Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Κυρτή Βελτιστοποίηση με Εφαρμογές στη Μηχανική Μάθηση

Διδάσκοντες: Κ. Χρυσαφίνος, Δ. Φωτάκης

2η Σειρά Ασκήσεων, Ημ/νια Παράδοσης: 4/7/2022

Άσκηση 1. Θεωρούμε τον Halving Learner (ή τον Consistent Learner), στο 1ο set διαφανειών της 1ης διάλεξης (διαφ. 12 και 10), οι οποίοι προσπαθούν να ελαχιστοποιήσουν το πλήθος των λαθών (επί τη ευκαιρία, είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσετε τη σχέση μεταξύ αυτών των αλγορίθμων και του Online Loss Minimization framework). Να δείξετε ότι αν τα δείγματα έρχονται από μια οποιαδήποτε (άγνωστη, αλλά συγκεκριμένη) κατανομή $\mathcal{D}$ και το σύνολο έγκυρων υποθέσεων V_t δεν μεταβάλλεται για $\Omega(\log(1/\delta)/\varepsilon)$ συνεχόμενα δείγματα, τότε με πιθανότητα τουλάχιστον $1-\delta$, κάθε έγκυρη υπόθεση $h \in V_t$ επιτυγχάνει loss $L_{(\mathcal{D},h^*)}(h) \leq \varepsilon$ (δηλαδή έχουμε επιτύχει το guarantee του PAC Learning – εδώ υποθέτουμε realizability και h^* είναι μια υπόθεση με μηδενικό λάθος). Ποια είναι η δειγματική πολυπλοκότητα που επιτυγχάνουν οι δύο αλγόριθμοι για μια πεπερασμένη κλάση υποθέσεων $\mathcal{H}$;

Άσκηση 2. Να αποδείξετε ένα (όσο το δυνατόν καλύτερο) άνω φράγμα για το regret του αλγόριθμου Online Gradient Descent (όπως παρουσιάζεται στις διαφάνειες της 2ης και της 3ης διάλεξης) λαμβάνοντας υπόψη την προβολή στο κυρτό σύνολο εφικτών λύσεων S και χρησιμοποιώντας χρονικά μεταβαλλόμενο βήμα $\eta_t = \frac{B}{G\sqrt{t}}$.

Άσκηση 3. Στην μέθοδο Support Vector Machines (SVM), χρησιμοποιούμε ως συνάρτηση κόστους (loss function) την $\ell((\vec{x},y),\vec{w}) = \max\{0, 1 - y\,\vec{w}\cdot\vec{x}\}$ και υπολογίζουμε τον classifier $\vec{w}$ που ελαχιστοποιεί την παρακάτω συνάρτηση regularized loss:

$$f(\vec{w}) = \lambda\,\mathbb{E}\mathrm{xp}_{(\vec{x},y)\sim\mathcal{D}}\big[\ell((\vec{x},y),\vec{w})\big] + \frac{\|\vec{w}\|^2}{2}\,,$$

όπου λ είναι το regularization factor και $(\vec{x},y)$ τυχαίο δείγμα από άγνωστη κατανομή $\mathcal{D}$. Να εξειδικεύσετε τον αλγόριθμο Stochastic Gradient Descent για την μέθοδο Support Vector Machines. Τι βήμα η (ή η_t) θα χρησιμοποιήσετε και τι regret θα επιτύχετε με αυτό;

Άσκηση 4. Θεωρούμε τον παρακάτω αλγόριθμο A για Online Linear Optimization, για τον οποίο θα αναλύσουμε το regret που επιτυγχάνει.

- **Input**: n actions $\{1,\dots,n\}$, time horizon T, $\vec{w}_1 = (1,\dots,1)$, $\vec{x}_1 = (1/n,\dots,1/n)$
- for $t = 1$ to T do:
  - Select action $i_t \in \{1,\dots,n\}$ with probability $\vec{x}_t(i_t)$
  - Get loss $\vec{\ell}_t \in [0,1]^n$ for all actions and incur loss $\vec{\ell}_t(i_t)$
  - Update weights $\vec{w}_{t+1}(i) = \vec{w}_t(i)e^{-\eta\vec{\ell}_t(i)}$, for all $i \in \{1,\dots,n\}$
  - Update probabilities $\vec{x}_{t+1}(i) = \frac{\vec{w}_{t+1}(i)}{\sum_{i=1}^n w_{t+1}(i)}$, for all $i \in \{1,\dots,n\}$

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση δυναμικού $\Phi(t) = \sum_{i=1}^n w_t(i)$. Αρχικά είναι $\Phi(1) = n$. Να δείξετε ότι $\Phi(T) \geq e^{-\eta\sum_{t=1}^T \vec{\ell}_t(i^*)}$, όπου $i^* = \arg\min_i \sum_{t=1}^T \vec{\ell}_t(i)$ η βέλτιστη επιλογή.
(β) Να δείξετε ακόμη ότι για κάθε $t \geq 1$,

$$\Phi(t+1) \leq \Phi(t)e^{-\eta\vec{x}_t\cdot\vec{\ell}_t + \eta^2\vec{x}_t\vec{\ell}_t^2}\,,$$

όπου $\vec{\ell}_t^2(i) = (\vec{\ell}_t(i))^2$, για όλα τα $i \in \{1, \dots, n\}$. Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση, να βρείτε ένα άνω φράγμα για το $\Phi(T)$ ως συνάρτηση του $\Phi(1) = n$.

(γ) Χρησιμοποιώντας τα άνω και κάτω φράγματα για την $\Phi(T)$ που υπολογίσατε στα (α) και (β) και το γεγονός ότι $\vec{\ell}_t \in [0, 1]^n$, για κάθε $t \in \{1, \dots, T\}$, να δείξετε ότι:

$$\text{Regret}_A(T) \leq \eta T + \ln(n)/\eta$$

Ποια τιμή του η θα επιλέγατε και ποιο είναι το $\text{Regret}_A(T)$ για αυτή;

(δ) Να εντοπίσετε (και να αναφέρετε συνοπτικά) τις ομοιότητες και τις διαφορές της παραπάνω ανάλυσης σε σχέση με την ανάλυση του EXP3 αλγόριθμου για adversarial bandits που είδαμε στην 4η διάλεξη.

Άσκηση 5. Να γενικεύσετε την ανάλυση και να δώσετε ένα άνω φράγμα στο regret του Upper Confidence Bounds (UCB) Elimination αλγόριθμου για stochastic bandits για την περίπτωση όπου το πλήθος των arms είναι $K \geq 3$ (στην 4η διάλεξη, αναλύσαμε το regret του UCB Elimination για $K = 2$ arms).

Άσκηση 6. Έστω $\mathcal{D} = \{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n\}$ κλάση αποτελούμενη από n κατανομές. Για την κλάση κατανομών $\mathcal{D}$, γνωρίζουμε hypothesis testing αλγόριθμο $A(s_1, \dots, s_k, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \varepsilon, \delta)$, ο οποίος με είσοδο κατανομές $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathcal{D}$ σε total variation distance μεγαλύτερη του ε και $k = k(\varepsilon, \delta)$ ανεξάρτητα δείγματα που έχουν ληφθεί είτε από την $\mathcal{P}_1$ είτε από την $\mathcal{P}_2$, εντοπίζει σωστά την κατανομή από την οποία προέρχονται τα δείγματα (μεταξύ των $\mathcal{P}_1$ και $\mathcal{P}_2$) με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - \delta$. Στην περίπτωση που τα δείγματα εισόδου έχουν ληφθεί από κατανομή $\mathcal{P} \in \mathcal{D}$ διαφορετική των $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ ή οι $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ βρίσκονται σε total variation distance το πολύ ε, η απάντηση του A μπορεί να είναι οποιαδήποτε από τις $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ (και δεν έχουμε καμία εγγύηση για αυτή την περίπτωση).
Με βάση τον αλγόριθμο A, να διατυπώσετε αλγόριθμο μη επιβλεπόμενης μάθησης για την κλάση κατανομών $\mathcal{D}$ που επιτυγχάνει όσο το δυνατόν μικρότερη δειγματική πολυπλοκότητα. Ειδικότερα, ο αλγόριθμός σας για κάθε $\varepsilon, \delta \in [0, 1]$, θα πρέπει να καθορίζει ένα πλήθος δειγμάτων $m = m(\varepsilon, \delta)$. Στη συνέχεια, με είσοδο m ανεξάρτητα δείγματα από άγνωστη κατανομή $\mathcal{P} \in \mathcal{D}$, ο αλγόριθμος θα πρέπει να υπολογίζει και να επιστρέφει κατανομή $\mathcal{P}' \in \mathcal{D}$ σε total variation distance το πολύ ε από την $\mathcal{P}$ με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - \delta$. Ποια είναι η δειγματική πολυπλοκότητα $m(\varepsilon, \delta)$ του αλγορίθμου σας;

Υποβολή. Οι εργασίες πρέπει να αναρτηθούν στο `https://helios.ntua.gr/mod/assign/view.php?id=24409` μέχρι τα μεσάνυχτα της Δευτέρας 4 Ιουλίου (παραμονή της ημέρας της εξέτασης).