# ΑΝΩ ΚΑΙ ΚΑΤΩ ΟΡΙΟ ΦΡΑΓΜΕΝΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ

Σε κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών θα αντιστοιχίσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς τους οποίους θα καλούμε *κάτω* και *άνω όριο* της ακολουθίας. Από τον ορισμό τους θα έχουμε ότι για οποιαδήποτε φραγμένη ακολουθία το κάτω όριο είναι πάντα μικρότερο ή ίσο του άνω ορίου. Θα δείξουμε ότι μια φραγμένη ακολουθία είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν τα δύο αυτά όρια είναι ίσα και στην περίπτωση αυτή η κοινή τιμή τους είναι το όριο της ακολουθίας. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο του Ολοκληρωμάτων η διαδικασία αυτή είναι ανάλογη με αυτήν που ακολουθούμε για να ορίσουμε τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, όπου εκεί για κάθε φραγμένη συνάρτηση ορίζεται το κάτω και το άνω ολοκλήρωμα και όταν αυτά είναι ίσα τότε η κοινή τιμή τους είναι και το ολοκλήρωμα της συνάρτησης.

Περνάμε τώρα στον ορισμό του άνω και κάτω ορίου. Έστω $(a_n)$ μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών.

**<u>ΒΗΜΑ 1.</u>** Παίρνοντας τα τελικά τμήματα της $(a_n)$ σχηματίζουμε την ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ που απαρτίζονται από τους όρους των τελικών τμημάτων της $(a_n)$. Συγκεκριμένα, έστω

$$A_1 = \{a_1, a_2, a_3 \dots\}, \quad A_2 = \{a_2, a_3, a_4, \dots\}, \quad A_3 = \{a_3, a_4, a_5, \dots\}, \dots$$

Γενικά, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$A_n = \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$$

ή με άλλον συμβολισμό

$$A_n = \{a_k : k \geq n\}.$$

Παρατηρούμε ότι $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$, δηλαδή η $(A_n)$ είναι μια *φθίνουσα* ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.

**<u>ΒΗΜΑ 2.</u>** Επειδή έχουμε υποθέσει ότι η $(a_n)$ είναι φραγμένη (δηλαδή υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ με $m \leq a_n \leq M$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι τα σύνολα $A_n$ είναι όλα φραγμένα (άνω και και κάτω) και συνεπώς ορίζονται τα infimum και supremum τους. Θέτουμε

$$\tau_n = \inf A_n = \inf\{a_k : k \geq n\} \quad \text{και} \quad s_n = \sup A_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Με αυτόν τον τρόπο σχηματίζουμε δύο νέες ακολουθίες $(\tau_n)$ και $(s_n)$ πραγματικών αριθμών. Επειδή $A_n \supseteq A_{n+1}$ έχουμε

$$\tau_n \leq \tau_{n+1} \leq s_{n+1} \leq s_n \tag{1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (*θυμηθείτε εδώ ότι όταν περνάμε σε υποσύνολο ενός συνόλου τότε μεγαλώνει το infimum και μικραίνει το supremum, δηλαδή* $A \supseteq B \Rightarrow \inf A \leq \inf B \leq \sup B \leq \sup A$).

Άρα

$$\tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3 \leq \dots \leq s_3 \leq s_2 \leq s_1 \tag{2}$$

**ΒΗΜΑ 3.** Από την σχέση (2), έχουμε ότι η $(\tau_n)$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από κάθε όρο της $(s_n)$ και αντίστοιχα , η $(s_n)$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από κάθε όρο της $(\tau_n)$. Από το βασικό Θεώρημα της σύγκλισης μονότονων και φραγμένων ακολουθιών έχουμε συνεπώς ότι οι ακολουθίες $(\tau_n)$ και $(s_n)$ συγκλίνουν. Το όριο της $(\tau_n)$ το καλούμε *κάτω όριο της* $(a_n)$ και το όριο της $(s_n)$ το καλούμε *άνω όριο της* $(a_n)$. Το κάτω όριο της $(a_n)$ το συμβολίζουμε με

$$\underline{\lim}\ a_n \text{ ή με } \liminf a_n$$

και αντίστοιχα το άνω όριο της $(a_n)$ το συμβολίζουμε με

$$\overline{\lim}\ a_n \text{ ή με } \limsup a_n.$$

Επειδή $\tau_n \leq s_n$ έπεται ότι και $\lim \tau_n \leq \lim s_n$ και άρα

$$\underline{\lim}\ a_n \leq \overline{\lim}\ a_n \tag{3}$$

Επειδή το όριο μιας αύξουσας και άνω φραγμένης ακολουθίας είναι το supremum των όρων της και αντίστοιχα το όριο μιας φθίνουσας και κάτω φραγμένης ακολουθίας είναι το infimum των όρων της θα έχουμε

$$\begin{aligned} \underline{\lim}\ a_n &= \sup\{\tau_n : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{\inf A_n : n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned} \tag{4}$$

και αντίστοιχα

$$\begin{aligned} \overline{\lim}\ a_n &= \inf\{s_n : n \in \mathbb{N}\} \\ &= \inf\{\sup A_n : n \in \mathbb{N}\} \end{aligned} \tag{5}$$

**Παρατηρήσεις**

1) Αν $I_n = [\tau_n, s_n]$ είναι το κλειστό διάστημα με άκρα $\tau_n$ και $s_n$ τότε το $I_n$ είναι το μικρότερο κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}$ που περιέχει το τελικό τμήμα της $(a_n)$, $A_n = \{a_k : k \geq n\}$. Από την σχέση (1), η ακολουθία $(I_n)$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών και φραγμένν διαστημάτων και άρα από την Αρχή Κιβωτισμού έχουμε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [\underline{\lim}\ a_n, \overline{\lim}\ a_n]$$

Απο την άλλη μεριά παρατηρείστε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

(2) Αν η $(a_n)$ είναι αύξουσα τότε η $(s_n)$ είναι σταθερή και ειδικότερα $s_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αντίστοιχα, αν η $(a_n)$ είναι φθίνουσα τότε η $(\tau_n)$ είναι σταθερή και $\tau_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Μπορεί να συμβεί να είναι σταθερές και οι δύο ακολουθίες. Πχ. αν $a_n = (-1)^n$ τότε $\tau_n = -1$ και $s_n = 1$ (και συνεπώς $\underline{\lim}\ a_n = -1$ και $\overline{\lim}\ a_n = 1$). Γενικά όμως οι ακολουθίες $(\tau_n)$ και $(s_n)$ δεν είναι σταθερές.

**Θεώρημα 1.** *Έστω $(a_n)$ φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

*(α) Η $(a_n)$ συγκλίνει στο $a$.*

*(β) $\underline{\lim}\ a_n = \overline{\lim}\ a_n = a$.*

*Απόδειξη.* Θέτουμε $A_n = \{a_k : k \geq n\}$, $\tau_n = \inf A_n$ και $s_n = \sup A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α) $\Rightarrow$ (β): Έστω ότι $\lim a_n = a$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$, ισοδύναμα

$$A_{n_0} \subseteq (a-\epsilon, a+\epsilon)$$

Άρα, το $a-\epsilon$ είναι κάτω φράγμα του $A_{n_0}$ και αντίστοιχα το $a+\epsilon$ είναι άνω φράγμα του $A_{n_0}$. Επομένως,

$$a - \epsilon \leq \tau_{n_0} \text{ και } s_{n_0} \leq a + \epsilon \tag{6}$$

αφού το $\tau_{n_0 =} \inf A_{n_0}$ από τον ορισμό του είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του $A_{n_0}$ και αντίστοιχα το $s_{n_0} = \sup A_{n_0}$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα του $A_n$. Επειδή $\underline{\lim}\ a_n = \sup\{\tau_n : n \in \mathbb{N}\}$ και $\overline{\lim}\ a_n = \inf\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχουμε

$$\tau_{n_0} \leq \underline{\lim}\ a_n \ \text{ και } \ \underline{\lim}\ a_n \leq s_{n_0} \tag{7}$$

Από τις (6), (7) και την (3) έχουμε

$$a - \epsilon \leq \underline{\lim}\ a_n \leq \overline{\lim}\ a_n \leq a + \epsilon \tag{8}$$

Επειδή η (8) ισχύει για *κάθϵ* $\epsilon > 0$ έπεται ότι $\underline{\lim}\ a_n = \overline{\lim}\ a_n = a$.

(β) $\Rightarrow$ (α): Έστω $\underline{\lim}\ a_n = \overline{\lim}\ a_n = a$. Για να δείξουμε ότι $\lim a_n = a$ θεωρούμε ένα $\epsilon > 0$. Είναι $a = \lim \tau_n = \sup\{\tau_n : n \in \mathbb{N}\}$ και άρα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$a - \epsilon < \tau_n \leq a \tag{9}$$

για κάθε $n \geq n_1$. Ομοίως, $a = \lim s_n = \inf\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$a \leq s_n < a + \epsilon \tag{10}$$

για κάθε $n \geq n_2$. Συνεπώς για κάθε $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε

$$a - \epsilon < \tau_n \leq s_n < a + \epsilon$$

και άρα (αφού $\tau_n \leq a_k \leq s_n$ για κάθε $k \geq n$) έπεται ότι

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$. Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0$ με $|a_n - a| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$, δηλαδή η $(a_n)$ συγκλίνει στο $a$. □