρόταση’, ‘a priori / a posteriori πρόταση’, ‘αναλυτική / συνθετική πρόταση’ – και εξειδίκευση κατά Kant και Frege. Παραδείγματα.
2. Στάσεις απέναντι στο καθεστώς των μαθηματικών οντοτήτων (ρεαλισμός, ιδεαλισμός, νομιναλισμός) και τη σημασιολογία των μαθηματικών προτάσεων (ρεαλισμός και αντιρεαλισμός ως προς αληθοτιμή). Παραδείγματα φιλοσόφων που υιοθέτησαν τη μια ή την άλλη στάση.
3. Βασικές θέσεις της φιλοσοφίας του Πλάτωνα. Η αντίδραση του Πλάτωνα στη «δυναμική» ή «κατασκευαστική» γλώσσα των γεωμετρών.
4. Σκιαγράφηση και κριτική αποτίμηση του πλατωνισμού στη φιλοσοφία των μαθηματικών (καθεστώς μαθηματικών αντικειμένων, μαθηματική αλήθεια, μαθηματική γνώση).
5. Πώς και υπό ποιες συνθήκες / υποθέσεις / δεσμεύσεις οδηγεί ο ρεαλισμός ως προς την αληθοτιμή των μαθηματικών προτάσεων στον ρεαλισμό ως προς την οντολογία των μαθηματικών αντικειμένων;
6. Τι εννοούμε με την έκφραση «αναγκαιότητα και a priori φύση των μαθηματικών»; Τι πρόβλημα / δίλημμα θέτει η «αναγκαιότητα και a priori φύση των μαθηματικών» για τον εμπειρισμό; (Κατά τους εμπειριστές, όλη η γνώση γεγονότων της πραγματικότητας – γνώση που διακρίνεται από εκείνη που αφορά καθαρώς λογικές σχέσεις μεταξύ εννοιών – βασίζεται στην, ή προέρχεται από την, εμπειρία.) Πώς αντιμετώπισε ο Hume αυτό το πρόβλημα / δίλημμα;
7. Πώς «εξήγησαν» την «αναγκαιότητα και a priori φύση των μαθηματικών» οι πλατωνιστές, ο Kant, οι λογικιστές, κ.ά.
8. Ποια είναι τα κυριότερα προτερήματα και μειονεκτήματα της οντολογικής θέσης ότι τα μαθηματικά αντικείμενα είναι αυθύπαρκτες *αφηρημένες* οντότητες (δηλαδή, άφθαρτες και αναλλοίωτες οντότητες εκτός χώρου και χρόνου που στερούνται αιτιακών / αιτιωδών αλληλεπιδράσεων);
9. Ποιο πρόβλημα θέτει για τη φιλοσοφία των μαθηματικών η (απροσδόκητη) εφαρμοσιμότητα των μαθηματικών στις φυσικές και τις κοινωνικές επιστήμες; Πώς εξειδικεύεται / αντιμετωπίζεται το πρόβλημα αυτό στην περίπτωση (α) του πλατωνισμού, (β) της φιλοσοφίας των μαθηματικών του Kant, (γ) του λογικισμού, (δ) του φορμαλισμού και (ε) του δομισμού (στρουκτουραλισμού);
10. Η φιλοσοφία των μαθηματικών του Kant. Η διάκριση των προτάσεων (κρίσεων) της μορφής ‘S είναι P’ σε a priori / a posteriori και αναλυτικές / συνθετικές. Πώς είναι δυνατή η συνθετική a priori γνώση; Ποιος είναι ο ρόλος των συνθετικών a priori αρχών; Για ποιο λόγο οι (μη τετριμμένες) προτάσεις της αριθμητικής και της

γεωμετρίας είναι συνθετικές a priori; (Κατασκευή, καθαρή εποπτεία, χωροχρονικό πλαίσιο.) Με ποιο ακριβώς τρόπο συμβιβάζει η καντιανή φιλοσοφία την αναγκαιότητα και την a priori φύση των μαθηματικών με την επιτυχία εφαρμογής των μαθηματικών στη μελέτη του κόσμου της εμπειρίας; Τι προβλήματα έθεσαν για τη φιλοσοφία των μαθηματικών του Kant οι εξελίξεις στα μαθηματικά και τη φυσική κατά τον 19<sup>ο</sup> και τις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα;

**11.** Παράδοξα (Cantor, Russell, Ψεύτη, Berry) και αντιμετώπισή τους: Russell (θεωρία των τύπων και αρχή του φαύλου κύκλου), Zermelo, Tarski (η διάκριση γλώσσας-αντικείμενο και μεταγλώσσας).

**12.** Τι είναι ένας μη κατηγορηματικός ορισμός; Δώστε ένα παράδειγμα. Σχολιάστε την αποδοχή ή μη των μη κατηγορηματικών ορισμών στα μαθηματικά από διαφορετικές φιλοσοφικές απόψεις για το καθεστώς των μαθηματικών αντικειμένων.

**13.** Δικαιολογήστε τους παρακάτω ισχυρισμούς:

(α) Η παραδοχή ότι κάθε ιδιότητα, εκφρασμένη σε οποιαδήποτε γλώσσα, αρκεί για να ορίσει καλά ένα σύνολο οδηγεί σε παράδοξα.

(β) Δεν ισχύει ότι για κάθε μαθηματική θεωρία  $T$  και κάθε πρόταση  $p$  στη γλώσσα της  $T$ , αν η  $T$  είναι συνεπής τότε τουλάχιστον μια από τις θεωρίες  $T + p$  και  $T + \neg p$  δεν είναι συνεπής. Δώστε ένα παράδειγμα.

(γ) Δεν υπάρχει σύνολο όλων των συνόλων (με χρήση του θεωρήματος του Cantor, με χρήση του αξιωματικού σχήματος διαχωρισμού της θεωρίας συνόλων ZFC).

**14.** Δείξτε ότι αξίωμα ύπαρξης απείρου σε σύζευξη με το αξίωμα του δυναμοσυνόλου εισάγει «μη κατηγορηματικά στοιχεία» στην αξιωματική θεωρία συνόλων ZFC.

**15.** Διατυπώστε το αξίωμα της επιλογής της αξιωματικής θεωρίας συνόλων ZFC. Γιατί το αξίωμα αυτό θεωρήθηκε αμφιλεγόμενο; Και τι είδους επιχειρήματα συνηγορούν υπέρ της αποδοχής του;

**16.** Αναπτύξτε τη διάκριση μεταξύ σημασίας και αναφοράς στη θεωρία νοήματος του Frege (περιεχόμενο της διάκρισης και κίνητρα για την εισαγωγή της). Πώς ορίζει ο Frege τον όρο 'έννοια'; Παραδείγματα γλωσσικών εκφράσεων που εκφράζουν έννοιες κατά Frege.

**17.** Διατυπώστε τις βασικές θέσεις του λογικισμού στη φιλοσοφία των μαθηματικών. Παρουσιάστε με συντομία και συζητήστε κριτικά τον τρόπο με τον οποίο ο Frege προσέγγισε την έννοια του φυσικού αριθμού.

**18.** Συζητήστε κριτικά τη φιλοσοφία των μαθηματικών που φέρει το όνομα «φορμαλισμός παιγνίων» ή «φορμαλισμός-παιχνίδι».

**19.** Αναπτύξτε την κατά Hilbert διάκριση μεταξύ «πραγματικών» και «ιδεατών» ή «ιδανικών» μαθηματικών. Με αφορμή αυτή τη διάκριση, εντοπίστε τα καντιανά και τα φορμαλιστικά στοιχεία της φιλοσοφίας των μαθηματικών του Hilbert.

**20.** Σκιαγραφήστε χωρίς τεχνικές λεπτομέρειες το πρόγραμμα του Hilbert για τη θεμελίωση των μαθηματικών και τις δυσκολίες που προέβλεπαν για την ολοκλήρωση του προγράμματος αυτού τα θεωρήματα μη πληρότητας του Gödel.

**21.** Τι είναι η υπόθεση του συνεχούς του Cantor; Τι προβλήματα θέτει για την αξιωματική θεωρία συνόλων Zermelo-Fraenkel με επιλογή (ZFC); Ποια ήταν η στάση του Gödel απέναντι στα προβλήματα αυτά;

**22.** Συζητήστε κριτικά τις βασικές θέσεις της φιλοσοφίας των μαθηματικών του Gödel (πλατωνισμός και καντιανές επιρροές, αναλογία μεταξύ μαθηματικών και φυσικής, αναλογία μεταξύ μαθηματικής εποπτείας και αισθητηριακής αντίληψης, «επαγωγική» δικαιολόγηση αξιωμάτων, μαθηματική αλήθεια και μαθηματική βεβαιότητα).