Κριτήρια Σύγκρισης

Πρόταση 3: Εστω $S_1 : \sum x_n$, $S_2 : \sum y_n$, $x_n, y_n \geq 0$

και εστω

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \xi \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \qquad (\gamma)$$

τοτε

(1) Αν $\xi > 0$, υπάρχουν δύο περιπτώσεις

(i) $\sum y_n < +\infty \Leftrightarrow \sum x_n < +\infty$

(ii) $\sum y_n = +\infty \Leftrightarrow \sum x_n = +\infty$

(2) Αν $\xi = 0$, τοτε

(i) $\sum x_n = +\infty \Rightarrow \sum y_n = +\infty$

(ii) $\sum y_n < +\infty \Rightarrow \sum x_n < +\infty$

(3) Αν $\xi = +\infty$, τοτε

(i) $\sum y_n = +\infty \Rightarrow \sum x_n = +\infty$

(ii) $\sum x_n < +\infty \Rightarrow \sum y_n < +\infty$

Ενδεικτικά η απόδειξη των 1(i), 1(ii):

Απο την υπόθεση (Y): $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0$:

$$\xi\text{-}\varepsilon \quad -\xi+\varepsilon \leq \frac{x_n}{y_n} \leq \xi+\varepsilon, \ \forall n \geq n_0$$

Παρε $\varepsilon = \xi/2$. Τοτε

$$(\xi/2)\,y_n \overset{(1)}{\leq} x_n \overset{(2)}{\leq} (3\xi/2)\,y_n$$

Απ' οπου προκυπτουν τα ζητουμενα. π.χ

Λόγω (1):

Αν $\sum x_n < +\infty \Rightarrow \sum y_n < +\infty$ (Δες Προταση 2)

Παράδειγμα: Η σειρά

$$\sum \frac{n^3 + \sin(nx)}{n^4 + n}$$ αποκλινει.

Αποδ.: $x_n := \dfrac{n^3 + \sin(nx)}{n^4 + n^2}$ (≥ 0), $y_n = \dfrac{1}{n}$

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{n^4 + n\sin(nx)}{n^4 + n^2} = \frac{1 + \frac{1}{n^3}\sin(nx)}{1 + \frac{1}{n^2}} \to 1$$

Αρα, επειδή $\sum 1/n = +\infty \Rightarrow \sum x_n = +\infty$

Παράδειγμα: Η σειρά

$$\sum \frac{n+1}{n^3+1} \sin(nx)$$

συγκλίνει απολύτως. Πράγματι

$$\sum \left| \frac{n+1}{n^3+1} \sin(nx) \right| \le \sum \overbrace{\frac{n+1}{n^3+1}}^{x_n}, \quad \overbrace{y_n = \frac{1}{n^2}}^{y_n}$$

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{n^3+n^2}{n^3+1} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^3}} \to 1,$$ άρα από κριτήριο

(Πρόταση, 1η περίπτωση), αφού $\sum \frac{1}{n^2} < +\infty$,

$\Rightarrow \sum x_n < +\infty \Rightarrow$ Η αρχική σειρά συγκλίνει απολύτως

Παράδειγμα: Σύγκλιση της $\sum \overbrace{\sin^2\left(\frac{1}{n^2}\right)}^{x_n}$

$y_n = 1/n^2$, $x_n/y_n = \sin^2\left(\frac{1}{n^2}\right) \Big/ (1/n^2) \to 0.$

(Πρόταση 3, 2η (ii) περίπτωση), αφού $\sum \frac{1}{n^2} < +\infty$

$\Rightarrow$ Η σειρά επίσης συγκλίνει.

<u>Παράδειγμα</u>: Η σειρά $\sum \underbrace{\frac{1}{n}\cos\left(\frac{1}{n}\right)}_{x_n}$ αποκλίνει

Πάρε $y_n = 1/n \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = \cos\left(\frac{1}{n}\right) \to 1$

(Πρόταση, $1^{\text{η}}$ περίπτωση (ii)). Αφού $\sum \frac{1}{n} = +\infty$ το ίδιο συμβαίνει με $\sum x_n$.

<u>Παράδειγμα</u>: Σύγκλιση της $\sum \frac{n^2}{n^4 + n\sin(nx)}$

$$\sum \left| \frac{n^2}{n^4 + n\sin nx} \right| \le \sum \underbrace{\frac{n^2}{n^4 - n|\sin(nx)|}}_{x_n}, \quad y_n = 1/n^2$$

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\downarrow\, 0} \underbrace{|\sin(nx)|}_{\text{φραγμένη}}} \to 1. \text{ Αφού } \sum \frac{1}{n^2} < +\infty$$

$\Rightarrow \sum x_n < +\infty \Rightarrow$ η αρχική σειρά συγκλίνει απολύτως

{Το κριτήριο "λόγου-ρίζας" για σύγκλιση $\sum x_n$, $x_n \geq 0$.}

Πρόταση 4. Έστω η σειρά $\sum x_n$, $x_n \geq 0$. Τότε αν υπάρχει το $\lim \sqrt[n]{x_n} = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$

(1) Αν $\ell \in [0,1) \Rightarrow \sum x_n < +\infty$

(2) Αν $\ell > 1 \Rightarrow \sum x_n = +\infty$

Πόρισμα 1: Έστω $\sum x_n$, $x_n \geq 0$. Αν υπάρχει το $\lim \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ τότε

(1) Αν $\ell \in [0,1) \Rightarrow \sum x_n < +\infty$

(2) Αν $\ell > 1 \Rightarrow \sum x_n = +\infty$.

Πόρισμα 2

$$\left.\begin{array}{l} \exists \lim \sqrt[n]{x_n} = \ell \in [0,1) \Rightarrow \\ \exists \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell \in [0,1) \Rightarrow \end{array}\right\} x_n \to 0$$

Αποδειξη Πορισματος 1:

Αμεση συνεπεια της Προτασης 1 και του γνωστου αποτελέσματος:

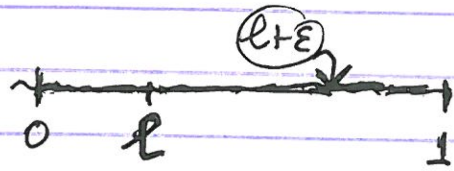
Αν $\ell = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$, τοτε υπαρχει το οριο της $\sqrt[n]{x_n}$ και ταυτίζεται με το ℓ.

Αποδειξη Πορίσματος 2:

Αμεση συνέπεια του γνωστού αποτελέσματος οτι αν η $\sum x_n$ συγκλινει τοτε $x_n \to 0$

Απόδειξη Πρότασης 4:

- Δείχνουμε ότι αν $\exists \lim \sqrt[n]{x_n} = \ell$ με $\ell \in [0,1)$ τότε $\sum x_n < +\infty$. χβγ $\ell \in (0,1)$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ επαρκώς μικρό:



$$a \stackrel{o\rho}{=} \ell + \varepsilon < 1$$

$\exists n_0 : \quad \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{x_n} < \ell + \varepsilon \, , \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$

$$x_n < (\ell+\varepsilon)^n, \forall n \geq n_0$$

Επειδή $\sum a^n < +\infty$, λόγω της επιλογής $a = \ell + \varepsilon < 1$, προκύπτει ότι, επίσης, $\sum x_n < +\infty$.

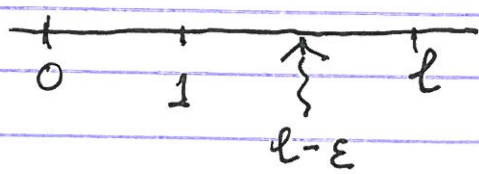
- Δείχνουμε ότι αν $\ell > 1$ τότε $\sum x_n = +\infty$.

Πράγματι, $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0$:

$$\ell - \varepsilon < \sqrt[n]{x_n} < \ell + \varepsilon \, , \forall n \geq n_0$$

Επειδή $\ell > 1$, μπορούμε να επιλέξουμε ε:

$$a = \ell - \varepsilon > 1$$



Συνεπώς $a^n < x_n, \forall n \geq n_0$

και επειδή, λόγω επιλογής $a = \ell - \varepsilon > 1$, $\sum a^n = +\infty$ προκύπτει ότι, επίσης, $\sum x_n = +\infty$

x_n

Άσκηση 1 Διερεύνηση σύγκλισης της $\sum \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \to e^{-1} < 1$$

Άρα η σειρά συγκλίνει.

Άσκηση 2: Διερεύνηση απόλυτης σύγκλισης της σειράς

$$\sum \frac{(n+1)^n}{n!} x^n$$

$$\sum \left| \frac{(n+1)^n}{n!} x^n \right| \leq \sum \frac{(n+1)^n}{n!} |x|^n. \quad x_n$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{|x|^{n+1} (n+2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n (n+1)^n}$$

$$= \dots = |x| \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \to |x| e$$

Άρα, αν $|x| < e^{-1} \Rightarrow$ απόλυτη σύγκλιση της αρχικής σειράς

" " $|x| > e^{1} \Rightarrow \sum x_n$ αποκλίνει.

Άσκηση 3. Δείξτε ότι $\lim \frac{(n+1)^n}{n!} x^n = 0$, αν $|x| < e^{-1}$.

Άσκηση 4. Διερεύνηση απόλυτης σύγκλισης

$$\sum x^n \frac{n^2+1}{2^n}$$

$$\sum \left| x^n \frac{n^2+1}{2^n} \right| \leq \sum \underbrace{|x|^n \frac{n^2+1}{2^n}}_{x_n}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \cdots = \frac{1}{2}|x| \cdot \frac{n^2+2n+2}{n^2+1} \to \frac{|x|}{2}$$

Άρα, αν $|x| < 2 \Rightarrow$ απόλυτη σύγκλιση της δοθείσας

Άσκηση 5 Διερεύνηση απόλυτης σύγκλισης της σειράς

$$\sum \underbrace{n \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n x^n}_{x_n}, \quad x > 0$$

$$\sqrt[n]{x_n} = \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\left(\frac{n}{2n+1}\right)}_{\downarrow\, 1/2} x \to \underbrace{\frac{x}{2} < 1}$$

Αν $x < 2$ η σειρά συγκλίνει