**ΣΗΜΜΥ**
**Μαθηματική Ανάλυση**
Λύσεις του 2ου φυλλαδίου ασκήσεων

**Ασκηση 1.** *Αποδείξτε ότι* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_0+h)$.

**Λύση.** Αν $\varepsilon > 0$ και $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$, τότε υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x$ στο πεδίο ορισμού της $f$, με $0 < |x - x_0| < \delta$ να ισχύει

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon\,. \tag{1}$$

Τότε αν $0 < |h| < \delta$ και $x_0 + h$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της $f$, έχουμε ότι $0 < |x_0 + h - x_0| < \delta$ και συνεπώς από την (1) προκύπτει $|f(x_0+h) - \alpha| < \varepsilon$. Αρα $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \alpha$. □

**Ασκηση 2.** *Δείξτε ότι αν* $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ *και η συνάρτηση* $g$ *είναι φραγμένη σε περιοχή του* $x_0$*, τότε*

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)g(x)] = 0\,.$$

**Λύση.** Έστω $A$ το κοινό πεδίο ορισμού των $f, g$. Αν $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $\delta_1$ και $M > 0$, τέτοια ώστε $|g(x)| \le M$, για $x \in A \cap (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$. Από την άλλη μεριά αφού $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, υπάρχει $\delta_2 > 0$, τέτοιο ώστε για $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta_2$ να ισχύει $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$. Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ και έχουμε ότι για $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ ισχύει

$$|f(x)g(x)| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon\,.$$

Επομένως $\lim_{x\to x_0} [f(x)g(x)] = 0$ . □

**Ασκηση 3.** *Υποθέτουμε οτι* $f(x) \le g(x)$*, για κάθε* $x \in \mathbb{R}$*. Αν υπάρχουν τα όρια* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *και* $\lim_{x\to x_0} g(x)$*, να δείξετε οτι*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)\,.$$

*(Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε απαγωγή σε άτοπο.)*

**Λύση.** Έστω $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = \beta$ με $\beta < \alpha$. Αν θέσουμε $\varepsilon = \frac{\alpha-\beta}{2} > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $0 < |x - x_0| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - \alpha| < \frac{\alpha-\beta}{2}$ και $|g(x) - \beta| < \frac{\alpha-\beta}{2}$. Συνεπώς για αυτά τα $x$ ισχύει

$$g(x) < \beta + \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} = \alpha - \frac{\alpha-\beta}{2} < f(x)$$

το οποίο είναι άτοπο. Επομένως $\alpha \le \beta$. □

**Ασκηση 4.** *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα σύνολο το οποίο δεν είναι άνω φραγμένο. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ συγκλίνει στον αριθμό $L$, καθώς το $x$ τείνει στο $+\infty$ εάν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $M > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ με $x \geq M$ ισχύει $|f(x) - L| < \varepsilon$. Ως συνήθως γράφουμε*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L\,.$$

*Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : [\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Δείξτε ότι υπάρχει το όριο*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

*και είναι πραγματικός αριθμός.*
*(Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε το αξίωμα πληρότητας)*

**Λύση.** Αφού η $f$ είναι άνω φραγμένη το σύνολο τιμών της θα είναι άνω φραγμένο (και μη κενό) υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και άρα από το αξίωμα πληρότητας θα έχει supremum το οποίο συμβολίζουμε με $L$. Αν $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in [\alpha, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) > L - \varepsilon$. Τότε όμως λόγω μονοτονίας έχουμε ότι

$$f(x) > L - \varepsilon\,,\ \text{για κάθε } x \geq x_0\,.$$

Επιπλέον αφού το $\alpha$ είναι supremum, $f(x) < L + \varepsilon$, για κάθε $x \in [\alpha, +\infty)$. Επομένως

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon\,,\ \text{για κάθε } x \geq x_0$$

δηλαδή $|f(x) - L| < \varepsilon$, για κάθε $x \geq x_0$, το οποίο μας δίνει το συμπέρασμα. □

**Ασκηση 5.** *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $x_0$ σημείο συσσώρευσης του $A$. Υποθέτουμε ότι $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x} = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε*

$$|f(x)| \leq |x|\,, \text{ για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}\,.$$

**Λύση.** Αφού $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x} = 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ να ισχύει $|\frac{f(x)}{x}| < 1$. Συνεπώς

$$|f(x)| \leq |x|\,, \text{για κάθε } x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}\,.$$

□