ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΑΛΜΑ　　ΑΛΓΟΡΙΘΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ
Διδάσκοντες: Θ. Λιανέας, Ε. Μαρκάκης, Δ. Φωτάκης
Εαρινό εξάμηνο 2022

2η σειρά ασκήσεων　　Προθεσμία παράδοσης: 1η Ιουνίου 2022

Πρόβλημα 1. (10 μονάδες) Η δημοτική αρχή μελετά την κατασκευή ενός νέου πάρκου, το οποίο αναμένεται να κοστίσει C ευρώ. Κάθε δημότης i, $i = 1, \ldots, n$, εκτιμά την ωφέλειά του από το νέο πάρκο σε $v_i \geq 0$ ευρώ, τιμή που είναι γνωστή μόνο στον ίδιο. Η δημοτική αρχή ζητάει από τους δημότες να δηλώσουν τις εκτιμήσεις τους $v_1, \ldots, v_n$, και θα προχωρήσει στην κατασκευή του πάρκου μόνο αν $\sum_{i=1}^{n} v_i \geq C$. Σε αυτή την περίπτωση, κάθε δημότης θα πληρώσει μια εισφορά $p_i \geq 0$. Η εισφορά έχει στόχο οι δημότες να δηλώσουν τις πραγματικές τους εκτιμήσεις, και όχι να καλύψει το συνολικό κόστος του πάρκου. Να σχεδιάσετε έναν φιλαλήθη (truthful) μηχανισμό για αυτό το πρόβλημα.

Πρόβλημα 2. (18 μονάδες) Για το πρόβλημα της μεγιστοποίησης του κοινωνικού οφέλους (social welfare maximization) στο πλαίσιο της διανομής m αγαθών σε n παίκτες με συναρτήσεις ωφέλειας $v_j : 2^{[m]} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, θεωρούμε τον άπληστο αλγόριθμο ανάθεσης:

1. Αρχικά $S_1 \leftarrow \emptyset, \ldots, S_n \leftarrow \emptyset$

2. Εξετάζουμε τα αγαθά ένα-ένα, με τη σειρά. Το αγαθό i, $i = 1, \ldots, m$, ανατίθεται στον παίκτη j με τη μέγιστη διαφορική ωφέλεια. Έτσι θέτουμε $S_j \leftarrow S_j \cup \{i\}$, όπου $j = \arg\max_{\ell \in [n]} \{v_\ell(S_\ell \cup \{i\}) - v_\ell(S_\ell)\}$.

(i) (10 μονάδες)　Μέσω αντιπαραδείγματος (αρκεί να θεωρήσετε 2 παίκτες και λίγα αγαθά), να δείξετε ότι για τον παραπάνω αλγόριθμο ανάθεσης, δεν υπάρχουν πληρωμές που εξασφαλίζουν φιλαλήθεια, ακόμη και στην περίπτωση που οι συναρτήσεις ωφέλειας είναι submodular. Για την αιτιολόγηση του αντιπαραδείγματος, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον χαρακτηρισμό των αλγόριθμων ανάθεσης που μπορούν να γίνουν φιλαλήθεις μέσω της ανυπαρξίας κύκλων αρνητικού μήκους στο correspondence graph.

(ii) (8 - bonus μονάδες)　Να δείξετε ότι ο άπληστος αλγόριθμος είναι 2-προσεγγιστικός στην περίπτωση που οι συναρτήσεις ωφέλειας είναι submodular.

Πρόβλημα 3. (16 μονάδες) Θεωρούμε ένα συνεκτικό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ όπου κάθε ακμή e "ανήκει" σε διαφορετικό παίκτη A_e και έχει πραγματικό κόστος $c_e > 0$, το οποίο είναι γνωστό μόνο στον A_e. Υποθέτουμε ότι καμία ακμή του G δεν είναι γέφυρα. Θέλουμε να υπολογίσουμε ένα συνδετικό δέντρο με ελάχιστο συνολικό κόστος.

(i) (10 μονάδες)　Να διατυπώσετε φιλαλήθη (truthful) μηχανισμό για αυτό το πρόβλημα. Αρχικά κάθε παίκτης A_e υποβάλει μια σφραγισμένη προσφορά b_e στον μηχανισμό για την ακμή e που του ανήκει. Με βάση τις προσφορές b_e, ο μηχανισμός υπολογίζει ένα ελάχιστο συνδετικό δέντρο T και την αμοιβή p_e κάθε παίκτη A_e. Κάθε παίκτης A_e επιδιώκει να μεγιστοποιήσει την ωφέλειά του u_e, η οποία είναι $u_e = p_e$, αν $e \notin T$, και $u_e = p_e - c_e$, αν $e \in T$. Για κάθε παίκτη A_e, ο μηχανισμός πρέπει να εξασφαλίζει ότι $u_e \geq 0$ και ότι ανεξάρτητα από τις προσφορές των άλλων παικτών, η ειλικρινής προσφορά $b_e = c_e$ μεγιστοποιεί το u_e.

(ii) (6 μονάδες) Ποια ιδιότητα πρέπει να έχει το γράφημα G ώστε ο αλγόριθμός σας να είναι φιλαλήθης; Να δώσετε παράδειγμα συνεκτικού γραφήματος για το οποίο ο μηχανισμός που διατυπώσατε δεν είναι φιλαλήθης.

Πρόβλημα 4. (26 μονάδες) **(i)** (8 μονάδες) Έχουμε n παίκτες στους οποίους θα μοιράσουμε N κομμάτια σοκολάτας. Το βάρος κάθε κομματιού i είναι α_i γραμμάρια, με $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_N \geq 0$. Κάθε παίκτης j έχει ωφέλεια $v_j > 0$ για κάθε γραμμάριο σοκολάτας που θα πάρει (π.χ., αν ο παίκτης j πάρει τα κομμάτια 1 και 2, η συνολική ωφέλειά του θα είναι $v_j(\alpha_1 + \alpha_2)$). Θεωρούμε ότι $v_1 \geq v_2 \geq \cdots \geq v_n > 0$, ότι το v_j είναι ιδιωτική πληροφορία κάθε παίκτη j, ότι κάθε παίκτης j διεκδικεί w_j κομμάτια σοκολάτας (θεωρούμε ότι το w_j είναι δημόσια γνωστό), και ότι $N = \sum_{j=1}^{n} w_j$ (η υπόθεση για το N είναι χωρίς βλάβη της γενικότητας, αφού μπορεί κάποια από τα τελευταία κομμάτια σοκολάτας να έχουν μηδενικό βάρος). Αρχικά υποθέτουμε ότι κάθε παίκτης j μπορεί να πάρει οσαδήποτε, από 0 μέχρι και w_j, κομμάτια σοκολάτας. Να διατυπώσετε έναν φιλαλήθη μηχανισμό, περιγράφοντας ποια κομμάτια σοκολάτας θα πάρει κάθε παίκτης και πόσο θα πληρώσει για αυτά. Ο μηχανισμός σας πρέπει να μεγιστοποιεί την κοινωνική ωφέλεια. Είναι ο μηχανισμός που προτείνατε individually rational;

(ii) (8 μονάδες) Παραλλάσσουμε το (ii) ως εξής: έχουμε μόνο $K < N$ κομμάτια σοκολάτας μοναδιαίου βάρους (άρα τώρα $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_K = 1$ και $\alpha_{K+1} = \cdots = \alpha_N = 0$) και κάθε παίκτης μπορεί πλέον να πάρει είτε 0 είτε w_j κομμάτια σοκολάτας. Τι συμβαίνει αν εφαρμόσουμε την λύση του (i) σε αυτή την παραλλαγή του προβλήματος; Πιστεύετε ότι υπάρχει μηχανισμός που μεγιστοποιεί την κοινωνική ωφέλεια, είναι φιλαλήθης, individually rational και υπολογιστικά αποδοτικός; Αν ναι να τον διατυπώσετε και να τον αναλύσετε, αν όχι, να το αιτιολογήσετε κατάλληλα.

(iii) (10 μονάδες) Παραλλάσσουμε το (ii) ως εξής: το πλήθος w_j των κομματιών που διεκδικεί κάθε παίκτης j είναι και αυτό ιδιωτική πληροφορία και η συνάρτηση αποτίμησης κάθε παίκτη j είναι $h_j(x) = \min\{x v_j, w_j v_j\}$. Συνεχίζει ο μηχανισμός του (i) να είναι φιλαλήθης για αυτή την παραλλαγή του προβλήματος; Αν όχι, να διατυπώσετε μηχανισμό που μεγιστοποιεί την κοινωνική ωφέλεια, είναι φιλαλήθης και individually rational για αυτή την παραλλαγή.

Πρόβλημα 5. (16 μονάδες) Θεωρούμε δημοπρασία για ένα αντικείμενο όπου λαμβάνουν μέρος n παίκτες. Κάθε παίκτης i έχει αξία v_i για το αντικείμενο. Θεωρούμε ότι το v_i είναι ιδιωτική πληροφορία κάθε παίκτη i και υποθέτουμε ότι $1 \leq v_i \leq 2^h$, για κάποιον θετικό ακέραιο h (το h είναι δημόσια γνωστό, εκ των προτέρων).

Θα αναλύσουμε τον παρακάτω 2^p-posted-price μηχανισμό (όπου p μη αρνητικός ακέραιος):

- Εξετάζουμε τους παίκτες σε αυθαίρετη σειρά (χβτγ, θεωρούμε ότι οι παίκτες εξετάζονται με βάση τον δείκτη τους, δηλ. $1, 2, \ldots, n$).
- Όταν έρθει η σειρά του παίκτη i, αν το αντικείμενο είναι ακόμη διαθέσιμο, δίνουμε τη

δυνατότητα στον i να αγοράσει το αγαθό στην τιμή 2^p. Αν ο i συμφωνήσει, παίρνει το αγαθό πληρώνοντας 2^p, και η δημοπρασία ολοκληρώνεται. Διαφορετικά, συνεχίζουμε με τον παίκτη $i+1$.

(i) (3 μονάδες) Να εξηγήσετε γιατί ο παραπάνω μηχανισμός είναι φιλαλήθης.

(ii) (3 μονάδες) Να δείξετε ότι για κάθε σύνολο αξιών $v_1, \dots, v_n$, και υποθέτοντας ότι η μέγιστη αξία $v_{\max} = \max_i v_i$ των παικτών για το αντικείμενο είναι δημόσια γνωστή, μπορούμε να επιλέξουμε το p ώστε να εξασφαλίσουμε πληρωμή τουλάχιστον $v_{\max}/2$.

(iii) (5 μονάδες) Να δείξετε ότι υπάρχει πιθανοτικός μηχανισμός που (χωρίς προηγούμενη γνώση του $v_{\max}$) εξασφαλίζει αναμενόμενη πληρωμή $\Omega(v_{\max}/h)$.

(iv) (5 μονάδες) Να βρείτε μια κατανομή πιθανότητας $\mathcal{D}$ στο $[1, 2^h]$, ώστε αν θεωρήσουμε έναν μόνο παίκτη του οποίου η αξία v επιλέγεται από την $\mathcal{D}$, τότε η αναμενόμενη τιμή του v (που σε αυτή την περίπτωση είναι το $v_{\max}$) είναι $\Omega(h)$, ενώ η αναμενόμενη πληρωμή που μπορούμε να εξασφαλίσουμε (ανεξαρτήτως της επιλογής του p) είναι $\Theta(1)$.

Πρόβλημα 6. (16 μονάδες) Θεωρούμε δημοπρασία με 1 αγαθό και 2 παίκτες. Η αξία (valuation) των παικτών για το αγαθό προέρχεται από την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1]$.

(i) (5 μονάδες) Να δείξετε ότι η αναμενόμενη πληρωμή για τη δημοπρασία Vickrey με 2 παίκτες είναι $1/3$.

(ii) (5 μονάδες) Έστω ότι χρησιμοποιούμε δημοπρασία Vickrey με reserve price το $1/2$. Να υπολογίσετε την αναμενόμενη πληρωμή σε αυτή την περίπτωση και να το συγκρίνετε με την αναμενόμενη πληρωμή της προηγούμενης περίπτωσης.

(iii) (6 μονάδες) Να υπολογίσετε την αναμενόμενη πληρωμή για τη δημοπρασία Vickrey με 3 παίκτες όπως οι παραπάνω.

Πρόβλημα 7. (6 μονάδες) Να υπολογίσετε την virtual valuation function για την κατανομή με cdf $F(z) = 1 - \frac{1}{(z+1)^c}$, όπου $z \in [0, \infty)$ και $c > 0$. Για ποιες τιμές του c η κατανομή αυτή είναι regular;