

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

GOTTLLOB FREGE

Ο Frege (1848-1925) είναι ένας από τους θεμελιωτές της σύγχρονης μαθηματικής λογικής και, κατά τον Michael Dummett⁽¹⁾, «ο πρώτος σύγχρονος φιλόσοφος», επειδή δέχεται τη λογική ως θεμέλιο της φιλοσοφίας και όχι τη γνωσιολογία, όπως συμβαίνει από την εποχή του Descartes. Στην *Εννοιολογία του Begriffsschrift*, 1879) ο Frege παρουσιάζει το πρώτο μοντέρνο σύστημα λογικής (αλλά ο συμβολισμός του είναι δύσχερητος και επικρατεί η γερική του πρότυπο ο Giuseppe Peano), στα *Θεμέλια της Αριθμητικής* (*Die Grundlagen der Arithmetik*, 1884) διατυπώνει τη θέση του «λογικισμός», σύμφωνα με την οποία η αριθμητική ανάγεται στη λογική, στο δίτομο *Βασικές αρχές της αριθμητικής* (*Grundgesetze der Arithmetik I: 1893, II: 1903*) προσαρτάει να υιοθετήσει το πρόγραμμά του.

Η επιλογή που δημοσιεύεται εδώ είναι από τα *Θεμέλια της αριθμητικής* και καλύπτει τις παραγράφους 55 έως 91· οι παραγράφους 55-86 ανήκουν στο τέταρτο κεφάλαιο που έχει τον τίτλο «Η έννοια του αριθμού» και οι παραγράφους 87-91 ανήκουν στο πέμπτο κεφάλαιο που έχει τον τίτλο «Συμπέρασμα». Για τη μετάφραση διαστίφηκα στο γερμανικό πρωτότυπο και συμπουλεύθηκα τις μεταφράσεις του J. L. Austin (Blackwell, 1953) και του M. S. Mahoney (στη συλλογή των R. Benacerraf και Putman, Blackwell, 1964).

Η ανάλυση της αριθμητικής στη θεωρία των συνόλων⁽²⁾ βασίζεται στην έννοια της ισοαριθμότητας δύο συνόλων, η οποία ερμηνεύεται ως ύπαρξη μιας αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης του ενός συνόλου πάνω στο άλλο. Αν δηλαδή με $J(\varphi, \alpha, \beta)$ συμβολίσουμε την πρόταση

η φ είναι αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το α και πεδίο τιμών το β ,

τότε η ισοαριθμότητα ορίζεται ως εξής:

$$(1) \quad \alpha \sim \beta =_{df} (\exists \varphi) J(\varphi, \alpha, \beta).$$

Η διατύπωση της πρότασης $J(\varphi, \alpha, \beta)$ απαιτεί τουλάχιστον τριτοβάθμια θεωρία με πεδίο αναφοράς $P^3(D)$, δηλ. το σύνολο των συνόλων από άτομα του D . Η σχέση $\alpha \sim \beta$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας, επομένως διαμερίζει το σύνολο $P^3(D)$ σε τάξεις ισοδυναμίας. Η τάξη στην οποία ανήκει το σύνολο α λέγεται πρώτοβάθμια αριθμός του α και συμβολίζεται με το $\text{card}(\alpha)$ ή με άλλους τρόπους.

Θέτουμε, λοιπόν,

$$(2) \text{ card}(a) =_{df} \{x: (\exists \varphi) J(\varphi, a, \delta)\}.$$

Αν δεχθούμε την ύπαρξη μιας οντότητας που αντιστοιχεί στην ιδιότητα «διάφορος του εαυτού του» και την ονομάσουμε κενό σύνολο A , δηλαδή αν θέσουμε:

$$(3) A =_{df} \{x: x \neq x\},$$

μπορούμε να ορίσουμε τον μηδέν ως

$$(4) 0 =_{df} \text{card}(A).$$

Επειδή το κενό σύνολο που αντιστοιχεί σε κατηγορήματα μιας θέσης είναι μονοσήμαντα ορισμένο λόγω της εκτασιακής σημασιολογίας, ο μηδέν θα είναι μονοσύνολο, δηλ. σύνολο με ένα μόνο στοιχείο.

$$(7) 0 = \{A\}.$$

Για να ορίσουμε την έννοια του άμεσου διαδόχου, ορίζουμε πρώτα την έκφραση ο z είναι διάδοχος του x , συμβολικά Szx , θέτοντας

$$(8) Sxz =_{df} \text{card}\{y: y = x \cup \{x\}\}.$$

επομένως η συναρτηση S ορίζεται ως

$$(9) S =_{df} \{z x: z = x \cup \{x\}\}.$$

Τέλος, για να ορίσει την έννοια του φυσικού αριθμού ο Frege παρατηρεί ότι το σύνολο N των φυσικών αριθμών είναι το ελάχιστο από τα σύνολα που περιέχουν τον 0 , τον διάδοχο του 0 , τον διάδοχο του διαδόχου του 0 κ.ο.κ.ε. Η σχέση με τον 0 ενός αριθμού x ο οποίος ανήκει στην αλυσίδα των διαδόχων του 0 λέγεται προγονική της σχέσης διαδοχής, σημειώνεται με το S^* και, δάσει της παραπάνω παρατήρησης, ορίζεται ως:

$$(10) S^*(x, 0) =_{df} (VF) [F0 \wedge (Vz) (Fy \wedge Sxz) \rightarrow Fz] \rightarrow Fx.$$

Με τον τελικό τύπο ορίσαμε το κατηγορήμα «ο μηδέν είναι πρόγονος του x », επομένως και την ιδιότητα «ο x είναι φυσικός αριθμός», δηλαδή έχουμε ότι:

$$(11) Nx =_{df} S^*(x, 0).$$

Έχουμε, λοιπόν, ορίσει τους αριθμικούς όρους της αριθμητικής:

μηδέν (0), διάδοχος (S), φυσικός αριθμός (N).

Π.Χ.

Κάθε επιμέρους αριθμός είναι αυθυπόστατο αντικείμενο

55. Τώρα που έχουμε μάθει ότι το περιεχόμενο μιας αριθμητικής δήλωσης [Zahlangabe] είναι μια βεβαίωση [Aussage] σχετική με μία έννοια [Begriff], μπορούμε να δοκιμάσουμε να συμπληρώσουμε τους ορισμούς του Leibniz των επιμέρους αριθμών δίνοντας τους ορισμούς του 0 και του 1 .

Ετοιμάζομαστε να ορίσουμε: ο αριθμός 0 ταυτίζεται σε μία έννοια αν ο' αυτήν δεν υπάρχει κανένα αντικείμενο. Αλλά αυτό φαίνεται να ισοδυναμεί με αντικατάσταση του 0 με το «κανένα» που έχει την ίδια αναφορά [Beideutung] μ' αυτό. Γι' αυτό είναι προτιμητέα η ακόλουθη διατύπωση: ο αριθμός 0 ταυτίζεται [Zukommt] σε μία έννοια, αν η πρόταση [Satz] ότι ο a δεν υπάρχει ο' αυτή την έννοια ισχύει πάντοτε, οτιδήποτε και αν είναι το a .

Με τον ίδιο τρόπο θα μπορούσε κανείς να πει: ο αριθμός 1 ταυτίζεται στην έννοια F , αν η πρόταση ότι ο a δεν υπάρχει στην F δεν ισχύει γενικά, ό,τι και να είναι ο a , και αν από τις προτάσεις:

«ο a υπάρχει στην F » και ο «δεν υπάρχει στην F »

πάντα απορρέει ότι ο a συμπίπτει με τον δ .

Πρέπει ακόμα να ορίσουμε γενικά τη μετάδοση από έναν αριθμό στον επόμενο. Θα δοκιμάσουμε την ακόλουθη διατύπωση: ο αριθμός $(n + 1)$ ταυτίζεται σε μια έννοια F , αν υπάρχει ένα αντικείμενο a που να υπάρχει στην F και να είναι τέτοιο ώστε ο αριθμός n να ταυτίζεται στην έννοια «υπάρχει στην F , αλλά δεν είναι ο a ».

56. Αυτοί οι ορισμοί μας έρχονται τόσο αυθόγητα, στο φως των προηγούμενων αποτελεσμάτων, που πρέπει να εξετάσουμε τους λόγους για τους οποίους δεν μπορούμε να τους θεωρήσουμε ικανοποιητικούς.

Πρώτος θα προκαλέσει ενδοιασμούς ο τελευταίος ορισμός: διότι, για την ακρίβεια, το νόημα [Sinn] της έκφρασης «ο αριθμός n ταυτίζεται στην έννοια G » μας είναι εξίσου άγνωστο όσο το νόημα της έκφρασης «ο αριθμός $(n + 1)$ ταυτίζεται στην έννοια F ». Ασφαλώς, μπορούμε, χρησιμοποιώντας αυτόν

τον ορισμό και τον προτελευταίο, να πούμε τι σημαίνει [bedeute] η:

«ο αριθμός $1 + 1$ ταιριάζει στην έννοια F »

και, κατόπιν, με τη δοθείσα της, να προσοδολογήσουμε το νόημα της έκφρασης:

«ο αριθμός $1 + 1 + 1$ ταιριάζει στην έννοια F »

κ.ο.κ.ε. Αλλά, για να δώσουμε ένα χονδροειδές παράδειγμα, δεν μπορούμε ποτέ να αποφασίσουμε: χρησιμοποιώντας τους ορισμούς μας, αν ο αριθμός *Ιούλιος Καίσαρ* ταιριάζει σε μια έννοια ή αν αυτός ο γνωστός κατακτητής της Γαλλίας είναι αριθμός ή όχι. Επιπλέον δεν μπορούμε με τη δοθείσα των ορισμών που προτείνουμε να αποδείξουμε ότι, αν ο αριθμός a ταιριάζει στην έννοια F και ο αριθμός b ταιριάζει στην ίδια έννοια, τότε κατ' ανάγκη $a = b$. Δεν θα μπορούσαμε, λοιπόν, να αιτιολογήσουμε την έκφραση «ο αριθμός που ταιριάζει στην έννοια F », και επομένως θα μας ήταν αδύνατο γενικά να αποδείξουμε μία αριθμητική ταυτότητα, αφού δεν θα μπορούσαμε να απομονώσουμε έναν καθορισμένο αριθμό. Έχουμε την αυταπάτη ότι ορίσαμε τον 0 και τον 1 στην πραγματικότητα προσοδολογήσαμε μόνο το νόημα των εκφράσεών:

«ο αριθμός 0 ταιριάζει σε»,

«ο αριθμός 1 ταιριάζει σε».

αλλά δεν επιτρέπεται να ξεχωρίσουμε το 0 και το 1 ως αυθυπόστατα αντικείμενα τα οποία μπορούν να αναγνωριστούν και άλλη φορά [ως τα ίδια].

57. Εδώ πρέπει να εξετάσουμε κάπως καλύτερα τι εννοούμε με την έκφραση «το περιεχόμενο μιας αριθμητικής δήλωσης είναι μία βεβαίωση σχετική με μία έννοια». Στην πρόταση «ο αριθμός 0 ταιριάζει στην έννοια F », ο 0 είναι μόνο τμήμα του κατηγορημάτων, αν θεωρήσουμε ότι η έννοια F είναι το πραγματικό υποκείμενο. Γι' αυτό και απέφυγα να πω ότι ένας αριθμός όπως ο 0 , ο 1 ή ο 2 είναι *ιδιότητα* μιας έννοιας. Ο μεμονωμένος αριθμός εμφανίζεται ως αυθυπόστατο αντικείμενο, ακριδώς επειδή αποτελεί μέρος της βεβαίωσης. Προηγούμενος επισήμανα ότι λέμε «ο αριθμός 1 », όπου γόδος του οριστικού άρθρου είναι να τοποθετεί τον 1 στα αντικείμενα. Πάντως η αριθμητική δείχνει αυτό το αυθυπόστατο, όπως λ.χ. στην ταυτότητα $1 + 1 = 2$. Εδώ προέχει να φτάσουμε σε μία έννοια του αριθμού που να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην επιστήμη· γι' αυτό δεν πρέπει να μας ενοχλεί το γεγονός ότι στην καθημερινή χρήση ο αριθμός παρουσιάζεται σε κατηγορηματικές κατασκευές. Αυτό μπορεί πάντα να αποφευχθεί. Α.χ. η πρόταση «ο Δίας έχει τέσσερα φεγγάρια» μπορεί να μεταλλαχθεί στην «ο αριθμός των φεγγαίων του Δία είναι τέσσερα». Εδώ δεν πρέπει να πιά-

σουμε το «είναι» ως απλό συνδεδεικό, όπως στην πρόταση «ο ουρανός είναι γαλάζιος». Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι μπορούμε να πούμε: «ο αριθμός των φεγγαίων του Δία είναι τέσσερα» ή «είναι ο αριθμός 4». Εδώ το «είναι» έχει το νόημα του «ταυτίζεται» ή «συμπίπτει». Όταν έχουμε μια ταυτότητα που βεβαιώνει ότι η έκφραση «ο αριθμός των φεγγαίων του Δία» αναφέρεται [bezeichnet] στο ίδιο αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται η λέξη «τέσσερα». Η μορφή της ταυτότητας κυριαρχεί ανάμεσα στις προτασιακές μορφές της αριθμητικής. Δεν είναι αντίληψη εναντίον αυτής της ερμηνείας το ότι η λέξη «τέσσερα» δεν περιέχει τίποτε για τον Δία ή το φεγγάρι. Και στο όνομα «Κολόμβος» δεν υπάρχει τίποτα που να σχετίζεται με ανακάλυψη ή Αμερική, και όμως για τον ίδιο άνθρωπο λέμε «Κολόμβος» και «αυτός που ανακάλυψε την Αμερική».

58. Θα μπορούσε κανείς να αντιτάξει ότι, για το αντικείμενο που ονομάζουμε τέσσερα ή ο αριθμός των φεγγαίων του Δία, δεν μπορούμε να σχηματίσουμε καμία παράσταση? [Vorstellung] που θα το καθιστούσε αυθυπόστατο. Αλλά γι' αυτό δεν φτάνει το αυθυπόστατο που αποδώσαμε στον αριθμό. Ασφαλώς θα ήθελε κανείς να πιστεύει ότι, όταν έχουμε την παράσταση τεσσάρων κουκκίδων πάνω σε ένα ζάρι, παρουσιάζεται κάτι που να αντιστοιχεί στη λέξη «τέσσερα» – αυτό όμως είναι ψευδοαίτιση. Φτάνει να σκεφθεί κανείς ένα πράσινο λιβάδι και να δοκιμάσει αν η παράσταση αληθείς, όταν αντικαταστήσουμε το αόριστο άρθρο με το αριθμητικό «ένα». Τίποτε δεν προστίθεται, ενώ στην παράσταση ασφαλώς υπάρχει κάτι που αντιστοιχεί στη λέξη «πράσινος». Αν φανταστεί κανείς την τυπωμένη λέξη «μπλε»³, μ' αυτό δεν θα σκεφτεί κανέναν αριθμό. Αν τώρα αναγνωρίσουμε πόσα γράμματα έχει η λέξη, το αποτέλεσμα είναι ο αριθμός 4· ωστόσο, μ' αυτό η παράσταση δεν καθορίζεται περισσότερο, αλλά μπορεί να μείνει εντελώς αμετάβλητη. Εισάγοντας την έννοια «γράμμα της λέξης Μπλε» ανακαλύπτουμε τον αριθμό. Στην περίπτωση των τεσσάρων κουκκίδων του ζαριού, το πράγμα δεν είναι τόσο φανερό, επειδή εξαιτίας της ομοιότητας των κουκκίδων, η έννοια μας επιδιόχεται τόσο άμεσα που δύσκολα παρατηρούμε την παρόμοιά της. Δεν μπορούμε να σχηματίσουμε παράσταση του αριθμού ως αυθυπόστατο αντικείμενο ούτε ως ιδιότητα, γιατί δεν είναι κάτι το αισθητό ή ιδιότητα ενός εξωτερικού αντικείμενου. Αυτό είναι σαφέστερο στην περίπτωση του αριθμού 0 . Μάταια θα προσπαθήσουμε να φανταστούμε 0 ορατά άτομα. Μπορούμε, βέβαια, να φανταστούμε έναν ουρανό εντελώς σκεπασμένο με σύννεφα· αλλά σ' αυτό δεν υπάρχει τίποτε που να αντιστοιχεί στη λέξη «άστρο» ή στο 0 . Το μόνο που φαντάζεται κανείς είναι μία κατάσταση στην οποία θα ήταν φυσικό να συμπεράνει: τώρα δεν μπορεί κανείς να δει κανένα άστρο.

59. Ίσως κάθε λέξη να ξυπνάει μέσα μας κάποιο είδος παράστασης, ακόμα και λέξεις όπως «μόνο»: αλλά δεν είναι ανάγκη η παράσταση να αντιστοιχεί στο περιεχόμενο [Inhalt] της λέξης· μπορεί να είναι εντελώς διαφορετική για διαφορετικούς ανθρώπους. Αυτό που κάνουμε τότε είναι να φανταζόμαστε μία κατάσταση που απαιτεί μία πρόταση στην οποία παρουσιάζεται η λέξη· ή, μπορεί να συμβεί, η προφορική λέξη να φέρονται ξανά στη μνήμη μας τη γοστή λέξη.

Αυτό δεν συμβαίνει μόνο στην περίπτωση των [γραμματικών] μορφών. Δεν υπάγχει καμία αμφιβολία ότι δεν μπορούμε να σχηματίσουμε παράσταση της απόστασής μας από τον ήλιο. Γιατί, ακόμα κι αν γνωρίζουμε τον κανόνα ότι πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τη μετρητική γάδο τόσες φορές, ποτέ δεν κατορθώνουμε να κατασκευάσουμε με τη βοήθειά της μία εικόνα που να προσεγγίζει, έστω και αιυθόγα, αυτό που θέλουμε. Αυτό όμως δεν είναι λόγος ώστε να αμφιβάλλουμε για την ορθότητα του υπολογισμού με τον οποίο δρήκαμε την απόσταση, ούτε μας εμπροδίζει να θεωρήσουμε την απόσταση ως γεγονός πάνω στο οποίο θα θεμελιωθούν άλλα συμπεράσματα.

60. Αλλά δεν μπορούμε να φανταστούμε ακόμα και ένα τόσο συγκεκριμένο πράγμα, όπως είναι η Γη, έτσι όπως τη γνωρίζουμε· ακριβέστερα σε μία σφαίρα μέσω μεγέθους, που παίζει το ρόλο συμπόλου της γης, μοιωνότι γνωρίζουμε καλά πως η μία διαφέρει πολύ από την άλλη. Έτσι, αν και συχνά η παράστασή μας δεν συμπιέζεται καθόλου μ' αυτό που θέλουμε, εκφέρουμε κρίσεις για αντικείμενα, όπως η γη, με μεγάλη σιγουριά, ακόμα και όταν πρόκειται για το μέγεθός της.

Συχνά η σκέψη μας οδηγεί πέρα από τη φαντασία, αλλά μ' αυτό δεν καθιστά αθεμελίωτα τα συμπεράσματά μας. Και μολονότι, όπως φαίνεται, για μας τους ανθρώπους είναι αδύνατη η σκέψη χωρίς παραστάσεις, είναι ωστόσο δυνατόν η σχέση των παραστάσεων μ' αυτό που οχεφτόμαστε να είναι εντελώς επιφανειακή, αυθαίρετη και συμβατική.

Όποτε το ότι δεν μπορούμε να σχηματίσουμε παράσταση του περιεχομένου μιας λέξης, δεν αποτρέπει λόγο για να της ασηνηθούμε την αναφορά [Be-deutung] ή για να αποκαλείουμε τη χρήση της. Το ότι ωστόσο τείνουμε να το κάνουμε, οφείλεται πιθανόν στο γεγονός ότι όταν φωτίζουμε για την αναφορά των λέξεων, τις βλέπουμε χωριστά, και αυτό μας οδηγεί στο να δεχθούμε ως αναφορά μία [νοητική] παράσταση. Έτσι, η λέξη για την οποία δεν έχουμε αντιστοιχη εσωτερική εικόνα, φαίνεται σαν να μην έχει περιεχόμενο. Αλλά πρέπει κανείς πάντα να εξετάζει πλήρεις προτάσεις. Στην πραγματικότητα, οι λέξεις έχουν αναφορά μόνο μέσα σε μία πρόταση. Μπορεί οι νοητικές εικόνες να αιωρούνται μπροστά μας όλο τον καιρό [που διαδίδουμε μία πρόταση], αλλά δεν είναι ανάγκη αυτές να αντιστοι-

χούν στα λογικά στοιχεία της κρίσης [Urteil]. Αρκεί να έχει νόημα η τασ ως ολόκληρα από αυτό τα μέρη της αντάντ το περιεχόμενό τους. Μου φαίνεται πως προσομοίωσ αυτής της παατήρησης είναι να φω διάφορες δύοκολες έννοιες, ανάμεσά τους και την έννοια του απειροσ και πιθανόν η σημασία της να μην περιούστατο που απαιτώ για τους

Δεν πρέπει να θεωρηθεί ότι το αυθυπόστατο που απαιτώ για τους τους σημαίνει ότι τα αριθμητικά [Zahlwort] αναφέρονται σε κάτι, και όταν δεν είναι μέρη μιας πρότασης· θέλω μόνο να αποκαλώ τη χι τέτοιων λέξεων ως κατηγορημάτων [Praedical] ή γνωρημάτων [Aitri γιατί μια τέτοια χρήση αλλοιώνει κάπως την αναφορά τους.

61. Ωστόσο, ίσως κάποιος αντιτάξει ότι, ακόμα και αν δεν μπορούμε φανταστούμε τη Γη, αυτή είναι πάντως ένα εξωτερικό πράγμα που κ λαμβάνει μία καθορισμένη θέση. Αλλά ο αριθμός 4 πού είναι; Δεν ούτε έξω από μας ούτε μέσα μας. Αυτό είναι ωστό, αν το εννοήσω χωρικό τρώτο. Δεν έχει νόημα να καθορίσουμε τη θέση [με συνταγμα του αριθμού 4· από αυτό όμως απορρέει μόνο ότι ο 4 δεν είναι αντικει στο χώρο, όχι ότι δεν είναι αντικείμενο. Δεν συμβαίνει κάθε αντικείμεν δόικεται κάπου. Μ' αυτή την έννοια, ακόμα και οι παραστάσεις μ είναι μέσα μας (κάτω από το δέγμα μας). Μέσα μας υπάγχουν γαγγλ κύτταρα, αιμοσφαίρια κτλ., αλλά καμία παράσταση. Γι' αυτές δεν γούν να χρησιμοποιηθούν χωρικά κατηγορήματα: μία παράσταση δ είναι ούτε αριθμετά ούτε δεξιά μας άλλης· δεν έχουν αποστάσεις με τους που να μπορούν να προσδιοριστούν σε χιλιοστμετρα. Αν όμως μένομε να λέμε ότι είναι μέσα μας, τότε εννοούμε ότι είναι υποκειμενι

Αλλά κι αν ακόμα το υποκείμενο δεν κατάλαμβάνει καμία θέση στο πο, πώς είναι δυνατόν ο αριθμός 4 που είναι αντικειμενικός να μη βγ ται πουθενά; Εγώ όμως υποστηρίζω ότι εδώ δεν υπάγχει καμία αντίφ Είναι γεγονός ότι ο αριθμός 4 είναι ακριβώς ο ίδιος για όλους όσοι λούνται μ' αυτόν· αυτό όμως δεν έχει καμία σχέση με τη χωρικότητα συμβαίνει να κατέχει τόπο κάθε αντικειμενικό αντικείμενο [objective genstand].

Για να έχουμε την έννοια του αριθμού, πρέπει να προσδιορίσουμε το ν της αριθμητικής ταυτότητας.

62. Λοιπόν, πώς μας δίνονται οι αριθμοί, αν δεν μπορούμε να έχουμε ράσταση ή εποπτεία [Anschauung] τους; Οι λέξεις έχουν αναφορά στο αναπαριστό της πρότασης. Πρέπει, λοιπόν, να ορίσουμε το ν μιας πρότασης στην οποία παρουσιάζονται τα αριθμητικά. Αυτό, αρ φαίνεται να αφήνει μεγάλα περιθώρια, αλλά έχουμε ήδη δεχθεί ό

αριθμητικά πρέπει να εννοηθούν ως κάτι που συμβολίζει αυθυπαρξιακά αντικείμενα. Και αυτό αρκεί για να μας δώσει μια τάξη προτάσεων που πρέπει να έχουν νόημα, δηλαδή την τάξη εκείνων των προτάσεων που εκφράζουν το ότι αναγνωρίσαμε έναν αριθμό ως τον ίδιο. Αν για μας το συμβόλο *a* αναφέρεται σε ένα αντικείμενο, πρέπει να διαθέτουμε ένα κριτήριο για να αποφασίζουμε σε κάθε περίπτωση αν το *b* είναι το ίδιο με το *a*, ακόμα και αν δεν μπορούμε πάντοτε να ερασιμάσουμε αυτό το κριτήριο. Στην προκειμένη περίπτωση, πρέπει να εξηγήσουμε το νόημα της πρότασης:

«ο αριθμός που ταυτίζεται στην έννοια *F* είναι ο ίδιος αριθμός με εκείνον που ταυτίζεται στην έννοια *G*»,

δηλαδή πρέπει να αναπαράγουμε το περιεχόμενο αυτής της πρότασης με άλλο τρόπο, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την έκφραση:

«ο αριθμός που ταυτίζεται στην έννοια *F*».

Μ' αυτό δίνουμε ένα γενικό κριτήριο για την ταυτότητα των αριθμών. Όταν μ' αυτόν τον τρόπο προσομοιωτήμε ένα μέσο για να φτάσουμε σε έναν καθολοποιημένο αριθμό και να τον αναγνωρίσουμε ως τον ίδιο αριθμό, τότε μπορούμε να του αποδώσουμε ένα αριθμητικό ως κίγιο όνομά του.

63. Ο Humpe⁶ μνημονεύει ένα τέτοιο μέσο: «Όταν δύο αριθμοί έχουν συντεθεί με τέτοιο τρόπο, ώστε ο ένας να έχει πάντα μία μονάδα που να αντιστοιχεί σε κάθε μονάδα του άλλου, τους λέμε ίσους». Φαίνεται πως πρόοφατα η γνώμη ότι η αριθμητική ιδιότητα ή ταυτότητα πρέπει να οριστεί μέσω της αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας κερδίζει όλο και περισσότερο μαθηματικούς⁷. Αλλά αμέσως γεννιούνται μερικές λογικές αμφιβολίες, και δεν πρέπει να τις παραμερίσουμε χωρίς να τις εξετάσουμε.

Η σχέση της ταυτότητας δεν παρονοιάζεται μόνο στους αριθμούς. Αυτό αυτό φαίνεται να απορρέει το ότι δεν πρέπει να την ορίσουμε μόνο στην περίπτωση του αριθμού. Θα περίμενε κανείς ότι πρώτα θα έπρεπε να έχει προσδιοριστεί η έννοια της ταυτότητας και ότι, κατόπιν, από αυτήν και από την έννοια του αριθμού πρέπει να είναι δυνατόν να συμπεράνουμε πότε ένας αριθμός συμπίπτει με έναν άλλο, χωρίς γι' αυτόν να σκοπό να χρειάζομαστε έναν ειδικό ορισμό της αριθμητικής ταυτότητας.

Σε αντίθεση με αυτό, πρέπει να σημειώσουμε ότι για μας δεν έχει ακόμη προσδιοριστεί η έννοια του αριθμού, αλλά ότι πρέπει να καθοριστεί στο φως του ορισμού της αριθμητικής ταυτότητας. Σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε το περιεχόμενο μιας κρίσης που να μπορεί να θεωρηθεί ως ταυτότητα της οποίας τα [δύο] μέλη είναι αριθμοί. Δεν θέλουμε λοιπόν, να αγίσουμε την ταυτότητα ειδικά γι' αυτή την περίπτωση, αλλά, θεωρώντας

ως ήδη γνωστή την έννοια της ταυτότητας, να τη χρησιμοποιήσουμε ως μέσο για να φτάσουμε σ' αυτό που πρέπει να λογίζεται ως ταυτόν. Ομοιολογούμενος, αυτό φαίνεται να είναι ένας πολύ ασυνήθιστος τρόπος ορισμού, που οι Λογικοί δεν πρόσεξαν αρκετά· ωστόσο όμως δεν είναι ανήκοντος, όπως μπορεί να देखθεί με μερικά παραδείγματα.

64. Η κρίση: «η ευθεία *a* είναι παράλληλη προς την ευθεία *b*» ή συμβολικά:

a // *b*

μπορεί να ερμηνευθεί ως ταυτότητα. Κάνοντάς το έχουμε την έννοια της κατεύθυνσης, και λέμε: «η κατεύθυνση της ευθείας *a* ταυτίζεται με την κατεύθυνση της ευθείας *b*». Έτσι αντικαθιστούμε το σύμβολο '//' με το γενικότερο σύμβολο '=' , κατανέμεντας το ειδικό περιεχόμενο του πρώτου στα *a* και *b*. Χωρίζουμε το περιεχόμενο με τρόπο που να διαφέρει από τον αρχικό, και έτσι έχουμε μία νέα έννοια. Συχνά, βέβαια, αντιλαμβάνομαστε το πράγμα με αντίστροφο τρόπο, και πολλοί μέλητες ορίζουν: παράλληλες είναι οι ευθείες που έχουν την ίδια κατεύθυνση. Τότε η πρόταση «οι ευθείες που είναι παράλληλες προς την ίδια ευθεία είναι μεταξύ τους παράλληλες», μπορεί να αποδειχθεί πολύ εύκολα βάσει της ανάλογης πρότασης για πράγματα που ταυτίζονται με το ίδιο πράγμα. Δυστυχώς αυτή η μέθοδος δίνει τα πράγματα με το κεφάλι κάτω και τα πόδια πάνω! Διότι ακριβώς καθετί το γεωμετρικό πρέπει αρχικά να δίνεται στην εποπτεία. Και τώρα γιατί αν κανείς έχει εποπτεία της κατεύθυνσης μιας ευθείας γραμμής. Ασφαλώς εποπτεία της ευθείας· αλλά μπορεί κανείς να διακρίνει ανάμεσα σ' αυτή την ευθεία και την κατεύθυνσή της; Μάλλον δύσκολο! Ανακαλύπτουμε την έννοια της κατεύθυνσης μόνο ως αποτέλεσμα μιας νοητικής διεργασίας που συνδέεται με την εποπτεία. Από την άλλη μεριά, έχουμε μία παραόσταση των παράλληλων ευθειών. Η εύκολη απόδειξή μας γίνεται δυνατή, γιατί στη γρήση της λέξης «κατεύθυνση» δεχθήκαμε λάθοςια αυτό που έπρεπε να αποδειχθεί· γιατί, αν η πρόταση «αν δύο ευθείες είναι παράλληλες προς την ίδια ευθεία, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες» ήταν ψευδής, τότε δεν θα μπορούσαμε να μεταμορφώσουμε την *a*//*b* σε ταυτότητα.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε, από τον παραλληλισμό των επιπέδων, να έχουμε μία έννοια που να αντιστοιχεί στην έννοια της κατεύθυνσης προκειμένου για ευθείες γραμμές. Είδα να χρησιμοποιούν το όνομα «προσανατολισμός» [Stellung] γι' αυτή την έννοια. Από τη γεωμετρική ομοιότητα αντλούμε την έννοια του σχήματος, έτσι ώστε, λ.χ., αντί να λέμε «τα δύο τρίγωνα είναι όμοια», λέμε «τα δύο τρίγωνα έχουν την ίδια μορφή [Gestalt]» ή «η μορφή του ενός συμπίπτει με τη μορφή του άλλου». Έτσι, μπορεί κα-

νείς, με τον ίδιο τρόπο, από την ιδιότητα της συν-γρομμικότητας των γεωμετρικών σχημάτων, να αντιλήσει και άλλη έννοια στην οποία δεν έχει ακόμα δοθεί όνομα.

65. Τώρα, για να περάσουμε από την παραλλαγή⁸ στην έννοια της κατεύθυνσης, ας δοκιμάσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Η πρόταση

«η ευθεία α είναι παράλληλη προς την ευθεία β »

πρέπει να σημαίνει ότι και η

«η κατεύθυνση της ευθείας α ταυτίζεται με την κατεύθυνση της ευθείας β ».

Αυτός ο τρόπος ορισμού διαφέρει από τον συνηθισμένο τρόπο στο βαθμό που φαινομενικά προσδιορίζει την ήδη γνωστή σχέση της ταυτότητας, ενώ στην πραγματικότητα θα έπρεπε να εισαγάγει την έκφραση «η κατεύθυνση της ευθείας α », η οποία σ' αυτόν παρονοιάζεται μόνο συμπωματικά. Από αυτό πηγάει η δεύτερη αμφιβολία – μήπως μια τέτοια μέθοδος μας οδηγεί σε αντιφάσεις με τους γνωστούς νόμους της ταυτότητας. Τι είναι αυτοί οι νόμοι; Σς αναλυτικές αλήθειες πρέπει να μπορούν να εξάχθουν αποκλειστικά από την ίδια την έννοια. Ο Leibniz⁹ ορίζει:

«Eadem sunt, quorum unum protest substitui alteri salva veritate»

[«Ίδια είναι τα πράγματα, όταν η αντικατάσταση του ενός από το άλλο δεν διαταράσσει την αλήθεια»].

Αυτό θα υποβηθισω ως ορισμό της ταυτότητας. Δεν έχει καμία σπουδαιότητα αν χρησιμοποιούμε, όπως ο Leibniz, «ίδιο» ή «ταυτίζεται». Το «ίδιο» [dasselbe] φαίνεται να εκφράζει την πλήρη συμφωνία, το «ταυτίζεται» [gleich] μόνο συμφωνία ως προς αυτόν ή εκείνο τον παράγοντα: μπορεί όμως κανείς να υποβηθισεί έναν εκφραστικό τύπο που θα εξασφαλίσει τη διαφορά, λ.χ., αντί οι «ευθείες ταυτίζονται ως προς το μήκος», μπορούμε να πούμε «τα μήκη των ευθειών ταυτίζονται» ή «είναι τα ίδια», και αντί κοι επιφάνειες ταυτίζονται ως προς το χρώμα», «τα χρώματα των επιφανειών ταυτίζονται». Έτσι, χρησιμοποιήσαμε τη λέξη αυτή [δηλ. ίδιος, ταυτός] στα προηγούμενα παραδείγματα. Στην πραγματικότητα, όλοι οι νόμοι της ταυτότητας παραλαμβάνονται στην αρχή της καθολικής αντικαταστασιμότητας.

Για να αυτολογήσουμε, λοιπόν, τον προτεινόμενο ορισμό της κατεύθυνσης μιας ευθείας, θα έπρεπε να αποδείξουμε ότι, αν η ευθεία α είναι πα-

ράλληλη προς την ευθεία β , η έκφραση

«η κατεύθυνση της β »

μπορεί παντού να αντικαταστήσει την έκφραση

«η κατεύθυνση της α ».

Αυτό γίνεται εύκολα κατανοητό, αν σκεφτούμε ότι, αρχικά, δεν γνωρίζουμε καμία δέσωση σχετική με την κατεύθυνση μιας ευθείας γραμμής, εκτός από το ότι αυτή συμφωνεί με την κατεύθυνση μιας άλλης ευθείας. Πρέπει λοιπόν να δείξουμε ότι η αντικατάσταση είναι δυνατή σε μία ταυτότητα αυτού του τύπου ή σε περιεχόμενα κρίσεων οι οποίες περιέχουν ως συστατικά στοιχεία¹¹ τους τέτοιες ταυτότητες. Θα έπρεπε λοιπόν πρώτα να οριστεί κάθε άλλη δέσωση σχετική με κατευθύνσεις και, για να την ορίσουμε, μπορούμε να υποβηθισουμε τον κανόνα ότι πρέπει να παραμένει δυνατή η αντικατάσταση της κατεύθυνσης μιας ευθείας με την κατεύθυνση οποιασδήποτε παράλληλης προς αυτήν.

66. Έννιέται όμως μια τρίτη αμφιβολία σχετικά με τον ορισμό που προτείνουμε. Στην πρόταση:

«η κατεύθυνση της α ταυτίζεται με την κατεύθυνση της β »

η κατεύθυνση της α παίζει το ρόλο αντικειμένου¹², και στον ορισμό μας έχουμε ένα μέσο για την αναγνώριση αυτού του αντικειμένου, στην περίπτωση που θα παρουσιαζόταν μεταμφιεσμένο, ας πούμε ως η κατεύθυνση της β . Αυτή η μέθοδος όμως δεν επαρκεί για όλες τις περιπτώσεις. Μ' αυτήν δεν μπορεί κανείς, λ.χ., να αποφασίσει αν η Αγγλία είναι η ίδια με την κατεύθυνση του γήινου άξονα. Ας μου συγχωρηθεί αυτό το παράδειγμα που φαίνεται ανόητο. Κανείς δέσια δεν πρόκειται να πάγει την Αγγλία για κατεύθυνση του γήινου άξονα· αυτό όμως δεν οφείλεται στον ορισμό μας. Αυτός δεν λέει τίποτε για το αν η πρόταση

«η κατεύθυνση του α ταυτίζεται με το q »,

πρέπει να γίνει αντικείμενο κατάφασης ή άρνησης, αν το q δεν δίνεται με τη μορφή «η κατεύθυνση του β ». Αυτό που μας λείπει είναι η έννοια της κατεύθυνσης· αν τη διαθέταμε, τότε θα μπορούσαμε να θεοπίσουμε ότι, αν το q δεν είναι μία κατεύθυνση, τότε η πρότασή μας πρέπει να γίνει αντικείμενο άρνησης· αν το q είναι μία κατεύθυνση, τότε ο αρχικός ορισμός μας αποφασίζει αν θα έχουμε κατάφαση ή άρνηση. Μπαίνουμε λοιπόν στον πειρασμό να ορίσουμε:

το q είναι μια κατεύθυνση, αν υπάρχει μία ευθεία β της οποίας η κατεύθυνση είναι η q .

Αλλά τώρα είναι φανερό πως κάναμε έναν κύκλο. Διότι, για να χρησιμοποιήσουμε αυτόν τον ορισμό, πρέπει ήδη να γνωρίζουμε αν η πρόταση

«το q ταυτίζεται με την κατεύθυνση δ »

πρέπει να γίνει αντικείμενο κατάφασης ή άρνησης.

67. Αν ήθελε κανείς να πει ότι το q είναι μία κατεύθυνση, αν εισάγεται με τη βοήθεια του προηγούμενου ορισμού, τότε θα έπρεπε αυτός να εξετάσει τον τρόπο με τον οποίο το αντικείμενο q εισάγεται ως ιδιότητα του q , κάτι που δεν συμβαίνει. Στην πραγματικότητα, αυτός καθ' εαυτόν ο ορισμός ενός αντικείμενου δεν βεβαιώνει τίποτα για το αντικείμενο, αλλά μονάχα θεωρίζει την αναφορά ενός συμβόλου [Zeichen]. Μόλις συμβεί αυτό, ο ορισμός μετατρέπεται σε κρίση που αφορά το αντικείμενο: τώρα όμως δεν είναι πια το αντικείμενο, αλλά εξισώνεται με τις άλλες βεβαιώσεις που το αφορούν. Αν κανείς διάλεγε αυτή τη διέξοδο, θα έπρεπε να προυποθέσει ότι ένα αντικείμενο μπορεί να δοθεί με έναν τρόπο: γιατί, αλλιώς, από το γεγονός ότι το q δεν εισάγεται με τον ορισμό μας, δεν θα συναγόταν ότι δεν θα μπορούσε να εισαχθεί μ' αυτόν τον τρόπο. Τότε όλες οι ταυτότητες θα ισοδυναμούσαν με τούτο μονάχα: οτιδήποτε μας δίνεται με τον ίδιο τρόπο, πρέπει να αναγνωριστεί ως ίδιο. Αυτή όμως είναι μία τόσο προφανής και άγονη αρχή, που δεν αξίζει ούτε να διατυπώνεται. Στην πράξη, αυτή δεν θα μας επέτρεπε να δγάδουμε κανένα συμπέρασμα που να μη συμπίπτει με μία από τις υποθέσεις μας. Αντίθετα, η πολυπλοκότητα και ευρεία δυναμότητα εφαρμογής των ταυτοτήτων στηρίζεται μάλλον στο γεγονός ότι μπορούμε να αναγνωρίσουμε κάτι ως το ίδιο [πράγμα], μολονότι δίνεται με διαφορετικό τρόπο.

68. Αφού αυτή η μέθοδος δεν μας δίνει μία έννοια της κατεύθυνσης με καθαρό περιγράμμα [ως προς τις εφαρμογές της] και, επομένως, για τους ίδιους λόγους, ούτε μία ικανοποιητική έννοια του αριθμού, ως δοκιμάσουμε ένα άλλο μονοπάτι. Αν η ευθεία a είναι παράλληλη προς την ευθεία a , τότε το πλάτος [Umfang] της έννοιας «παράλληλη προς την ευθεία a » συμπίπτει με το πλάτος της έννοιας «ευθεία παράλληλη προς την ευθεία b ». και αντίστροφα, αν τα πλάτη των εννοιών που μόλις μνημονεύσαμε συμπίπτουν, τότε η a είναι παράλληλη προς τη b . Ας δοκιμάσουμε, λοιπόν, τον ακόλουθο τύπο ορισμού!

η κατεύθυνση της ευθείας a είναι το πλάτος της έννοιας «παράλληλη προς την ευθεία a »

το σχήμα του τριγώνου d είναι το πλάτος της έννοιας «όμοιο με το τρίγωνο b ».

Για να τον εφαρμόσουμε στην περίπτωση μας [του αριθμού], πρέπει να αντικαταστήσουμε τις ευθείες και τα τρίγωνα με τις έννοιες και την παράλληλία ή την ομοιότητα, με τη δυνατότητα αντιστοίχισης ένα-προς-ένα των αντικείμενων που υπάγονται στη μία έννοια με εκείνα που υπάγονται στην άλλη. Για συντομία θα ονομάσω την έννοια F ίση [Gleichählig¹³] με την έννοια G όταν υπάγεται αυτή η δυνατότητα: αλλά πρέπει να παρακαλέσω να θεωρηθεί αυτή η λέξη ως αυθαίρετα επιλεγμένο σύμβολο του οποίου η αναφορά δεν προκύπτει από την ετυμολογία, αλλά από τον ορισμό που έδωσα. Ορίσω λοιπόν:

ο αριθμός που ταιριάζει στην έννοια F είναι το πλάτος¹⁴ της έννοιας «ίσος προς την έννοια F ».

69. Ίσως να μην είναι αμέσως σαφές ότι αυτός ο ορισμός είναι ορθός. Δεν σκεφτόμαστε μήπως ότι το πλάτος μιας έννοιας διαφέρει από αριθμό; Ο τρόπος με τον οποίο σκεφτόμαστε τα πλάτη φαίνεται καθαρά από τις βασικές βεβαιώσεις που κάνουμε γι' αυτά. Είναι οι ακόλουθες:

1. ότι είναι ίσα,
2. ότι το ένα είναι μεγαλύτερο από το άλλο.

Αλλά τώρα η πρόταση:

το πλάτος της έννοιας «ίσος με την έννοια F » συμπίπτει με το πλάτος της έννοιας «ίσος με την έννοια G »,

είναι αληθής τότε και μόνο τότε, όταν αληθεύει η πρόταση:

«ο αριθμός που ταιριάζει στην έννοια F είναι ο ίδιος με τον αριθμό που ταιριάζει στην έννοια G ».

Έτσι εδώ υπάγεται πλήρης συμφωνία.

Ασφαλώς δεν λέμε ότι ένας αριθμός είναι ευνότερος από έναν άλλο, με την ίδια σημασία με την οποία λέμε ότι το πλάτος μιας έννοιας είναι μεγαλύτερο από το πλάτος μιας άλλης: ώστε είναι αδύνατο να συμβεί:

το πλάτος της έννοιας «ίσος με την έννοια F »

να είναι μεγαλύτερο από

το πλάτος της έννοιας «ίσος με την έννοια G ».

Αντίθετα, όταν όλες οι έννοιες που είναι ίσες με την F είναι ίσες και με την G , τότε αντίστροφα, όλες οι έννοιες που είναι ίσες με την F είναι ίσες με την G . Όπως χρησιμοποιείται εδώ, ο όρος «μεγαλύτερος» δεν πρέπει βέβαια να συγχέεται με τον όρο «μεγαλύτερος» που χρησιμοποιείται για τους αριθμούς.

Μπορεί βέβαια κανείς να φανταστεί και μία άλλη περιγραφή στην οποία το πλάτος της έννοιας «ίσος με την έννοια F » θα μπορούσε να είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από το πλάτος μιας άλλης έννοιας: η τελευταία δεν θα μπορούσε τότε να είναι αριθμός. Επειδή, δεν συνηθίζουμε να λέμε ότι ένας αριθμός είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος από το πλάτος μιας έννοιας: αλλά και τότε δεν μας εμποδίζει να μιλάμε μ' αυτόν τον τρόπο, αν ποτέ παρουσιάζονται μία τέτοια περιγραφή.

Ολοκλήρωση και επικύρωση του ορισμού μας

70. Η γονιμότητα δίνει κύρος στους ορισμούς. Αυτοί που θα μπορούσαν να παραλειφθούν χωρίς να αφήσουν κενό στην αλυσίδα των αποδείξεών μας, πρέπει να απορριφθούν ως στεγνοί και άχρηστοι.

Ας δοκιμάσουμε, λοιπόν, να δούμε αν ο ορισμός μας του αριθμού που ταυριάζει στην έννοια F , μπορεί να μας δώσει μερικές από τις γνωστές ιδιότητες των αριθμών. Θα περιδοτούμε στις αλυσίδες.

Αυτό απαιτεί να κάνουμε ακόμη ακριβέστερο τον όρο «ισότητα». Τον ορίσαμε με τη βοήθεια της αμφιμονοσήμαντης αντιτοχίησης: τώρα πρέπει να προσδιορίσουμε πώς θέλουμε να εννοείται η έκφραση αυτή, αφού εύκολα μπορεί κανείς να υποπτευθεί ότι συνδέεται με την εποπτεία.

Ας παρατηρήσουμε το ακόλουθο παράδειγμα. Αν ένας σεβαστός θέλει να είναι σίγουρος πως στο τραπέζι έφαγε ακριβώς τόσα μαχαίρια όσα είναι τα πιάτα, δεν είναι ανάγκη να τα μετρήσει, φτάνει στη δεξιά μεριά κάθε πιάτου να βάλει ένα μαχαίρι έτσι ώστε κάθε μαχαίρι πάνω στο τραπέζι να βρισκείται αμέσως δεξιά ενός πιάτου. Έτσι, ανάμεσα στα μαχαίρια και τα πιάτα υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία, σ' αυτή τη περίπτωση με τη μεσολόγηση της ίδιας σχέσης στο γόθο. Αν στην πρόταση

«το a βρισκείται αμέσως δεξιά του A »

φανταστούνε όλων των ειδών τα αντικείμενα να αντικαθιστούν τα a και A , τότε το μέτρος του περιεχομένου της που μένει αναλλοίωτο σ' όλη τη διεργασία αντικατάστασης είναι η ουσία της [δημιούς] σχέσης. Αυτό πρέπει να γενικεύσουμε. Αν από το περιεχόμενο μιας κρίσης η οποία αφορά ένα αντικείμενο a και ένα αντικείμενο b αφαιρέσουμε τα a και b , αυτό που μένει είναι μία έννοια σχέσης που χρειάζεται συμπλήρωση σε δύο θέσεις. Αν από την πρόταση:

«η γη έχει μεγαλύτερη μάζα από τη σελήνη»

αφαιρέσουμε το «η γη», έχουμε την έννοια «έχω μεγαλύτερη μάζα από τη σελήνη». Αν, αντίθετα, αφαιρέσουμε το «τη σελήνη», τότε έχουμε την έν-

νοια «έχω μικρότερη μάζα από τη γη». Αν, όμως, αφαιρέσουμε και τα δύο μαζί, τότε μένει μία έννοια σχέσης που, από μόνη της, δεν έχει περιεχόμενο νόημα από ό,τι έχει μία απλή έννοια που, για να γίνει περιεχόμενο κρίσης, πρέπει να συμπληρωθεί. Μπορεί όμως να συμπληρωθεί με διάφορους τρόπους: αντί των Γη και Σελήνη, μπορού, λ.χ., να βάλω Ήλιος και Γη, και μ' αυτό επιτάλω την αφαίρεση [και αποκάλυπτο ότι πρόκειται για έννοια σχέσης].

Στην έννοια της σχέσης τα επιμέρους ζεύγη συσχετιζόμενων αντικειμένων συμπληρώνονται όπως το επιμέρους αντικείμενο ως προς την έννοια στην οποία υπάγεται – θα μπορούσαμε να τα ονομάσουμε υποκείμενα της έννοιας σχέσης. Μόνο που εδώ το υποκείμενο είναι σύνθετο. Καμιά φορά, όταν η σχέση είναι αντιστρέψιμη [συμμετρική], αυτό εκφράζει και η γλώσσα, όπως στην πρόταση «ο Πηλέας και η Θέτις ήταν γονείς του Αχιλλέα»¹⁵. Από την άλλη μεριά, δεν θα ήταν δυνατόν να ξαναδιατυπώσουμε την πρόταση «η Γη είναι μεγαλύτερη από τη Σελήνη» με άλλες λέξεις, ώστε το «η Γη και η Σελήνη» να εμφανίζεται ως σύνθετο υποκείμενο, γιατί πάντα το «και» υποδειχτεί μία ορισμένη ισοτιμία. Αυτό όμως δεν έχει σχέση με το θέμα μας.

Η έννοια της σχέσης, λοιπόν, όπως και η απλή έννοια, ανήκει στην καθαρή Λογική. Εδώ δεν μας απασχολεί το ειδικό περιεχόμενο μιας συγκεκριμένης σχέσης, αλλά μονάχα η λογική μορφή της. Και η αλήθεια όπως δοκίμασε εκφέρουμε σχετικά μ' αυτή τη μορφή είναι αναλυτική και α-πριόρι. Αυτό ισχύει για τις έννοιες σχέσης, όπως και για τις άλλες. Ακριδώς όπως η

«το a υπάγεται στην έννοια F »

είναι η γενική μορφή του περιεχομένου μιας κρίσης σχετικής με το αντικείμενο a , έτσι μπορούμε να πάρουμε την

«το a έχει τη σχέση φ με το b »

ως γενική μορφή ενός περιεχομένου κρίσης σχετικής με τα αντικείμενα a και b .

71. Αν τώρα κάθε αντικείμενο που υπάγεται στην έννοια F έχει τη σχέση φ με ένα αντικείμενο που υπάγεται στην έννοια G , και αν, για κάθε αντικείμενο που υπάγεται στην έννοια G , υπάγεται ένα αντικείμενο που να υπάγεται στην F και να έχει μ' αυτό τη σχέση φ , τότε τα αντικείμενα που υπάγονται στις F και G συσχετίζονται μέσω της σχέσης φ .

Μπορούμε ακόμα να γωπίσουμε τι σημαίνει η έκφραση «κάθε αντικείμενο που υπάγεται στην F έχει τη σχέση φ με ένα αντικείμενο που υπάγεται στην G », όταν κανένα αντικείμενο δεν υπάγεται στην F . Την εννοιά με τον ακόλουθο τρόπο:

οι δύο προτάσεις

«το a υπάγεται στην F_1 »

και

«το a δεν έχει τη σχέση φ με κανένα από τα αντικείμενα που υπάγονται στην F_2 »,

δεν μπορούν να αληθεύουν ταυτόχρονα, όποια κι αν είναι η αναφορά του a : ώστε η πρώτη πρόταση είναι ψευδής ή η δεύτερη ή και οι δύο. Από αυτό απορρέει ότι η πρόταση «κάθε αντικείμενο που υπάγεται στην F έχει τη σχέση φ με κάποιο αντικείμενο που υπάγεται στην G » αληθεύει, όταν δεν υπάγεται αντικείμενο που να υπάγεται στην F : διότι, σ' αυτή την περίπτωση, η πρώτη πρόταση:

«το a υπάγεται στην έννοια F_2 »

είναι πάντα ψευδής, όποιο και αν είναι το a .

Με τον ίδιο τρόπο, η πρόταση:

«για κάθε αντικείμενο που υπάγεται στην G υπάγχει ένα αντικείμενο που να υπάγεται στην F και να σχετίζεται με αυτό μέσω της φ »

σημαίνει ότι οι δύο προτάσεις:

«το a υπάγεται στην G »

και

«κανένα αντικείμενο που να υπάγεται στην F δεν έχει σχέση φ με το a »

δεν μπορούν να αληθεύουν ταυτόχρονα, ό,τι κι αν είναι το a .

72. Είδαμε λοιπόν πότε τα αντικείμενα που υπάγονται στις έννοιες F και G συσχετίζονται μεταξύ τους μέσω της σχέσης φ . Αλλά εδώ πρέπει αυτή η συσχέτιση να είναι αιμφοροσημαντική. Μ' αυτό εννοώ ότι ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις:

1. Αν το δ έχει τη σχέση φ με το a , και αν το δ έχει τη σχέση φ με το ϵ , τότε, γενικά, όποια κι αν είναι τα δ , a και ϵ , το a συμπάσχει με το ϵ .
2. Αν το δ έχει τη σχέση φ με το a , και αν το δ έχει τη σχέση φ με το α , τότε, γενικά, όποια κι αν είναι τα δ , β και α , το δ συμπάσχει με το β .

Μ' αυτό, οι αιμφοροσημαντες αντιστοιχίες ανάγονται σε καθαρά λογικές σχέσεις και τώρα μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:
η έκφραση:

«η έννοια F είναι ίση με την έννοια G »

θα έχει την ίδια αναφορά με την έκφραση:

«υπάγχει μια σχέση φ που συσχετίζει με αιμφοροσημαντο τρόπο τα αντικείμενα που υπάγονται στην G ».

Τώρα επαναλαμβάνω τον αρχικό ορισμό:

ο αριθμός που ταιριάζει στην έννοια F είναι το πλήθος της έννοιες «ίσος με την έννοια F_2 »,

και προσθέτω ακόμη:

η έκφραση

«ο n είναι αριθμός»

θα έχει την ίδια αναφορά με την έκφραση

«υπάγχει μια έννοια στην οποία ταιριάζει ο αριθμός n ».

Ετσι, η έννοια του αριθμού ορίζεται ασφαλώς φαινομενικά, με τον εαυτό της: αυτό όμως δεν είναι λάθος, αφού έχει ήδη οριστεί η έκφραση «ο αριθμός που ταιριάζει στην έννοια F_2 ».

73. Πρέπει τώρα να δείξουμε ότι ο αριθμός που ταιριάζει στην έννοια F ταυτίζεται με τον αριθμό που ταιριάζει στην έννοια G , αν η έννοια F είναι ίση με την έννοια G . Αυτό δέβεται ακούγεται σαν ταυτολογία. Αλλά δεν είναι η αναφορά της λέξης «ίσος» δεν πηγάζει από την ετυμολογία της, αλλά από τον προσηλωμένο ορισμό.

Σύμφωνα με τον ορισμό μας [του «αριθμού που ταιριάζει την έννοια F_2], πρέπει να δείξουμε ότι το πλήθος της έννοιες «ίσος με την έννοια F_2 » συμπάσχει με το πλήθος της έννοιες «ίσος με την έννοια G_2 », αν η έννοια F είναι ίση με την G . Με άλλα λόγια, πρέπει να δείξουμε ότι, αν η F είναι ίση με την G , οι ακόλουθες δύο προτάσεις έχουν γενική ισχύ:

«αν η έννοια H είναι ίση με την έννοια F , τότε είναι ίση και με την έννοια G ».

και
«αν η έννοια H είναι ίση με την έννοια G , τότε είναι ίση και με την έννοια F_2 ».

Η πρώτη πρόταση λέει ότι υπάγχει μία σχέση που συσχετίζει ένα-προς-ένα τα αντικείμενα που υπάγονται στην έννοια H με εκείνα που υπάγονται στην έννοια G , αν υπάγχει μία σχέση φ που να συσχετίζει ένα-προς-ένα τα αντικείμενα που υπάγονται στην έννοια F με εκείνα που υπάγονται στην έννοια G , και μία σχέση ψ που να συσχετίζει ένα-προς-ένα τα αντικείμενα που υπάγονται στην έννοια H με εκείνα που υπάγονται στην έννοια F .

Αυτό γίνεται πιο ευνόητο με την ακόλουθη διάταξη γραμμάτων

Μία τέτοια σχέση μπορεί πραγματικά να δοθεί: βρίσκεται στο περιεχόμενο της κρίσης

«υπάγχει ένα αντικείμενο που με το γ έχει τη σχέση ψ και με το β έχει τη σχέση φ»,

αν από αυτήν αφαιρέσουμε τα γ και β (που θεωρούμε όρους της σχέσης). Αποδεικνύεται ότι αυτή η σχέση είναι αμφιμονοσήμαντη και ότι συσχετίζεται αντικείμενα που υπάγονται στην έννοια H με εκείνα που υπάγονται στην έννοια G.

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί και η δεύτερη πρόταση¹⁶. Ειδικώς πως αυτές οι ενδείξεις ασκούν για να φανεί ότι οι αποδείξεις μου δεν εξαρτώνται διόλου από την προσηνυγή στην εποπτεία και ότι κάτι μπορεί να γίνει με τους ορισμούς μας.

74. Μπορούμε τώρα να περάσουμε στους ορισμούς των επιμέρους αριθμών. Αφού τίποτα δεν υπάγεται στην έννοια «διάφορος του εαυτού του», ορίζω:

ο θ είναι ο αριθμός που ταυιάζει στην έννοια «διάφορος του εαυτού του».

Ίσως σκανδαλίσει μερικούς το ότι εδώ μιλάω για έννοια. Ίσως αντιτάξουν ότι περιέχει μια αντίφαση και θυμίζει τον γνωστό μας τετραγώνω κύκλο και το ξύλινο αίδερο. Πιοτερώ πως αυτοί οι κύκλοι φίλοι δεν είναι τόσο κακοί, όσο τους λένε. Παραδέχομαι πως δεν μπορούν να είναι χρήσιμοι, αλλά δεν είναι ούτε και άδραστοί, φτάνει να μην υποθέσουμε ότι σ' αυτούς υπάγεται καμιά – αλλά δεν είναι αποδοχή της έννοιας η απλή χρήση της. Δεν είναι πάντα φανερό χωρίς έρευνα ότι μία έννοια περιέχει μία αντίφαση: αλλά για να την ερευνησουμε, πρέπει πρώτα να την έχουμε και να την αντιμετωπίσουμε λογικά, ακριβώς όπως κάθε άλλη έννοια. Από την άποψη της λογικής και της αποδεικτικής αυστηρότητας, από μία έννοια δεν μπορούμε να απαιτούμε περισσότερο από το να είναι σαφή τα όριά της: πρέπει, για κάθε αντικείμενο, να είναι καθορισμένο το αν αυτό υπάγεται στην έννοια ή όχι. Ωστόσο, αυτή η απαίτηση ικανοποιείται από έννοιες όπως «που διαφέρει από τον εαυτό του», οι οποίες περιέχουν μια αντίφαση: για κάθε αντικείμενο γνωρίζουμε ότι αυτό δεν υπάγεται σε μία τέτοια έννοια¹⁷.

Χρησιμοποιώ τη λέξη «έννοια» με τέτοιο τρόπο, ώστε η «το α υπάγεται στην έννοια F» να είναι η γενική μορφή του περιεχομένου της κρίσης που αφορά το αντικείμενο α και επιτίθεται να την εκφέσουμε, όποιο κι αν είναι το α. Και μ' αυτή την αναφορά, η

«το α υπάγεται στην έννοια 'διαφέρει από τον εαυτό του'»

έχει την ίδια αναφορά με την:

«το α διαφέρει από τον εαυτό του»

ή την

«το α διαφέρει από το α».

Για να ορίσω τον μηδέν θα μπορούσα να χρησιμοποιήσω οποιαδήποτε άλλη έννοια στην οποία δεν υπάγεται κανένα αντικείμενο. Αλλά διάλεξα μία έννοια που να μπορεί να αποδειχθεί τέτοια με καθαρά λογικό τρόπο: γι' αυτόν το σκοπό η «διαφέρει από τον εαυτό του» είναι η πιο κατάλληλη, ως ορισμό του «ταυτίζεται» [= δεν διαφέρει από τον εαυτό του, ΣτΜ] παίρνω τον ορισμό του Leibniz που δόθηκε πιο πάνω [§65], και είναι καθαρά λογικός.

75. Από όσα είπαμε, πρέπει τώρα να είναι δυνατόν να αποδείξουμε ότι κάθε έννοια στην οποία δεν υπάγεται τίποτε είναι ίση με κάθε άλλη έννοια στην οποία δεν υπάγεται τίποτε, και μόνο με μία τέτοια έννοια: από αυτό απορρέει ότι το θ είναι ο αριθμός που ταυιάζει σε κάθε τέτοια έννοια και ότι κανένα αντικείμενο δεν υπάγεται σε μία έννοια, αν σ' αυτή την έννοια ταυιάζει ο αριθμός θ.

Αν υποθέσουμε ότι κανένα αντικείμενο δεν υπάγεται στην έννοια F ή στην έννοια G, τότε, για να δείξουμε ότι αυτές είναι ίσες, πρέπει να βρούμε μία σχέση φ που να ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη:

κάθε αντικείμενο που υπάγεται στην F έχει τη σχέση φ με ένα αντικείμενο που υπάγεται στην G· και, για κάθε αντικείμενο που υπάγεται στην G, υπάγεται ένα αντικείμενο που υπάγεται στην F και έχει τη σχέση φ με αυτό.

Σύμφωνα με όσα είπαμε πιο πάνω [§71] για την αναφορά αυτών των εκφράσεων και δάσει της παραδοχής μας [ότι κανένα αντικείμενο δεν υπάγεται σε καμία από τις δύο έννοιες], συνάγεται ότι κάθε σχέση ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες: επομένως και την ταυτότητα, η οποία, επιπλέον, είναι μία αμφιμονοσήμαντη σχέση: διότι ικανοποιεί και τις δύο συνθήκες που θέσαμε προηγουμένως [στην §72].

Αν, από την άλλη μεριά, ένα αντικείμενο, λ.χ. το α, υπάγεται στην G, αλλά δεν υπάγεται στην F, τότε οι δύο προτάσεις:

«το α υπάγεται στην F»,

και

«κανένα αντικείμενο που υπάγεται στην F δεν έχει τη σχέση φ με το α»

αληθεύουν για κάθε σχέση φ: γιατί η πρώτη ισχύει σύμφωνα με την πρώτη

υπόθεσή μας και η δεύτερη σύμφωνα με τη δεύτερη. Δηλαδή, αν δεν υπάρχει αντικείμενο που να υπάρχει στην F , τότε πολύ περισσότερο δεν υπάρχει αντικείμενο που να υπάρχει στην F και να έχει οποιαδήποτε σχέση με το α . Επομένως, δεν υπάρχει καμία σχέση που να μπορεί να συσχετίσει τα αντικείμενα που υπάρχουν στην F με εκείνα που υπάρχουν στην G σύμφωνα με τον ορισμό μας [της ισοτιμίας]: ώστε οι έννοιες F και G δεν είναι ίσες.

76. Τώρα θέλω να ορίσω τη σχέση στην οποία βρίσκονται δύο γειτονικά μέλη της σειράς [Reihe] των φυσικών αριθμών. Η πρόταση:

«υπάρχει μία έννοια F και ένα αντικείμενο x που υπάρχει σ' αυτήν, τέτοια, ώστε ο αριθμός που ταιριάζει στην έννοια F είναι n και ο αριθμός που ταιριάζει στην έννοια 'υπάρχει στην F αλλά δεν συμπίπτει με το x ' είναι m »

πρέπει να έχει την ίδια αναφορά με την

«στη σειρά των φυσικών αριθμών ο n διαδέχεται τον m ».

Αποφενώνω την έκφραση «ο n είναι ο αριθμός που έχουμε αμέσως μετά από τον m », γιατί δεν μπορούμε να αιτιολογήσουμε τη χρήση του οριστικού άρθρου προτού αποδείξουμε δύο προτάσεις¹⁸. Για τον ίδιο λόγο, ακόμα δεν λέω ότι « $n = m + 1$ », γιατί με τη χρήση του σημείου $=$ δηλώνουμε ότι το $(m + 1)$ είναι αντικείμενο.

77. Για να φτάσουμε στον αριθμό 1 , πρέπει να δείξουμε πρώτα ότι υπάρχει κάτι που διαδέχεται τον 0 στη σειρά των φυσικών αριθμών.

Ας εξετάσουμε την έννοια $-η$, αν προτιμάτε, το κατηγορηματικό «ίδιος με το 0 ». Σ' αυτό υπάρχει ο αριθμός 0 . Αντίθετα, στην έννοια «ίδιος με το 0 αλλά διαφορετικός από το 0 » δεν υπάρχει κανένα αντικείμενο: ώστε σ' αυτή την έννοια ταιριάζει ο αριθμός 0 . Έχουμε, λοιπόν, μία έννοια «ίδιος με το 0 » και ένα αντικείμενο 0 που υπάρχει σ' αυτήν, για τα οποία ισχύουν οι προτάσεις:

ο αριθμός που ταιριάζει στην έννοια «ίδιος με τον 0 » ταυτίζεται με τον αριθμό που ταιριάζει στην έννοια «ίδιος με τον 0 ».

0 είναι ο αριθμός που ταιριάζει στην έννοια «ίδιος με τον 0 αλλά διαφορετικός από τον 0 ».

Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό μας [§ 76], ο αριθμός που ταιριάζει στην έννοια «ίδιος με τον 0 » διαδέχεται τον 0 στη σειρά των φυσικών αριθμών.

Αν, λοιπόν, ορίσουμε:

1 είναι ο φυσικός αριθμός που ταιριάζει στην έννοια «ίδιος με τον 0 » τότε μπορούμε να διατυπώσουμε την τελευταία πρότασή μας με τον ακόλουθο τρόπο:

ο 1 διαδέχεται τον 0 στη σειρά των φυσικών αριθμών.

Τίπος να μην είναι περιττό να σημειώσουμε ότι, για να αιτιολογηθεί αντικειμενικά ο ορισμός που δώσαμε για τον αριθμό 1 δεν προϋποθέτει κανένα παρατηρημένο γεγονός¹⁹. Διότι είναι εύκολο να παραβληθούμε βλέποντας ότι πρέπει να ικανοποιούνται ορισμένες υποκειμενικές συνθήκες που θα μας επιτρέψουν να φτάσουμε στον ορισμό και ότι η αυθηγητική εμπειρία μας ωθεί στη διατύπωση του²⁰. Ωστόσο, αυτά όλα μπορεί να είναι εντελώς σωστά, χωρίς όμως οι προτάσεις στις οποίες φτάσαμε με αυτόν τον τρόπο να παύουν να είναι *a priori*. Λόγου χάρι, μια τέτοια συνθήκη είναι: το αίμα να γέει στον εγκέφαλο σε αρκετή ποσότητα – τουλάχιστον από όσα έχουμε: αλλά η αλήθεια της τελευταίας πρότασης δεν εξαρτάται από αυτό: δεν παύει να ισχύει ακόμα και αν σταματήσει η κυκλοφορία του αίματος: και αν ακόμα όλα τα λογικά όντα έπεφταν ταυτόχρονα σε χειμερία νάρκη, η αλήθεια της πρότασής μας δεν θα χανόταν κατά τη διάρκεια της νάρκης, αλλά θα έμενε εντελώς ανεπρόληπτη. Γιατί άλλο είναι η αλήθεια μιας πρότασης και άλλο το να οκνευόμαστε την πρόταση.

78. Κατηγορώ μερικές προτάσεις που πρέπει να αποδειχθούν με τη βοήθεια των ορισμών μας. Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να δει πώς μπορεί να γίνει αυτό.

1. Αν ο α διαδέχεται τον 0 στη σειρά των φυσικών αριθμών, τότε $\alpha = 1$.
2. Αν ο 1 είναι ο αριθμός που ταιριάζει σε μία έννοια, τότε υπάρχει ένα αντικείμενο που υπάρχει στην έννοια αυτή.
3. Αν ο 1 είναι ο αριθμός που ταιριάζει σε μία έννοια F , αν το αντικείμενο x υπάρχει στην έννοια F και το y υπάρχει στην έννοια F , τότε $x = y$. Δηλαδή το x ταυτίζεται με το y .
4. Αν ένα αντικείμενο υπάρχει στην έννοια F , και αν, από το γεγονός ότι το x υπάρχει στην έννοια F και το y υπάρχει στην έννοια F , μπορεί πάντα να συναχθεί ότι $x = y$, τότε στην έννοια F ταιριάζει ο αριθμός 1 .
5. Η σχέση του m προς τον n που εγκαθιδρύει η πρόταση: «ο n διαδέχεται τον m στη σειρά των φυσικών αριθμών» είναι αμφοιμονοσημάντη.

‘Ως εδώ δεν υπάγχει τίποτε που να λέει ότι για κάθε αριθμό υπάγχει ένας άλλος αριθμός που τον διαδέχεται ή ότι αυτός διαδέχεται κάποιον άλλο στη σειρά των φυσικών αριθμών.

6. Κάθε αριθμός της σειράς των φυσικών αριθμών, εκτός από τον 0, διαδέχεται κάποιον άλλο αριθμό.

79. Για να μπορούσαμε τώρα να αποδείξουμε ότι κάθε αριθμός (n) στη σειρά των φυσικών αριθμών έχει έναν άμεσο διάδοχο, πρέπει να παρουσιάσουμε μία έννοια στην οποία ταυριάζει αυτός ο αριθμός. Γι’ αυτό επιλέγουμε την έννοια:

«μέλος της σειράς των φυσικών αριθμών που λήγει με τον n ».

Αλλά πρώτα πρέπει να την ορίσουμε.

Επιαναλαμβάνω πρώτα, με κάπως διαφορετική φρασολογία, τον ορισμό του «ακολουθώ σε μια σειρά» που έδωσα στην *Begriffsschrift* [Έννοιολογική γραμμή]²¹ μου.

Η πρόταση

«αν κάθε αντικείμενο με το οποίο το x έχει τη σχέση φ υπάγεται στην έννοια F , και αν από το γεγονός ότι το δ υπάγεται στην έννοια F , συνάγεται πάντα, ό,τι και να είναι το δ , ότι κάθε αντικείμενο με το οποίο το δ έχει τη σχέση φ , υπάγεται στην έννοια F , τότε το y υπάγεται στην έννοια F , όποια έννοια και αν είναι το F »

θα έχει την ίδια αναφορά με την

«ο y ακολουθεί τον x μέσα στη σειρά φ »

και με την

«ο x προηγείται του y μέσα στη σειρά φ ».

80. Εδώ δεν θα ήταν περιττές μερικές παρατηρήσεις: πρώτον, ότι, αφού η σχέση φ δεν έχει καθοριστεί, δεν είναι αναγκαίο να σκεφτεί κανείς τη σειρά με τη μορφή χωρικής ή χρονικής διάταξης, αν και αυτές οι περιπτώσεις δεν αποκλείονται.

Κατόπιν, ότι θα μπορούσε να θεωρηθεί φυσικότερος κάποιος άλλος ορισμός, λ.χ., ο εξής: αν, ξεκινώντας από τον x , μεταθέτουμε την προσοχή μας συνεχώς από το ένα αντικείμενο στο άλλο με το οποίο έχει τη σχέση φ , και αν, μ’ αυτόν τον τρόπο, μπορούμε τελικά να φτάσουμε στον y , τότε λέμε ότι ο y ακολουθεί τον x στη σειρά φ .

Αυτός όμως είναι τρόπος ανακάλυψης ότι ο y ακολουθεί, όχι ορισμός. Το αν θα φτάσουμε στον y , καθώς μετατορίζεται η προσοχή μας, εξαρτάται

από διάφορους υποκειμενικούς περιστασιακούς παράγοντες. λ.χ., από τον χρόνο που διαθέτουμε ή από την εξοικείωσή μας με τα πράγματα. Το αν ο y ακολουθεί τον x στη σειρά- φ , δεν έχει καμία απολύτως σχέση με την προσοχή μας και τις συνθήκες μετατόπισης της αντίθετα είναι κάτι το αντικειμενικό, ακριδώς όπως είναι αντικειμενικό το γεγονός ότι ένα πράγμα φύλλο αντανακλά ορισμένες φωτεινές ακτίνες ανεξάρτητα από το αν αυτές πέφτουν στο μάτι μου και γενούν ένα αίσθημα· το ίδιο όπως ένας κόκκος αλατιού είναι διαλυτός στο νερό, ανεξάρτητα από το αν τον ρίξω στο νερό, και παρ’ όλο που διαλυτός ακόμα κι όταν μου είναι εντελώς αδύνατο να πραγματοποιήσω με αυτόν.

Ο ορισμός μου υψώνει το ζήτημα από την περιουσία του υποκειμενικά δυνατού στην περιουσία του αντικειμενικά καθορισμένου. Κινησιολογικά: το γεγονός ότι μια πρόταση συνάγεται από ορισμένες άλλες προτάσεις είναι κάτι το αντικειμενικό, κάτι το ανεξάρτητο από τους νόμους που διέπουν τις κινήσεις της προσοχής μου, κάτι που δεν επηρεάζεται από το αν πραγματικά θα δράσουμε το συμπέρασμα ή όχι. Εδώ έχουμε ένα κριτήριο που σε κάθε περίπτωση αποφασίζει το ερώτημα για το αν ο y ακολουθεί τον x κάθε φορά που αυτό μπορεί να τεθεί, όσο κι αν, σε επιμέρους περιπτώσεις, οι εξωτερικές δυσκολίες δεν μας επιτρέπουν να κρίνουμε αν μπορεί να εφαρμοσθεί το κριτήριο. Αυτό δεν επηρεάζεται καθόλου το ζήτημα.

Δεν χρειάζεται πάντα να διατρέξουμε όλα τα ενδιάμεσα μέλη, από το αρχικό μέλος ως το αντικείμενο, για να βεβαιώσουμε ότι το τελευταίο ακολουθεί το πρώτο. Αν, λ.χ., είναι δεδομένο ότι στη σειρά- φ ο δ ακολουθεί τον α και ο γ ακολουθεί τον δ , τότε από τον ορισμό μας μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο γ ακολουθεί τον α , χωρίς να γνωρίζουμε καν τα ενδιάμεσα μέλη της σειράς.

Μόνο μ’ αυτόν τον ορισμό του «ακολουθώ σε μία σειρά» είναι δυνατόν να αναγάγουμε στους γενικούς νόμους της λογικής τον τρόπο συμπερασμού από τον n στον $(n + 1)$, που φαίνεται να προοιδιαίνει στα μαθηματικά.

81. Αν τώρα ως σχέση φ έχουμε τη σχέση ανάμεσα στους m και n που εγκυβόλησε η πρόταση, τότε, αντί «η σειρά- φ », θα λέμε «η σειρά των φυσικών αριθμών».

Προσθέτω τον ορισμό:

Η πρόταση

«ο y ακολουθεί τον x στη σειρά- φ ή ο y ταυτίζεται με τον x »

θα έχει την ίδια αναφορά με την:

«ο y είναι μέλος της σειράς- φ η οποία αρχίζει με τον x »

και με την

«ο x είναι μέλος της σειράς- φ η οποία λήγει στον x ».

Από αυτούς απορρέει ότι ο α είναι μέλος της σειράς των φυσικών αριθμών, που λήγει στον n , αν ο n ακολουθεί τον α στη σειρά των φυσικών αριθμών ή ταυτίζεται με τον α ²².

82. Πρέπει τώρα να δείξουμε ότι –με μία συνθήκη που δεν διατυπώθηκε ακόμα– ο αριθμός που ταυτίζεται στην έννοια

«μέλος της σειράς των φυσικών αριθμών που λήγει στον n »

διαδέχεται τον n στην ακολουθία των φυσικών αριθμών. Μ' αυτό θα έχουμε αποδείξει ότι υπάρχει ένας αριθμός που διαδέχεται τον n στη σειρά των φυσικών αριθμών, δηλ. ότι η σειρά των φυσικών αριθμών δεν έχει τελευταίο μέλος. Είναι φυσικό αυτή η πρόταση να μη θεμελιώνεται στην εμπειρία ή στην επαγωγή.

Θα οδηγήσουμε πολύ μακριά το να δώσουμε εδώ την πλήρη απόδειξη. Εδώ μπορούμε μόνο να υποδείξω την πορεία της. Πρέπει να αποδειχθεί ότι:

1. αν ο α είναι άμεσος διάδοχος του δ στη σειρά των φυσικών αριθμών, και αν για τον δ αληθεύει ότι: ο αριθμός που ταυτίζεται στην έννοια

«μέλος της σειράς των φυσικών αριθμών που λήγει στον δ »

διαδέχεται τον δ στη σειρά των φυσικών αριθμών, τότε ο αριθμός που ταυτίζεται στην έννοια:

«μέλος της σειράς των φυσικών αριθμών που λήγει στον α »

είναι άμεσος διάδοχος του α στη σειρά των φυσικών αριθμών.

2. Κατόπιν, πρέπει να αποδειχθεί ότι αυτά που λέει η πρόταση για τα α και δ ισχύουν και για τον n , αν ο n ανήκει στη σειρά των φυσικών αριθμών που αρχίζει με τον θ . Εδώ το επιχείρημα είναι εφαρμογή του ορισμού που έδωσα [§ 79, 81] για την έκφραση:

«ο y ακολουθεί τον x στη σειρά των φυσικών αριθμών».

όταν πάσουμε ως έννοια F αυτό που θεσπίσαμε πως ισχύει για τους α και δ , και αντικαταστήσουμε τους δ και α με τους θ και n .

83. Για να αποδείξουμε τη πρόταση 1. της προηγούμενης παραγράφου πρέπει να δείξουμε ότι ο α είναι ο αριθμός που ταυτίζεται στην έννοια «μέλος της σειράς των φυσικών αριθμών που λήγει στον α , αλλά δεν ταυτίζεται με τον α ». Γι' αυτό πρέπει πάλι να δείξουμε ότι αυτή η έννοια έχει το ίδιο πλάτος με την έννοια «μέλος της σειράς των φυσικών αριθμών που λήγει

στον δ ». Για να το πετύχουμε, χρειάζομαστε την πρόταση ότι κανένα αντικείμενο που ανήκει στη σειρά των φυσικών αριθμών, η οποία αρχίζει με τον θ , δεν μπορεί να ακολουθεί τον εαυτό του στη σειρά των φυσικών αριθμών. Και αυτό επίσης πρέπει να αποδειχθεί με τη δοθήθεια του ορισμού μας για το «ακολουθώ σε μια σειρά», με τον τρόπο που υποδείξαμε πιο πάνω²³. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο πρέπει να προσθέσουμε μια συνθήκη στην πρόταση ότι ο αριθμός που ταυτίζεται στην έννοια:

«μέλος της σειράς των φυσικών αριθμών που λήγει στον n »

είναι άμεσος διάδοχος του n στη σειρά των φυσικών αριθμών – δηλ. τη συνθήκη ότι ο n πρέπει να ανήκει στη σειρά των φυσικών αριθμών που αρχίζει με τον θ . Γι' αυτό υπάρχει μια πιο συντηρημένη έκφραση του ορισμού ως εξής:

«ο n ανήκει στη σειρά των φυσικών αριθμών που αρχίζει με τον θ »

θα έχει την ίδια αναφορά με την

«ο n είναι πεπερασμένος αριθμός».

Τώρα μπορούμε να διατυπώσουμε την τελευταία πρόταση με τον ακόλουθο τρόπο: κανένα πεπερασμένο αριθμός δεν ακολουθεί τον εαυτό του στη σειρά των φυσικών αριθμών.

Άπειροι αριθμοί

84. Οι άπειροι αριθμοί αντιπαραβάλλονται στους πεπερασμένους. Ο αριθμός που ταυτίζεται στην έννοια «πεπερασμένος αριθμός» είναι άπειρος. Ας τον ομβολίσουμε²⁴, ας πούμε, με το N_0 . Αν αυτός ήταν πεπερασμένος αριθμός, δεν θα μπορούσε να ακολουθεί τον εαυτό του στη σειρά των φυσικών αριθμών. Αλλά μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτό ακριβώς είναι ο N_0 .

Δεν υπάρχει τίποτα, σαν να λέγαμε, μυστηριώδες ή παράξενο σχετικά με τον άπειρο αριθμό N_0 , όταν τον ορίσουμε μ' αυτόν τον τρόπο. Η «ο αριθμός που ταυτίζεται στην έννοια F είναι N_0 » δεν λέει τίποτε περισσότερο ή λιγότερο από τούτο: υπάρχει μία σχέση που εγκαθιδρύει έναν αμφοιμονοσημάντο συσχετισμό ανάμεσα στα αντικείμενα που υπάρχουν στην έννοια F και τους πεπερασμένους αριθμούς. Σύμφωνα με τους ορισμούς μας, αυτό έχει ένα εντελώς σαφές και μονοσημάντο νόημα και αυτό φτάνει για να αιτιολογήσει τη χρήση του συμβόλου N_0 και να του εξασφαλίσει μία αναφορά. Δεν έχει καμία σημασία το ότι δεν μπορούμε να σχηματίσουμε μία νοητική παράσταση ενός άπειρου αριθμού· άλλωστε το ίδιο συμβαίνει και με τους πεπερασμένους αριθμούς. Έτσι ιδιαιτέρως ο αριθμός μας N_0 είναι κάτι εξίσου

καθορισμένο όσο και οποιοσδήποτε πεπερασμένος αριθμός: μπορούμε να τον αναγνωρίσουμε, χωρίς αμφιβολία, ως τον ίδιο και να τον διακρίνουμε από κάθε άλλον αριθμό.

85. Πρόσφατα, σε μία αξιολογη εργασία του, ο G. Cantor²⁵ εισήγαγε τους άπειρους αριθμούς. Συμφωνώ μαζί του απόλυτα στην περιγραφή της άποψης, σύμφωνα με την οποία, κατ' αρχάς, μόνο οι πεπερασμένοι αριθμοί θα μπορούσαν να είναι αληθινοί αριθμοί. Ούτε αυτοί ούτε οι χκαματικοί αριθμοί καταλαμβάνουν χώρο ή είναι αντιληπτοί με τις αισθήσεις – αλλά ούτε και οι αργητικοί αριθμοί ή οι μυαδικοί αριθμοί. Και αν ονομάσει κανείς πραγματικό μόνο αυτό που ενεργεί πάνω στις αισθήσεις μας ή τουλάχιστον μπορεί να έχει ως άμεση ή μακρινή συνέπεια του την αισθητηριακή αντίληψη, τότε ασφαλώς κανένας από αυτούς τους αριθμούς δεν είναι πραγματικός. Αλλά δεν χρειάζομαστε καθόλου τέτοια αισθήματα ως αποδεικτική ματρηρία για τα θεωρήματά μας. Στις έδενες μας μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε χωρίς ενδοιασμό κάθε όνομα ή σύμβολο που εισάγεται με λογικά αναντίρρητο τρόπο: έτσι ο αριθμός μας N₀ είναι εξίσου θεμελιωμένος με τον 2 ή τον 3.

Μολοντί, όπως πιστεύω, συμφωνώ με τον Cantor πάνω σ' αυτό το θέμα, η ορολογία μου διαφέρει κάπως από τη δική του. Ο Cantor ονομάζει «δύναμη» [Mächtigkeit] ό,τι εγώ ονομάζω «αριθμό», και στηρίζει την έννοια του αριθμού στη διάταξη. Ασφαλώς οι πεπερασμένοι αριθμοί παρουνιάζονται ως ανεξάρτητοι από τη σειραϊκή διάταξη, ενώ αυτό δεν ισχύει για τους άπειρους αριθμούς. Όμως στην κοινή χρήση η λέξη «αριθμός» και η ερώτηση «πόσα;» δεν περιέχουν καμία αναφορά σε καθορισμένη διάταξη [Anordnung]. Ο αριθμός του Cantor μάλλον απαντά στο ερώτημα: «ποιο κατά σειρά μέλος της ακολουθίας [Succession] είναι το τελευταίο μέλος;» Γ' αυτό μου φαίνεται πως η ορολογία μου συμφωνεί καλύτερα με την κοινή γλωσσική χρήση. Αν επεκτείνει κανείς την αναφορά μιας λέξης, τότε πρέπει να προσέξει ώστε να διατηρήσουν την εγκυρότητά τους όσο γίνεται περισσότερες γενικές προτάσεις, ιδίαιτερα μια τόσο θεμελιακή πρόταση, όπως αυτή που δεδαιώνει την ανεξαρτησία του αριθμού από τη σειραϊκή διάταξη. Δεν χρειάστηκε να επεκτείνουμε τη δική μας έννοια του αριθμού, επειδή από την αρχή περιλάμβανε και τους άπειρους αριθμούς.

86. Για να φτάσει του άπειρους αριθμούς του ο Cantor εισάγει την έννοια της σχέσης του «ακολουθώ σε μια σειρά». Σύμφωνα με τον Cantor θα είχαμε μια ακολουθία αν, λ.χ., τακτοποιήσαμε τους πεπερασμένους θετικούς ακεραίους με τέτοιο τρόπο, ώστε οι μονοί να ακολουθούν ο ένας τον άλλο με τη φυσική τους σειρά, και παρόμοια για τους ζυγούς, αλλά με την πρόσθετη

σημείωση ότι κάθε ζυγός αριθμός ακολουθεί όλους τους μονούς αριθμούς. Σ' αυτή την ακολουθία, ο 0, λ.χ., θα ακολουθούσε τον 13. Αλλά ο 0 δεν θα διαδεχόταν κανέναν αριθμό. Αυτή όμως η κατάσταση δεν μπορεί να παρουσιαστεί στο πλαίσιο του ορισμού μου για το «ακολουθώ σε μια σειρά». Μπορεί κανείς να αποδείξει με αυστηρό τρόπο, χωρίς να χρειαστεί κανένα αξίωμα δανεισμένο από την εποπτεία, ότι, αν ο γ ακολουθεί τον χ στη σειρά φ, τότε υπάρχει ένα αντικείμενο που έρχεται στη σειρά αμέσως πριν από τον γ. Μου φαίνεται, λοιπόν, ότι ακόμα δεν διαθέτουμε έναν ακριβή ορισμό με την έννοια του Cantor. Έτσι ο Cantor επικαλείται μία κάπως μυστηριώδη «εξωτερική εποπτεία», εκεί όπου θα έπρεπε να γίνει προσπάθεια να δοθεί απόδειξη από ορισμούς – και πιθανόν να μπορεί να δοθεί. Διότι νομίζω πως μπορεί να προσλάβει το πως θα μπορούσαν να ορισθούν αυτές οι έννοιες. Οπωσδήποτε, δεν πρέπει τούτες οι παρατηρήσεις να θεωρηθούν ως αμφισβήτηση της νομιμότητας ή της γονιμότητας αυτών των εννοιών. Αντίθετα, καλύτερα αυτές τις έδενες ως επέκταση της επιστήμης, γιατί οδήγησαν στην κατασκευή ενός καθαρά αριθμητικού δρόμου για τους ανώτερους άπειρους αριθμούς (δυνάμεις [δηλ. πληθ.αριθμους]).

Συμπέρασμα

87. Επ'είτω πως με τούτο το γράπτό έκανα ενυλογραφική την άποψη ότι οι νόμοι της αριθμητικής είναι αναλυτικές κρίσεις και, επομένως, a priori. Έτσι η αριθμητική γίνεται απλώς μια επέκταση της λογικής και κάθε πρόταση της αριθμητικής γίνεται λογικός νόμος, αν και παράγωγος. Οι εφαρμογές της αριθμητικής στις εξηγήσεις των φυσικών αριθμών γίνονται λογική επέξεργασία των γεγονότων της παρατήρησης²⁷. Ο υπολογισμός γίνεται συμπερασιμός. Οι νόμοι της αριθμητικής δεν χρειάζονται, όπως πιστεύει ο Baumann²⁸, πρακτική επίρρηση για να μπορεί να εφαρμοστούν στον εξωτερικό κόσμο γιατί στον εξωτερικό κόσμο, δηλ. στην ολότητα του χώρου και των περιεχομένων του, δεν υπάρχουν έννοιες ούτε ιδιότητες εννοιών ούτε αριθμοί. Επομένως, οι νόμοι του αριθμού δεν εφαρμόζονται πραγματικά στον εξωτερικό κόσμο: δεν είναι νόμοι της φύσης. Ωστόσο μπορεί να εφαρμοστούν στις κρίσεις που ισχύουν για τα πράγματα του εξωτερικού κόσμου: είναι νόμοι των νόμων της φύσης. Δεν δεικνύουν μόνο δεσμούς [Zusammenhang] μεταξύ φαινομένων, αλλά μεταξύ κρίσεων και σ' αυτές [τις κρίσεις] ανήκουν οι φυσικοί νόμοι.

88. Είναι φανερό ότι ο Kant²⁹ – ίσως επειδή έδωσε έναν πολύ στενό ορισμό – υποτίμησε την αξία των αναλυτικών κρίσεων, αν και φαίνεται πως είχε στο νου του την ευχύτερη σημασία με την οποία τις χρησιμοποιήσα³⁰.

Αν βασιστούμε στον ορισμό του, η διάκριση των κλίσεων σε αναλυτικές και σε συνθετικές δεν είναι διεξοδική. Σε τέτοιες περιπτώσεις μπορεί να μιλήσουμε για μία έννοια ως υποκείμενο—όπως προκύπτει από τον ορισμό του—και να γωπήσουμε αν η έννοια του κατηγορημάτων περιέχεται σ' αυτήν ή όχι. Αλλά πώς μπορεί να συμβεί αυτό, αν το υποκείμενο είναι ένα ατομικό αντικείμενο; Ή αν η κλίση είναι υπαρκτική κλίση; Σε τέτοιες περιπτώσεις δεν μπορεί να γίνει λόγος για έννοια υποκείμενου με τον τρόπο του Καπλ. Φαίνεται πως ο Καπλ θεωρεί ότι η έννοια καθορίζεται με παράθεση χαρακτηριστικών [χωρίς ιδιαίτερη διάταξη]. Αλλά από όλους τους τρόπους σχηματισμού εννοιών, αυτός είναι ο λιγότερο γόνιμος. Αν εξετάσει κανείς τους ορισμούς που δώσαμε, δεν θα βρει κανέναν ορισμό αυτού του τύπου. Το ίδιο ισχύει για τους πραγματικά γόνιμους ορισμούς των μαθηματικών, λ.χ. τον ορισμό της συνέχειας μιας συνάρτησης. Σ' αυτούς δεν βρίσκουμε έναν κατάλογο από χαρακτηριστικά· κάθε στοιχείο του ορισμού έχει έναν εσώτερο, θα έλεγα, οργανικό δεσμό με τα άλλα. Μπορεί κανείς να διασαφηνίσει εποπτικά αυτή τη διαφορά με τη βοήθεια μιας γεωμετρικής έννοιας. Αν παρastiήσουμε τις έννοιες (ή το πλάτος τους) με περιοχές ενός επιπέδου, τότε η έννοια που ορίζεται με αυτή παράθεση χαρακτηριστικών απεικονίζεται στην περιοχή η οποία είναι κοινή σε όλες τις περιοχές που παριστοιχεί τα καθοριστικά χαρακτηριστικά· αυτή περιλαμβάνει από τη στιγμή των ορίων τους. Επομένως, σ' έναν τέτοιο ορισμό οροθετούμε—για να μιλήσουμε με ειρωνεία—μία περιοχή χρησιμοποιώντας με νέο τρόπο γραμμές που έχουν ήδη δοθεί³¹. Αλλά μ' αυτό δεν προκύπτει τίποτε ουσιαστικά νέο. Οι γονιμότεροι ορισμοί χαράζουν όρια που δεν ήταν ήδη δοσμένα. Δεν βλέπουμε εκ των προτέρων ό,τι μας επιτρέπουν να συμπληρώσουμε· εδώ δεν βλέπουμε από το κομμάτι μόνο αυτό που βάλουμε μέσα. Αυτά τα συμπληρώματα επεκτείνουν τη γνώση μας και θα έπρεπε, σύμφωνα με τον ορισμό του Καπλ, να θεωρηθούν συνθετικές [κλίσεις]. ωστόσο μπορεί να αποδειχθούν με καθαρά λογικά τρόποι· επομένως, είναι αναλυτικές. Στην πράξη, μαθηκότητα, περιέχονται στους ορισμούς, αλλά όπως το φυτό στο σπόρο, όχι όπως τα δοκάρια στο σπίτι. Συχνά χρειάζομαστε περισοτέρους ορισμούς για να αποδείξουμε μία πρόταση που, επομένως, δεν περιέχεται σε κανέναν από τους μεμονωμένους ορισμούς, ωστόσο όμως απορρέει από όλους μαζί με καθαρά λογικό τρόπο.

89. Πρέπει ακόμα να αντιταχθώ στη γενικότητα του καντιανού ισχυρισμού³². Χωρίς αιθερικήτητα [Similichkeit] δεν θα μας δινόταν κανένα αντικείμενο. Το μηδέν και το ένα είναι αντικείμενα που δεν μπορούν να μας δοθούν από την αίσθηση. Αλλά και όσοι υποστηρίζουν ότι οι μικρότεροι αριθμοί είναι εποπτεύσιμοι, πρέπει τουλάχιστον να δεχθούν ότι κανένας από τους αριθμούς που υπεργαίνονται τον 1000¹⁰⁰⁰ δεν μπορεί να τους

δοθεί εποπτικά και ότι, ωστόσο, γνωρίζουμε κάμποσα πράγματα γι' αυτούς. Ίσως ο Καπλ να χρησιμοποιούσε τη λέξη «αντικείμενο» με κάποιον διαφορετικό νόημα, αλλά τότε οι παρατηρήσεις του δεν αφορούν τον μηδέν, τον 1 ή τον αριθμό μας N₀, γιατί αυτοί δεν είναι ούτε έννοιες· επιπλέον ο Καπλ απαιτεί να συνδεθούν εποπτικά την έννοια με τα αντικείμενά της.

Για να μην κατηγορηθώ ότι ψάχνω ασήμαντα ψευδία στο έργο μιας μεγαλύτερης που πρέπει να τη βλέπουμε με ευγνωμοσύνη και σεβασμό, πιστεύω ότι πρέπει να τονίσω και τα σημεία στα οποία συμφωνούμε· αυτά είναι πολύ περισσότερα από τα σημεία διαφωνίας. Για να θέλω μόνο αυτά που έχουν άμεση συνάρτηση με το θέμα μας, θεωρώ πως ο Καπλ προσέφερε μεγάλη υπηρεσία με το να διακρίνει τις αναλυτικές και τις συνθετικές κλίσεις. Με το να χαρακτηρίζει συνθετικές και α priori τις αλήθειες της γεωμετρίας αποκάλυψε την πραγματική φύση τους. Αυτό αξίζει να το επαναλάβει κανείς, αφού και σήμερα δεν αναγνωρίζεται πάντα. Αν ο Καπλ έπρεπε έξω σχετικά με την αριθμητική, αυτό κατά τη γνώμη μου δεν μειώνει ουσιαστικά την αξία του έργου του. Γι' αυτόν σημασία έχει το να υπάσχονται συνθετικά α priori κλίσεις· δεν έχει μεγάλη σημασία, αν τις βρίσκει κανείς μόνο στη γεωμετρία ή και στην αριθμητική.

90. Δεν ισχυρίζομαι ότι έκανα περισσότερη από πιθανή την αναλυτική φύση των αριθμητικών προτάσεων, γιατί πάντα μπορεί να αιφριδάνει κανείς για το αν είναι δυνατόν να αποδειχθούν αποκλειστικά από λογικούς νόμους, χωρίς σε κάποιο σημείο της απόδειξης τους να έχει αναμειχθεί απαράτηρη αποδεικτική μαγιστρία άλλου είδους. Αυτή η αμφιβολία δεν διαλύεται εντέλως ούτε από τις ενδείξεις που έδωσα για την απόδειξη μεγάλων προτάσεων· μπορεί να διαλυθεί μόνο αν δοθεί μια συμπληρωμένη συμπερασματική τέτοια, ώστε όλα τα αποδεικτικά δήματα να συμμορφώνονται με ένα από τους λίγους κανόνες συμπερασμού που αναγνωρίζονται ως καθαρά λογικοί. Έτσι, μέχρι σημεία, σχεδόν ποτέ δεν δόθηκε απόδειξη αυτού του είδους, γιατί ο μαθηματικός ικανοποιείται αν κάθε μετάδοση σε νέα κλίση είναι προδωμένα ορθή. Χωρίς να ερευνά αν η φύση αυτού του προδωμένου είναι λογική ή εποπτική. Συχνά ένα τέτοιο δήμα είναι ολόκληρη επιτομή ισοδυναμική με πολλές αλές συνεπαγωγές, και σ' αυτό μπορεί να γυρίσει κάτι από την εποπτεία. Προσχωρώ με δάματα, και γι' αυτό γεννιέται η εντύπωση πως τα μαθηματικά χρησιμοποιούν μία υπεργολικά πλούσια ποιότητα κανόνων συμπερασμού. Γιατί, όσο μεγαλύτερο είναι το δάμα τόσο πιο πολύπλοκοι είναι οι συνδυασμοί αυτών συνεπαγωγών και εποπτικών αξιωμαίων, που αυτό αντιπροσωπεύει. Ωστόσο, η ορθότητα μιας τέτοιας μετάδοσης είναι συχνά άμεσα προφανής. Χωρίς ποτέ να συνειδητοποιούμε τα ενδίασημα δήματα και, καθώς δεν παριστά έναν από τους αναγνωρισμένους τύπους λογικού συμπερασμού, είμαστε αμέσως διατεθειμέ-

νοι να θεωρήσουμε αυτή τη φανερή μετάδοση ως εποπτική, και την αλήθεια του συμπεράσματος ως συνθετική, ακρόα και όταν το πεδίο της εγκυρότητας της εκτείνεται πέρα από το εποπτικά δυνατό.

91. Έτσι είναι αναπόφευκτο το αίτημα: στο συμπερασματικό πρέπει να αυτοφύγονται τα δάματα. Το ότι αυτό ικανοποιείται πολύ δύσκολα οφείλεται στο ότι η διαδικασία αυστηρής κλιμάκωσης είναι επίπονη και ανιαρή. Κάθε κάποιος περιλόγη απόδειξη απαιτεί να γίνει υπεβολικά μακροσκελής. Ειδικότερον, η υπεβολική πικυαία λογικών μορφών που εκφράζει η γλώσσα δυσχεραίνει την απομόνωση μιας ομάδας κανόνων συμπερασματικού που να επαρκούν για όλες τις περιπτώσεις και, συνάμα, να είναι ευσύνητο.

Για να μειώσω τις επιπτώσεις αυτής της κακής κατάστασης, επινόησα την εννοιολογική μου. Σκοπός της είναι να παράγει εκφράσεις συντομότερες και πιο καταληπτές, και να χρησιμοποιεί ένα είδος υπολογισμού βασισμένου σε έναν πεπερασμένο αριθμό σταθερών κινήσεων, ώστε να μην επιτρέπεται καμία μετάδοση που δεν ακολουθεί τους κανόνες οι οποίοι προοδολογίστηκαν μια για πάντα³³. Επομένως είναι αδύνατο να περάσει απασατήρητη μία υπόθεση. Έτσι, χωρίς να θανατωτώ αξιωματικά από την επραπεία, απέδειξα μία πρόταση³⁴ η οποία εκ πρώτης όψεως φαίνεται συνθετική – εδώ θα τη διατυπώσω με τον εξής τρόπο:

Αν η σχέση κάθε μέλους μιας σειράς με τον διάδοχό του είναι μονοσημαντική, και αν οι m και n ακολουθούν τον x σ' αυτή τη σειρά, τότε ο y προηγείται του m σ' αυτή τη σειρά ή συμπίπτει με τον m ή ακολουθεί τον m .

Από αυτή την απόδειξη μπορεί κανείς να δει ότι οι αναλυτικές κρίσεις μπορούν να είναι περιεχόμενα προτάσεων που διευκλίνουν τη γνώση μας³⁵.

Σημειώσεις

01. M. Dummett, 'Frege', *Encyclopedia of Philosophy* (ed. P. Edwards, 1967), vol. III, σ. 226.
02. Charles Parsons, 'Mathematics, Foundations of *Encyclopedia of Philosophy* (ό.π.), vol. V, σσ. 194-196.
03. Στην τέχνη της γλώσσας η λέξη *Bedeutung* σημαίνει «σημασία, νόημα», και στα αγγλικά αποδίδεται με τη λέξη *meaning* από τους μεταφραστές του κειμένου, τον J. L. Austin που μεταφράσε ολόκληρο το βιβλίο και τον Michael S. Mahoney που μεταφράσε το κείμενο στην ανθολογία των Benacerraf και Putnam. Όμως, ο Frege προτιμάει μία σημασιολογική θεωρία της οροίας παράγοντες είναι: το χρώμα (*Farbung*), το νόημα (*Sinn*) και η αναφορά (*Bedeutung*). Ακολουθώντας τον Dummett, θα ονομάσουμε *σημασία* μιας έκφρασης «εκείνο που γνωρίζει κανείς όταν καταλάθει την έκφραση αυτή» ('Frege' *Encyclopedia of Philosophy*, 1967, III, 231). Το νόημα της έκφρασης e ορίζεται «ως το μέτρος της σημασίας της, το οποίο σχετίζεται με τον καθολισμό της τιμής αληθείας των προτάσεων στις οποίες εμφανίζεται η έκφραση αυτή» (Frege, Λονδίνο, 1973, σ. 89), ενώ το χρώμα της έκφρασης δεν επιγράφει τον καθολισμό της τιμής αληθείας. Αδύνη χάρη, οι λέξεις 'και' και 'αλλά' έχουν το ίδιο νόημα αλλά διαφορετικό χρώμα: το ίδιο και οι λέξεις *άλογο*, *φαγκί*, *άτι*, *δρόμων*, *ταπος*. Ο Frege θεωρούσε το χρώμα *δευτερεύον* και το σχετίζει με την εικόνα που η έκφραση φέρνει στο νου του χρήστη. Αναφορά ενός όρου είναι η σύνθεσή του με μία εξωγλωσσική οντότητα – ο λογικός τύπος της οντότητας αυτής διαγράφεται από τη λογική κατηγορία στην οποία ανήκει ο όρος. Στην αναφορά αυτή διακρίνουμε ανάμεσα στην οντότητα με την οποία συνδέεται ο όρος – *μασπορ* με την ονομαστική «αντικείμενο» ή, πληθέστερα, «αντικείμενο αναφοράς» – και στο δευτερεύοντα *όρου* και αντικείμενο, που ονομάζεται και «επιμενεία». Επίσης λέμε ότι ο όρος «εξαπρωταρεί», ονομάζει, συμβολίζει, σημαίνει το αντικείμενο. Πάντως η λέξη αναφορά είναι τεχνικός όρος και δεν ακολουθεί την κοινή χρήση. Β. και Frege, 'Ueber Sinn und Bedeutung' (1892), ελδ. μετάφραση Ιόλης Πατέλλη στο περιοδικό *Δεκαέτιον* 17(1977), 19-40 [ΣΤΕ].
04. «Παράσταση» με την έννοια ενός πρότυπου που μοιάζει με εικόνα (Bild).
05. Στο προοίμιο Gold, χρονοός. Αλλάζω τη λέξη για να έχω παράδειγμα με τέσσερα γράμματα [ΣΤΜ].
06. Εδώ δεν είναι η απεικόνιση ενός διαστήματος με μήκος dx φραγμένου από δύο ξεχωριστά σημεία, αλλά ο ορισμός του νόηματος μιας ταυτότητας, όπως είναι η:

$$df(x) = g(x)dx$$
07. Αυτή η λέξη με την ψυχολογική σημασία, όχι με την ψυχολογική σημασία.
08. Baumann, *Die Lehre von Zeit, Raum und Mathematik*, том II, σ. 565. [Hume, *Treatise*, Book I, Part III, Sect. 1]
09. B. E. Schroeder, *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra* (Leipzig, 1873), σ. 7-8. E. Kossak, *Die Elemente der Arithmetik, Programm des Friedrichs - Werderschen Gymnasiums*, Berlin, 1872, σ. 16. G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannichaltigkeitslehre*, Leipzig, 1883.
10. Για να εκφράσουμε πιο άνετα και να γίνουμε ευκολότερα κατανοητός, μιλάω για παραδείγματα. Το ουσιαστικό μέρος αυτής της επιχειρηματολογίας μπορεί εύκολα να μεταφραστεί στην περίφραση της αριθμητικής ταυτότητας.
11. Non inlegans specimen demonstrandi in abstractis (έκδοση Erdmann, σ. 94).
12. Ακόμα περισσότερο, όταν στα γεωμετρικά η λέξη σημαίνει «τόπος» ή «όμοιος» [ΣΤΜ].

11. Λόγου χάριν σε μία υποθετική κρίση, η ταυτότητα κατευθύνωνων μπορεί να εμψυχήσει ως «προκείμενη» ή ως «συμπερασμά».
12. Αυτό δείχνει το οριστικό άρθρο. Για μένα έννοια είναι εκείνο που μπορεί να είναι κατηγορήσιμα ενός ενικού περιεχομένου κρίσης (singulariter beurtheilbaren Inhalts), αντικείμενο αυτό που μπορεί να είναι δυνατό υποκείμενο ενός τέτοιου περιεχομένου κρίσης. [Σημειώστε πως για τον Frege το «περιεχόμενο κρίσης» δεν είναι ψυχολογικό πρόκειται γι' αυτό που βεβαιώνει την πρόταση, γράφει μία ερώτηση κτλ... Σ.Ε.] Αν στην πρόταση: «η κατευθύνση του άξονα του τηλεσκοπίου συμπίπτει με την κατεύθυνση του γήινου άξονα» θεωρήσουμε ως υποκείμενο την κατεύθυνση του άξονα του τηλεσκοπίου, τότε το κατηγορήσιμα είναι «συμπίπτει με την κατεύθυνση του γήινου άξονα». Αυτό είναι μία έννοια. Αλλά η κατεύθυνση του γήινου άξονα είναι μόνο μέρος του κατηγορημάτος: αφού μπορεί να γίνει [γροίματική] υποκείμενο, αυτή είναι ένα αντικείμενο.
13. Ο Frege επινόησε αυτόν το νέο όρο και στα αρχικά μερικά των αποδίδων ως *equinumerous*. Ο J. L. Austin τον αποδίδει ως *equal* και προσθέτει ότι ο όρος *Gleichzahlig* είναι επινόηση που κυριολεκτικά σημαίνει «identity-numerical» ή «tautarithmetical». Οι άλογοι συγγραφείς χρησιμοποίησαν τον όρο *similar* – φημιος – αλλά ως κατηγορήσιμα του όρου *κρίση*, όχι όμως και του όρου έννοια. Προτιμά τον πιο εύληπτο όρο *ίσος* [Σ.Μ].
14. Προτείνω ότι αντί να λέμε «πλάτος της έννοιας» θα μπορούσαμε να πούμε «έννοια». Αυτόσο θα υπήρχαν δύο αντιρρήσεις σ' αυτό:
1. αυτό θα συγκρούσαν με την προγενέστερη βεβαίωσή μου ότι οι επιμέρους αριθμοί είναι αντικείμενα, όπως δείχνει η χρήση του οριστικού άρθρου σε εκφράσεις όπως ο «ο αριθμός δύο», και το ότι είναι αδύνατον να μιλήσουμε για ένα-τα, δύο-τα κτλ. στον πληθυντικό, όπως επίσης και από το γεγονός ότι ο αριθμός αποτρέπει μονόγλωσσα μέγρος να έχουν το ίδιο πλάτος χωρίς να συμπιττον.
 2. οι έννοιες μπορούν να έχουν το ίδιο πλάτος χωρίς να συμπιττον. Έχω τη γνώμη πως και στις δύο αντιρρήσεις υπάρχει ατέλεια: αυτό όμως θα μιας οδηγούσε έξω από τούτη την έρευνα. Προτιμάμετσο πως ο ανεγνώστης γνωρίζει τι είναι το πλάτος μιας έννοιας.
 15. Αυτό δεν πρέπει να συγχέεται με την περίπτωση όπου το «κίον» συνδέει μόνο φρασμενικά υποκείμενα αλλά, στην πραγματικότητα, συνδέει δύο προτάσεις.
 16. Το ίδιο και η αντίστοιχη της: Αν ο αριθμός που ταυρίζεται στην έννοια *F* είναι ο ίδιος με αυτόν που ταυρίζεται στην έννοια *G*, τότε η έννοια *F* είναι ίση με την έννοια *G*.
 17. Εντελώς διαφορετικό πείγμα είναι ο ορισμός ενός αντικειμένου μέσω μιας έννοιας στην οποία υπάγεται. Λόγου χάριν, η έκφραση «το μέγιστο πραγματικό κλάσμα» δεν έχει περιεχόμενο, γιατί το οριστικό άρθρο απαιτεί την αναφορά σε ένα καθορισμένο αντικείμενο. Αυτό την αλλά μετρά, η έννοια «κλάσμα μαζότερο του $\frac{1}{2}$ ανακεντρίστη. Για να αποδείξουμε ότι δεν υπάγεται τέτοιου κλάσματος, χρειάζεσαστε αυτή την έννοια, μολονότι περιέχει μία αντίφαση. Αυτόσο, αν θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή την έννοια για να ορίσουμε ένα αντικείμενο που να υπάγεται σ' αυτήν, θα ήταν βέβαια απαιτητικό να δείξουμε πούτα δύο χωριστά πράγματα:
 1. ότι κάποιο αντικείμενο υπάγεται σ' αυτήν.
 2. ότι μόνο ένα αντικείμενο υπάγεται σ' αυτήν.
- Εφόσον, λοιπόν, η πτώση αυτής της προτάσεως είναι ψευδής, η έκφραση «το μέγιστο πραγματικό κλάσμα» στερείται αναφοράς.
18. Βλ. την προηγούμενη σημείωση.
19. Δηλ. μία πρόταση που δεν είναι γενική.

20. Βλ. Erdmann, *Die Axiome der Geometrie* (1877), σ. 164.
21. Halle n/S., 1879. [Στις § 23-31 επεξεργάζεται μία θεωρία των αξιωματικών – ειδικά της γαλονομηκότητας μιας ιδιότητας *F* στα μέλη της σειράς φ. Σ.Μ].
22. Αν ο *n* δεν είναι αριθμός, τότε ο ίδιος ο *n* είναι το μόνο μέλος της σειράς των φυσικών αριθμών που λήγει στον *n*. Δεν πρέπει να ακανονιάζεται κανείς μ' αυτή την έκφραση.
23. Ο E. Schröder (ό.π., σ. 63) φαίνεται να θεωρεί αυτή την πρόταση ως συνεπεία ενός συστημάτος συμβολισμού, που θα μπορούσε να ενοηθεί διαφορετικά. Εδώ πρέπει να παρατηρηθεί ξανά η κακή κατάσταση που δάσσει ολόκληρη την παρουσίασή του – δεν είναι ποτέ σαφές αν ο αριθμός είναι σύμβολο και, αν τούτο συμβαίνει, ποια είναι η αναφορά του, ή αν ο αριθμός είναι ο ίδιος αναφορά ενός συμβόλου. Από το γεγονός ότι υποθετικά διαφορετικά σύμβολα, ώστε να μην επανέρχεται το ίδιο σύμβολο, δεν απορρέει ότι αυτά τα σύμβολα έχουν διαφορετικές αναφορές.
24. Ο Frege χρησιμοποιεί το σύμβολο ∞ . Για να συμμορφωθούμε με την τρέχουσα πρακτική, το αντικαταστήσαμε με το πρώτο γράμμα του εδάκιου αλφαριθμητικού με δείκτη μηδέν – διάταξε αλέφ-μηδέν [Σ.Μ].
25. *Grundlagen einer allgemeinen Mannichaltigkeitslehre*, Leipzig, 1883.
26. Αυτή η έκφραση φαίνεται να συγκρούεται με τις προγενέστερες παρατηρήσεις μου, στις οποίες τόνισα την αντικειμενικότητα των εννοιών – αυτόσο εδώ υποκειμενική είναι μόνο η ορολογία.
27. Η ίδια παρατήρηση επιτερεύει ήδη μία λογική δραστηριότητα.
28. *Die Lehre von Zeit, Raum und Mathematik*, τομ. II, σ. 670.
29. *Κριτική του Καθαρού Λόγου*, εκδ. Hartenstein, τόμ. III σ. 39 κ.ε. [Πρότυπη, εκδ. Α 6 κ.ε./B 10 κ.ε.].
30. Στη σ. 43 [B 14] λέει ότι μπορούμε να κατανοήσουμε μία συνθετική κρίση σύμφωνα με το νόμο της αντίφασης, αν μπορούμε να μιλάμε για όλα συνθετικά πρόταση.
31. Το ίδιο συμβαίνει και αν τα χαρακτηριστικά συνδέονται με το [διαδευκτικό] «ή».
32. Ο.π., τόμ. III, σ. 82 [Πρότυπη, εκδ. Α 51/B 75].
33. Αντίθετα με το συμβολισμό του Boole, προσηγορίας της είναι να εκφράσει όχι μόνο τη λογική μορφή αλλά και το περιεχόμενο των προτάσεων.
34. *Begriffsschrift*, Halle n/S., 1879, σ. 86, τύπος 133.
35. Ορισμότερο αυτή η απόδειξη θα θεωρηθεί μαρσοκελής: μειονέκτημα όμως που ίσως θα φανεί ότι αντισταθμίζεται – και με το παραπάνω – από τη σχεδόν απόλυτη βεβαιότητα ότι δεν περιέχει λάθος ή γάματα. Στόχος μου ήταν τότε να τα ανεγάρω όλα στον ελάχιστο δυνατό αριθμό από όσο γίνεται απόλυτους λογικούς νόμους. Γ' αυτό και χρησιμοποιήσα μονόγλωσσα κανόνα συμπερασματικού. Αυτόσο, και τότε ακόμα, επισημάνω στον Πρόλογό μου (σ. VII) ότι για παρατετα εφαρμογές ανωσιστά η απόδοχή περιεσώτερον κανόνων συμπερασματικού. Αυτό μπορεί να γίνει χωρίς να χρειάζεσαστε τη διάκριση των συμπερασμών, και μ' αυτό θα ήταν δυνατόν να πετύχει έναν αξιοσημείωτο βαθμό οπιατήτης.