ΣΧΟΛΗ ΗΜΜΗΥ- Ε.Μ.Π.

ΦΥΣΙΚΗ-Ι (1ο εξάμηνο)

Διδάσκοντες

Γιάννης Ράπτης, (Καθηγητής Σχολής ΕΜΦΕ)
Γραφείο 009, Ισόγειο κτ. Φυσικής (210-7723044)
yraptis@mail.ntua.gr, http://users.ntua.gr/yraptis

Κωνσταντίνος Φαράκος, (Καθηγητής Σχολής ΕΜΦΕ)
Γραφείο: 314, 3ος όροφος κτ. Φυσικής (210-7723022)
kfarakos@central.ntua.gr

16ο ΜΑΘΗΜΑ (εξ αποστάσεως)

18/11/2021

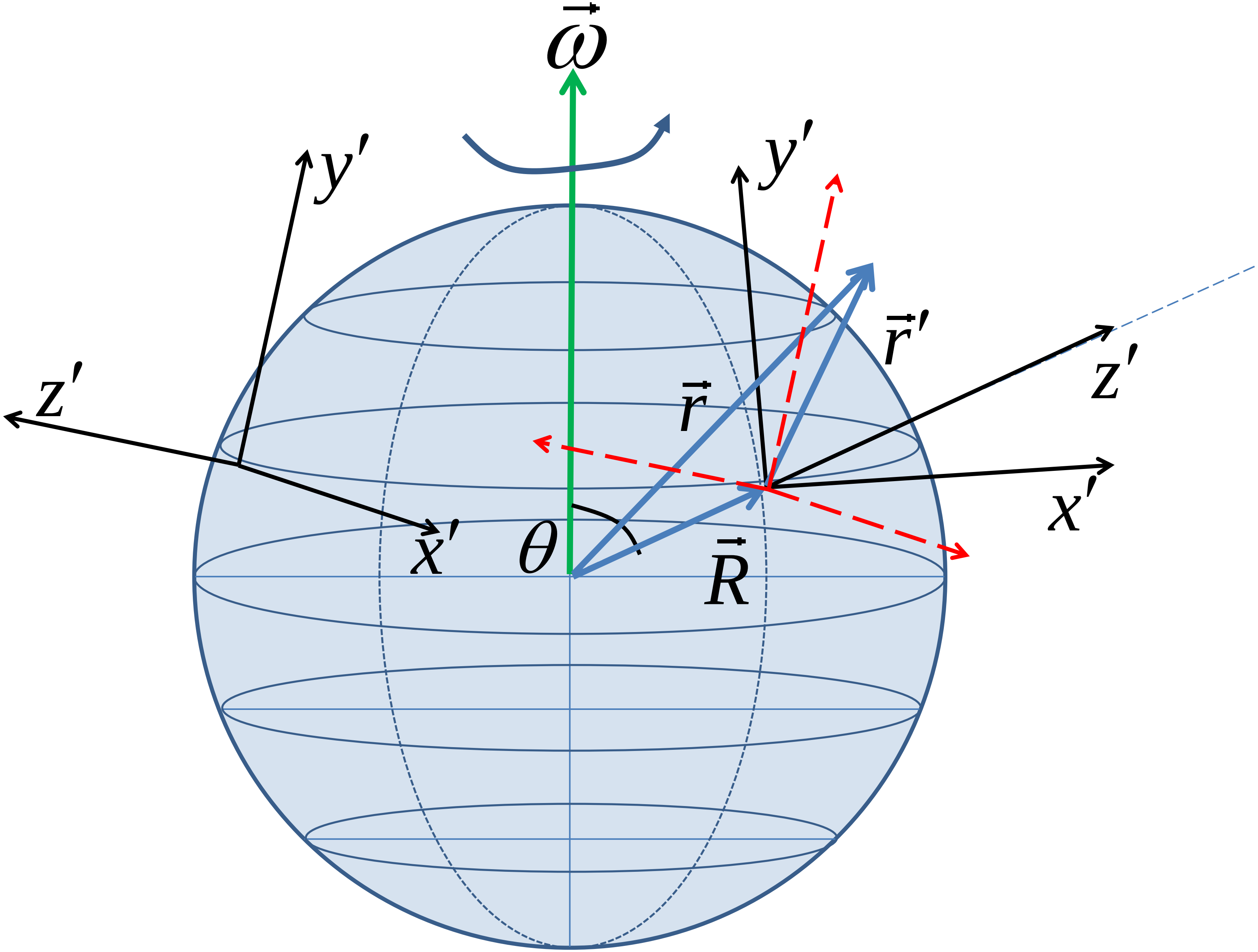
ΜΗ-ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

Συστήματα ως προς τα οποία, για να περιγράφεται η δυναμική των σωμάτων μέσω των εξισώσεων του Νεύτωνα, πρέπει να υποτεθούν και δυνάμεις που δεν προέρχονται από αλληλεπίδραση των μελετώμενων σωμάτων με άλλα σώματα, αλλά οφείλονται στον μη-αδρανειακό χαρακτήρα του συστήματος αναφοράς (Αδρανειακές δυνάμεις, ή Ψευδοδυνάμεις)

Γενική Μη-Αδρανειακότητα: Μεταφορική + Περιστροφική

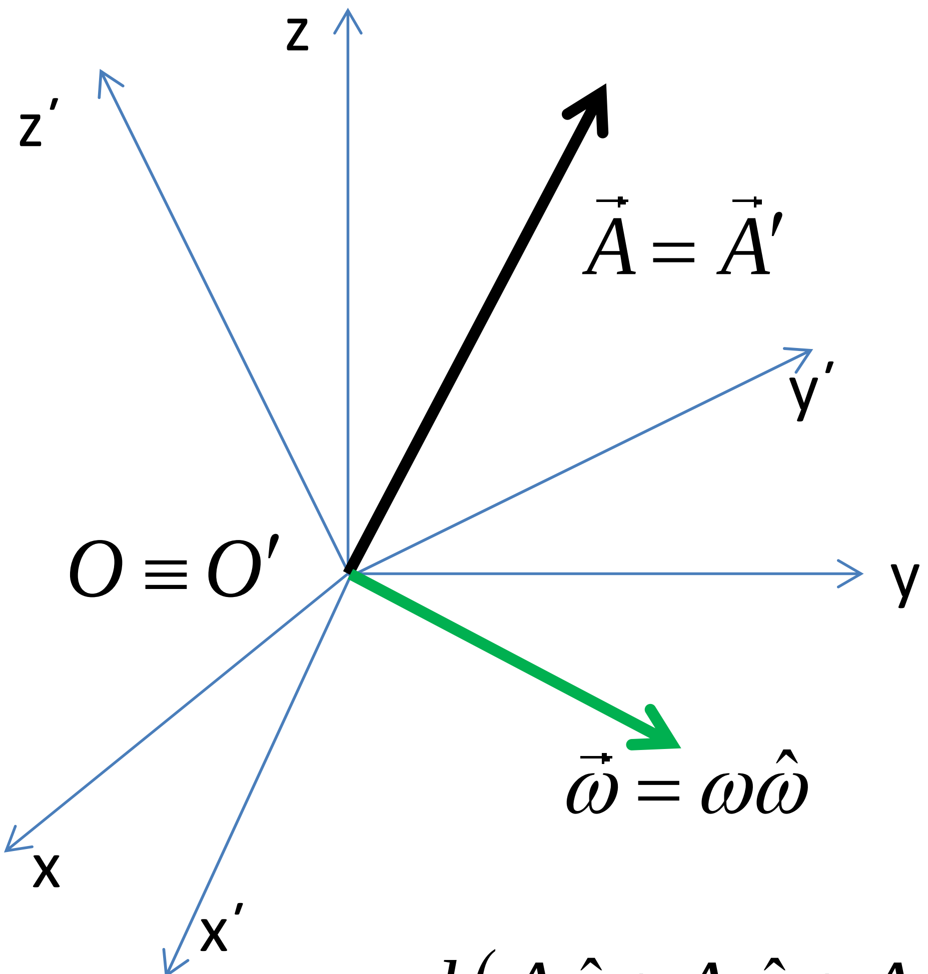
Μεταφορική: Μετατόπιση του Συστήματος Αναφοράς Ο΄x΄y΄z΄ με διατήρηση του προσανατολισμού των αξόνων του (γενικά, αυθαίρετη επιτάχυνση του σημείου Ο΄)

Περιστροφική: Η αρχή Ο΄ του συστήματος Αναφοράς Ο΄x΄y΄z΄ ακινητεί, ή κινείται ισοταχώς, αλλά το σύστημα περιστρέφεται περι κάποιον άξονα (γενικά, ο άξονας περιστροφής δεν συμπίπτει με κάποιον από τους άξονες του Ο΄x΄y΄z΄)



$\vec{\omega}$
y'
y'
$\vec{r}'$
z'
z'
$\vec{r}$
x'
x'
θ
$\vec{R}$

Μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς, περιστρεφόμενο ως προς αδρανειακό σύστημα



$$A_1\hat{x} + A_2\hat{y} + A_3\hat{z} =$$

$$= A_1'\hat{x}' + A_2'\hat{y}' + A_3'\hat{z}'$$

$$\frac{d\left(A_1\hat{x} + A_2\hat{y} + A_3\hat{z}\right)}{dt} = \frac{d\left(A_1'\hat{x}' + A_2'\hat{y}' + A_3'\hat{z}'\right)}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dA_1}{dt}\hat{x}+\frac{dA_2}{dt}\hat{y}+\frac{dA_3}{dt}\hat{z}=$$

$$\underbrace{\frac{dA_1'}{dt}\hat{x}'+\frac{dA_2'}{dt}\hat{y}'+\frac{dA_3'}{dt}\hat{z}'}+A_1'\frac{d\hat{x}'}{dt}+A_2'\frac{d\hat{y}'}{dt}+A_3'\frac{d\hat{z}'}{dt}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_F=\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R+\underbrace{A_1'\frac{d\hat{x}'}{dt}+A_2'\frac{d\hat{y}'}{dt}+A_3'\frac{d\hat{z}'}{dt}}$$

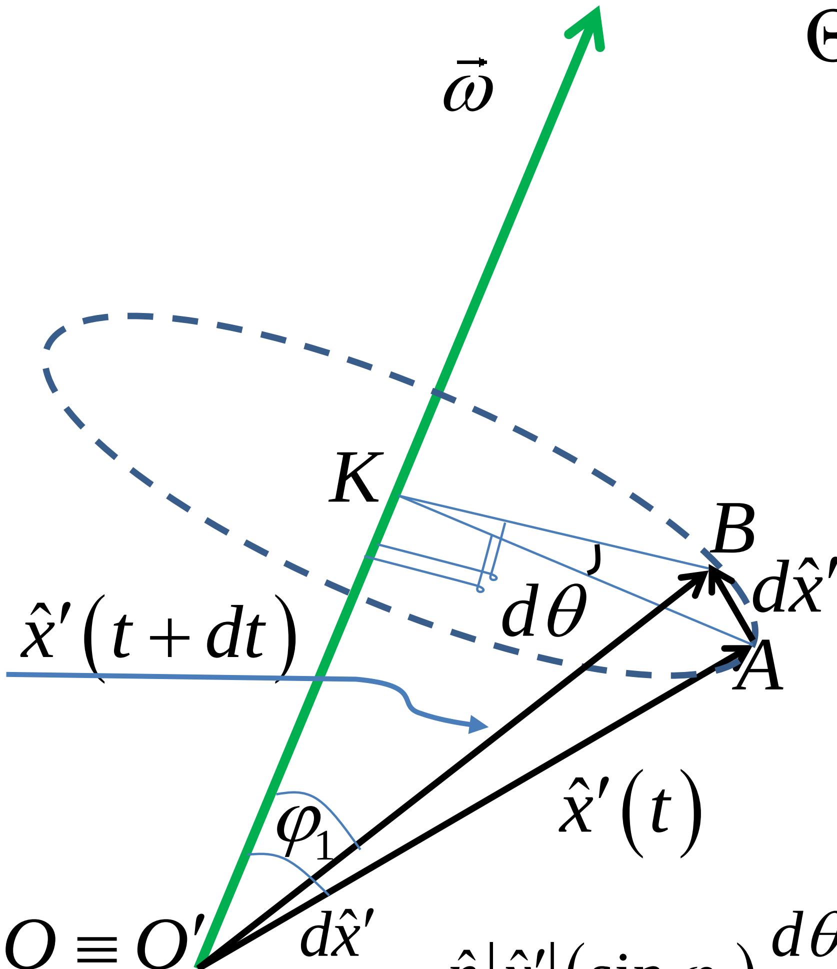
Διόρθωση,
λόγω μεταβολής των μοναδιαίων

Παράγωγος, ως προς
το μη-αδρανειακό σύστημα

Παράγωγος, ως προς το αδρανειακό σύστημα

Θα μελετήσουμε την παράγωγο

του μοναδιαίου $\hat{x}$: $\dfrac{d\hat{x}'}{dt}$



$$|d\hat{x}'| = |KA|\, d\theta$$

$$|KA| = |\hat{x}'| \sin\varphi_1$$

$$d\hat{x}' = \hat{n}|d\hat{x}'| = \hat{n}|\hat{x}'|(\sin\varphi_1)(d\theta)$$

$$\frac{d\hat{x}'}{dt} = \hat{n}|\hat{x}'|(\sin\varphi_1)\frac{d\theta}{dt} = \hat{n}|\hat{x}'|(\sin\varphi_1)(\omega) = \hat{n}|\vec{\omega}||\hat{x}'|(\sin\varphi_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\hat{x}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{x}'}$$

Όμοια: $\boxed{\dfrac{d\hat{y}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{y}'}$, $\boxed{\dfrac{d\hat{z}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{z}'}$

$$A_1'\frac{d\hat{x}'}{dt}+A_2'\frac{d\hat{y}'}{dt}+A_3'\frac{d\hat{z}'}{dt}=A_1'\left(\vec{\omega}\times\hat{x}'\right)+A_2'\left(\vec{\omega}\times\hat{y}'\right)+A_3'\left(\vec{\omega}\times\hat{z}'\right)=$$

$$\left(\vec{\omega}\times A_1'\hat{x}'\right)+\left(\vec{\omega}\times A_2'\hat{y}'\right)+\left(\vec{\omega}\times A_3'\hat{z}'\right)=\vec{\omega}\times\left(A_1'\hat{x}'+A_2'\hat{y}'+A_3'\hat{z}'\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad A_1'\frac{d\hat{x}'}{dt}+A_2'\frac{d\hat{y}'}{dt}+A_3'\frac{d\hat{z}'}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{A}'$$

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_F=\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R+\underbrace{A_1'\frac{d\hat{x}'}{dt}+A_2'\frac{d\hat{y}'}{dt}+A_3'\frac{d\hat{z}'}{dt}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_F=\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R+\vec{\omega}\times\vec{A}_R$$

Για $\vec{A}\rightarrow\vec{r}$: $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_F=\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_R+\vec{\omega}\times\vec{r}_R\quad\Rightarrow\quad\boxed{\vec{\upsilon}_F=\vec{\upsilon}_R+\vec{\omega}\times\vec{r}_R}$

$$\boxed{\vec{\upsilon}_F = \vec{\upsilon}_R + \vec{\omega}\times\vec{r}_R}$$

$$\left(\vec{\upsilon}\right)_R \equiv \vec{\upsilon}' = \upsilon_1'\hat{x}' + \upsilon_2'\hat{y}' + \upsilon_3'\hat{z}', \qquad \vec{r}_R \equiv \vec{r}' = x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}'$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\upsilon}_F\right) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\upsilon}_R + \vec{\omega}\times\vec{r}_R\right) = \frac{d}{dt}\left(\upsilon_1'\hat{x}' + \upsilon_2'\hat{y}' + \upsilon_3'\hat{z}'\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}_R + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}_R}{dt} =$$

$$= \left(\frac{d\upsilon'}{dt}_1\hat{x}' + \frac{d\upsilon_2'}{dt}\hat{y}' + \frac{d\upsilon'}{dt}_3\hat{z}'\right) +$$

$$+\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_R + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_R + \vec{\omega}\times\frac{d}{dt}\left(x'\hat{x}' + y_2'\hat{y}' + z_3'\hat{z}'\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\upsilon}_F\right) = \left(\vec{a}\right)_R +$$

$$+\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_R + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_R + \vec{\omega}\times\left[\left(\frac{dx'}{dt}\hat{x}' + \frac{dy'}{dt}\hat{y}' + \frac{dz'}{dt}\hat{z}'\right) + \vec{\omega}\times\vec{r}_R\right]$$

$$\boxed{\vec{a}_F = \vec{a}_R + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_R + 2\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_R + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_R\right)}$$

$$\vec{a}_F = \vec{a}_R + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_R + 2\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_R + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_R \right)$$

$$m\vec{a}_R = m\vec{a}_F - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_R - 2m\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_R - m\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_R \right)$$

$$m\vec{a}_R = \vec{F}_{o\lambda} - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_R - 2m\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}_R - m\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_R \right)$$

Στο μη-αδρανειακό σύστημα αναφοράς,
η διαφορική εξίσωση κίνησης χρειάζεται,
πέραν των πραγματικών δυνάμεων,
που ασκούνται από άλλα σώματα πάνω στη μάζα m,
και την συνδρομή τριών «διορθωτικών» όρων

$-m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_R$: "Εγκάρσια δύναμη», έχει σχέση με την ενδεχόμενη χρονική μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας

$-2m\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}_R$: «Δύναμη Coriolis», παρουσιάζεται όταν υπάρχει κίνηση ως προς το μη-αδρανειακό σύστημα, με ταχύτητα μη-παράλληλη προς τον άξονα περιστροφής

$-m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_R\right)$: «Φυγόκεντρος δύναμη», παρουσιάζεται για κάθε σώμα που βρίσκεται εκτός άξονα περιστροφής