

Frege

1. Μια πρόταση είναι *αναλυτική* αν και μόνο αν μπορεί να αποδειχθεί από τους νόμους της λογικής και ορισμούς με χρήση των κανόνων της λογικής.

2. *Δυο θέσεις του σύγχρονου λογικισμού*: (I) οι έννοιες των μαθηματικών μπορούν να παραχθούν από λογικές έννοιες μέσω ορισμών και (II) τα θεωρήματα των μαθηματικών μπορούν να παραχθούν από λογικά αξιώματα και ορισμούς μαθηματικών εννοιών μέσω καθαρής λογικής συναγωγής.

3. Η διάκριση σημασίας και αναφοράς:

- *Αναφορά όρου*: το αντικείμενο που υποδηλώνει ο όρος.
- *Σημασία όρου*: ένας τρόπος σήμανσης ή παρουσίασης του αντικειμένου που αποτελεί την αναφορά του όρου, ένας τρόπος νόησης της αναφοράς του όρου, «αυτό που κατέχουμε όταν κατανοούμε έναν όρο».

Ο Frege επεκτείνει τη διάκριση σημασίας και αναφοράς και στο νόημα των γλωσσικών προτάσεων.¹ Η σημασία μιας γλωσσικής πρότασης είναι η *σκέψη* που εκφράζει και η αναφορά της είναι η *αληθοτιμή* της. Ο Frege διατυπώνει ρητά τη θέση ότι η *σημασία κάθε έκφρασης προσδιορίζει την αναφορά της*.

4. Μια *έννοια* είναι μια συνάρτηση με πεδίο τιμών το σύνολο τιμών αληθείας $\{T, F\}$. Ένα αντικείμενο a ανήκει ή *υπάγεται* ή *ταιριάζει* στην έννοια G αν και μόνο αν η G απεικονίζει το a στην αληθοτιμή T – δηλαδή, αν και μόνο αν η αναφορά της ' $G(a)$ ' είναι η αληθοτιμή T , όπου με ' $G(x)$ ' έχουμε παραστήσει την έννοια για να τονίσουμε τη συναρτησιακή της φύση.

5. Δυο έννοιες G και H λέγονται *όμοιες* αν και μόνο αν υπάρχει 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των αντικειμένων που υπάγονται στη G και των αντικειμένων που υπάγονται στην H .

6. *Αρχή του Hume*: για οποιεσδήποτε έννοιες G και H , ο αριθμός της έννοιας G ισούται με τον αριθμό της έννοιας H αν και μόνο αν οι έννοιες G και H είναι όμοιες.

7. Ο *αριθμός μιας έννοιας* G ($\#(G)$) είναι το σύνολο όλων των εννοιών x που ανήκουν στην έννοια 'η x είναι έννοια όμοια με την έννοια G ' – δηλαδή, η έκταση της έννοιας 'έννοια όμοια προς την έννοια G '.

8. *Ορισμοί των φυσικών αριθμών*:

- 0 είναι ο αριθμός που ταιριάζει στην έννοια 'διάφορος του εαυτού του'. $0 =_{\text{ορσ}} \#(G)$ όπου $G(x) : x \neq x$. Τίποτα δεν υπάγεται στην έννοια 'διάφορος του εαυτού του'.
- 1 είναι ο αριθμός που ταιριάζει στην έννοια 'ίδιος με το 0'. $1 =_{\text{ορσ}} \#(G)$ όπου $G(x) : x = 0$. Ακριβώς ένα αντικείμενο, το 0, υπάγεται στην έννοια 'ίδιος με το 0'.
- 2 είναι ο αριθμός που ταιριάζει στην έννοια 'ίδιος με το 0 ή ίδιος με το 1'. $2 =_{\text{ορσ}} \#(G)$ όπου $G(x) : x = 0 \vee x = 1$. Ακριβώς δυο αντικείμενα, το 0 και το 1, υπάγονται στην έννοια 'ίδιος με το 0 ή ίδιος με το 1', κ.ο.κ.

9. *Σχέση διαδοχής μεταξύ των φυσικών αριθμών*: ο αριθμός n διαδέχεται τον αριθμό m αν και μόνο αν υπάρχει έννοια G και αντικείμενο x που υπάγεται στην G έτσι ώστε ο αριθμός που ταιριάζει στην έννοια G είναι n και ο αριθμός που ταιριάζει στην έννοια 'υπάγεται στην G αλλά δεν ταυτίζεται με το x ' είναι m .

10. *Ορισμός της κλάσης των φυσικών αριθμών*: Το n είναι φυσικός αριθμός αν και μόνο αν για κάθε έννοια G , αν ο 0 υπάγεται στην έννοια G και για κάθε αντικείμενο a από την πρόταση ότι το a υπάγεται στην G έπεται ότι κάθε διάδοχος του a υπάγεται στην G , τότε το n υπάγεται στην G . Σε σύγχρονο συμβολισμό,

¹ Εννοούμε εδώ τις *δηλωσιακές προτάσεις* – δηλαδή, γλωσσικές εκφράσεις p (πεπερασμένες ακολουθίες σημείων της γλώσσας) για τις οποίες έχει νόημα να ρωτήσουμε «Είναι αληθές ότι p ;» («φορείς αλήθειας / ψεύδους»).

² Εννοεί «ο n είναι ο άμεσος διάδοχος του m στη σειρά των φυσικών αριθμών» – δηλαδή, $n = m + 1$, όπως θα γράφαμε σήμερα.

n είναι φυσικός αριθμός $\Leftrightarrow (\forall G) \{ G(0) \wedge (\forall a)(\forall a') [(G(a) \wedge a' \text{ διαδέχεται } a) \rightarrow G(a')] \rightarrow G(n) \}$
όπου ' \Leftrightarrow ' είναι συντομογραφία του 'αν και μόνο αν'.