Σειρές

$S: x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n + \dots$, $\sum x_n$

συμβολισμοί

$$\begin{cases} a_1 = x_1 \\ a_2 = x_1 + x_2 \\ a_3 = x_1 + x_2 + x_3 \\ \vdots \\ a_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ \vdots \end{cases}$$

Ορισμός: Η σειρά S συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ αν η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο a.

• Συμβολισμοί του ορίου a: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum x_n$

Όπως στην περίπτωση των ακολουθιών υιοθετούμε τον χαρακτηρισμό "η σειρά συγκλίνει" για την περίπτωση όπου το ως άνω όριο a είναι πραγματικός.

Για σειρές $\sum x_n$ με θετικά x_n, αν η σειρά συγκλίνει, γράφουμε $\sum x_n < +\infty$, ενώ αν αποκλίνει στο $+\infty$, γράφουμε $\sum x_n = +\infty$

Σκοπός: Εξαγωγή κριτηρίων για σύγκλιση της S που εξαρτώνται από τους προσθετέους x_n

Παράδειγμα 1: $1 + a + a^2 + \dots + a^n + \dots$, $a > 0$

$\cdot\, a_1 = 1$

$a_2 = 1 + a$

$a_3 = 1 + a + a^2$

$\vdots$

$a_n = 1 + a + \dots + a^{n-1}$

Επομενως

(1) Αν $a = 1 \Rightarrow a_n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n} = n \to +\infty$

(2) Αν $a \neq 1 \Rightarrow$

(2a) $a_n = \dfrac{a^n - 1}{a - 1} \to +\infty$, αν $a > 1$

(2b) $a_n = \dfrac{a^n - 1}{a - 1} \to \dfrac{1}{1-a}$, αν $a \in (0,1)$

(2c) $a_1 = a_2 = \cdots$, αν $a = 0$

Παραδειγμα 2 (Αρμονικη σειρα)

$$S : \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}_{a_n} + \cdots$$

Τοτε $a_n \nearrow$ και απο προηγουμενη ενοτητα η $\{a_n\}$

δεν ικανοποιεί την συνθήκη Cauchy, άρα $a_n \to +\infty$

και επομένως η αρμονική σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

Παράδειγμα 3. Σύγκλιση της σειράς $\sum \frac{1}{n(n+1)}$

Έχουμε $a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

$$= 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$$

Ιδιότητες – Ασκήσεις

(1) Αν $\sum x_n$ συγκλίνει $\Rightarrow x_n \to 0$

Απόδειξη:

Πάρε $a_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \Rightarrow$

$$a_n - a_{n-1} = x_n \Rightarrow \lim x_n = \lim a_n - \lim a_{n-1} = 0$$

(2) Αν $\sum x_n$, $\sum y_n$ συγκλίνουν στο $\mathbb{R}$ κ έστω

$$A = \sum x_n,\ B = \sum y_n$$

τότε $\forall k, l \in \mathbb{R}$ η σειρά $\sum k x_n + l y$ συγκλίνει στο $kA + lB$.

Απόδειξη: Έχουμε $\sum_{n=1}^{N} (k x_n + l y_n)$

$$= k \sum_{n=1}^{N} x_n + l \sum_{n=1}^{N} y_n \xrightarrow[N \to +\infty]{} kA + lB$$

(3) Αν η σειρά $\sum x_n$ αποκλίνει στο $+\infty$ και η σειρά $\sum y_n$ συγκλίνει τότε $\forall k>0$ και $l \in \mathbb{R}$ η σειρά

$$\sum k x_n + l y_n$$

αποκλίνει στο $+\infty$.

Απόδειξη: Καλούμε $A_N = \sum_{n=1}^{N} k x_n + l y_n$

$$a_N = k\sum_{n=1}^{N} x_n \quad , \quad b_N = l \sum_{n=1}^{N} y_n \Rightarrow A_N = a_N + b_N$$

Από τις υποθέσεις $\{b_N\}$ συγκλίνει στον $\mathbb{R}$, ενώ $\{a_N\}$ αποκλίνει στο $+\infty$. Άρα

$$\lim A_N = \lim b_N + \infty = +\infty$$

(4) Αν $\sum x_n$, $\sum y_n$ συγκλίνουν (στο $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) και $x_n \leq y_n$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} y_n$

Απόδειξη: Καλούμε $a_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$, $b_N = \sum_{n=1}^{N} y_n$. Τότε $a_N \leq b_N$, $a_N \to a = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $b_N \to b = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \Rightarrow a \geq b$ (το ζητούμενο)

ΑΠΟΛΥΤΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ

Ορισμός Έστω $S: \sum x_n$ και έστω η σειρά

$$S^+ : \sum |x_n|.$$

Λέμε ότι η S συγκλίνει απολύτως, άν η S^+ συγκλίνει

Συμβολισμός: $\sum |x_n| < +\infty$

Πρόταση 1: Αν S^+ συγκλίνει τότε η S συγκλίνει. (στον $\mathbb{R}$)

Απόδειξη Λόγω σύγκλισης S^+ και κριτηρίου Cauchy, αν καλέσουμε:

$$\left\{\begin{array}{l} a_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ b_n = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \end{array}\right\}, \text{ τότε:}$$

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 : |b_k - b_m| \leq \varepsilon, \forall k > m \geq n_0$, ισοδύναμα

$$\left.\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 : |x_{m+1}| + |x_{m+2}| + \cdots + |x_k| \leq \varepsilon. \\ \forall k, n \geq n_0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 : |\underbrace{x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_k}_{a_k - a_m}| \leq \varepsilon$$

που σημαίνει ότι η $\{a_n\}$ – επομένως η $\sum x_n$ – συγκλίνει

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΓΙΑ ΣΕΙΡΕΣ ΜΕ ΘΕΤΙΚΟΥΣ ΟΡΟΥΣ

Πρόταση:

(1) Εστω $\sum x_n$, $x_n \geq 0$. Τοτε υπαρχουν αποκλειστικα δυο περιπτώσεις:

(i) $\sum x_n < +\infty$

(ii) $\sum x_n = +\infty$

(2) Εστω $S_1: \sum x_n$, $S_2: \sum y_n$ με θετικούς όρους:

$0 \leq x_n \leq y_n$

Τοτε:

$$\left\{\begin{array}{l} (i)\ \sum y_n < +\infty \Rightarrow \sum x_n < +\infty \\ (ii)\ \sum x_n = +\infty \Rightarrow \sum y_n = +\infty \end{array}\right\}$$

Αποδειξη (1) Παρε $a_N := x_1 + x_2 + \cdots + x_N$. Τοτε $a_N \nearrow$ και υπαρχουν 2 περιπτώσεις $a_N \to a \in \mathbb{R}^+$ ή $a_n \to +\infty$ ...

(2) Ορίζουμε:

$$\left.\begin{array}{l} a_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ b_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n \end{array}\right\} \overset{\text{Υποθ.}}{\Rightarrow} 0 \leq a_n \leq b_n$$

Το αποτελεσμα προκύπτει απο προηγουμενη Ενότητα.

Παράδειγμα Σύγκλιση $\sum \frac{1}{n^2}$.

~~Απόδ~~ Έχουμε $0 \leq \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{x_n} < \underbrace{\frac{1}{n(n-1)}}_{y_n}$ $(n>1)$

Αφού $\sum y_n < +\infty$ (προηγούμενο αποτέλεσμα) $\Rightarrow$

$$\sum \frac{1}{n^2} \leq \sum y_n < +\infty$$

Παράδειγμα: Η σειρά $\sum \cos(nx) \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει απολύτως

γιατί $\frac{1}{n^2} \geq \left| \frac{\cos nx}{n^2} \right|$ και $\sum \frac{1}{n^2} < +\infty$

Παράδειγμα. Οι σειρές

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sum \frac{\ln(n^2+1)}{\sqrt{n}}$$

αποκλίνουν:

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sum \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$$

$$\sum \frac{\ln(1+n^2)}{\sqrt{n}} > \sum \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty \Rightarrow \sum \frac{\ln(n^2+1)}{\sqrt{n}} = +\infty$$

Παράδειγμα : δείξτε ότι $\ln(1+n) < n, \forall n \in \mathbb{N}$ και στη συνέχεια εξετάστε την σύγκλιση $\sum \frac{\ln(1+n)}{n^3}$

Απάντηση : $\sum \frac{\ln(1+n)}{n^3} \leq \sum \frac{n}{n^3} = \sum \frac{1}{n^2} < +\infty$

Παράδειγμα : Έστω $\sum x_n$, $x_n \geq 0$ και έστω

$$\{x_n'\} \subset \{x_n\}$$

με $\sum x_n' = +\infty$. Δείχνουμε ότι $\sum x_n = +\infty$

Υπόδειξη: $\underbrace{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}_{a_N} \geq \underbrace{x_1' + x_2' + \cdots + x_{n(N)}'}_{b_{n(N)}}$, $N = 1, 2, 3$

για κάποιο $n(N) \in \mathbb{N}$ με $n(N) \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$. Άρα

$b_{n(N)} \to +\infty$ (Υπόθεση) $\Rightarrow a_N \to +\infty$.

Παράδειγμα : Απόκλιση της σειράς: $\sum \frac{1}{n}\left(2 + \cos n\frac{\pi}{2}\right)$

Υπόδειξη: Δείτε ότι $\frac{1}{n}\left(2+\cos n\frac{\pi}{2}\right) > \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n} = +\infty$

Παράδειγμα : Δείξτε ότι $\frac{n-1}{n^2} \geq \frac{1}{2}\frac{1}{n}$ και $\sum \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ αποκλίνει.

Απάντηση: $\sum \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n} = +\infty$.

Παραδειγμα: Συγκλιση της σειρας

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}+\dots$$

Εχουμε:

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}+\dots$$

$$\leq 1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}+\dots<+\infty$$

αρα η σειρα συγκλινει.

Παραδειγμα: Σύγκλιση τής σειρας

$$a_1+\frac{a_2}{2!}+\frac{a_3}{3!}+\dots+\frac{a_n}{n!}+\dots, \quad |a_n|\leq 1$$

Εχουμε

$$|a_1|+\frac{|a_2|}{2!}+\dots+\frac{|a_n|}{n!}+\dots$$

$$\leq 1+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}+\dots<+\infty$$

αρα η σειρα συγκλινει απολύτως.