ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ Ι ΣΕΜΦΕ
ΕΡΓΑΣΙΑ 4

Άσκηση 1. *(α) Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *που ικανοποιούν την σχέση* $f^2(x) = 1$, *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

(β) Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *που ικανοποιούν την σχέση* $f^2(x) = x^2$, *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 2. *Έστω* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση.*

(α) Αν $f(x) > 0$ *για κάθε* $x \in [a, b]$ *δείξτε ότι υπάρχει* $\theta > 0$ *τέτοιο ώστε* $f(x) \geq \theta$ *για κάθε* $x \in [a, b]$. *Αντίστοιχα, αν* $f(x) < 0$ *για κάθε* $x \in [a, b]$ *δείξτε ότι υπάρχει* $\theta > 0$ *τέτοιο ώστε* $f(x) \leq -\theta$ *για κάθε* $x \in [a, b]$.

(β) Αν $|f(x)| > 0$ *για κάθε* $x \in [a, b]$ *δείξτε ότι υπάρχει* $\theta > 0$ *τέτοιο ώστε ακριβώς ένα από τα παρακάτω ενδεχόμενα συμβαίνει: Είτε 1)* $f(x) \geq \theta$ *για κάθε* $x \in [a, b]$, *ή (2)* $f(x) \leq -\theta$ *για κάθε* $x \in [a, b]$.

Άσκηση 3. *(α) Αν* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *συνεχής με* $f(q) = 0$ *για κάθε* $q \in \mathbb{Q}$, *δείξτε ότι* $f = 0$.

(β) Αν $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *συνεχείς με* $f(q) = g(q)$ *για κάθε* $q \in \mathbb{Q}$, *δείξτε ότι* $f = g$.

Άσκηση 4. *Έστω η συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με τύπο*

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ x^2, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

Βρείτε τα σημεία συνέχειας της f.

Άσκηση 5. *Έστω* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) > 0$ *και* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. *Δείξτε ότι υπάρχει* $x_0 \in \mathbb{R}$ *στο οποίο η* f *λαμβάνει μέγιστη τιμή. (Υπόδειξη: Βρείτε* $a < 0 < b$ *τέτοια ώστε* $f(x) < f(0)$ *για κάθε* $x \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$.*)*

Άσκηση 6. *(α) Έστω* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *φθίνουσα συνάρτηση και έστω* $g(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$. *Δείξτε ότι (1) η* g *είναι γνησίως φθίνουσα και (2)* $g(x) \cdot g\left(f(x)\right) \leq 0$, *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση. Δείξτε η* f *έχει μοναδικό σταθερό σημείο (δηλαδή υπάρχει μοναδικό* $x_0 \in \mathbb{R}$ *με* $f(x_0) = x_0$*).*

Άσκηση 7. *Μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$, I διάστημα του $\mathbb{R}$ καλείται **Lipschitz** αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$

για όλα τα $x, y \in I$.

(α) Δείξτε ότι κάθε Lipschitz συνάρτηση είναι συνεχής.

(β) Αν f παραγωγίσιμη με φραγμένη παράγωγο δείξτε ότι η f είναι Lipschitz. Ειδικότερα, αν $|f'(x)| \leq C$ για κάθε $x \in I$, δείξτε ότι $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$, για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το ΘΜΤ)

(γ) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ δεν είναι Lipschitz. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε ότι $f'(0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$).

Άσκηση 8. *Μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$, $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$, καλείται **ομοιόμορφα συνεχής** αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in X$ με $|x - y| < \delta$ έχουμε ότι $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι συνεχής.*

(α) Δείξτε ότι κάθε Lipschitz συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

(1) Η $f : X \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(2) Αν (x_n), (y_n) ακολουθίες στο X με $x_n - y_n \to 0$ έχουμε $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

(γ) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{1}{x}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. (Υπόδειξη: Θεωρείστε τις ακολουθίες $x_n = \dfrac{1}{n}$ και $y_n = \dfrac{1}{n+1}$)

(δ) Δείξτε ότι κάθε $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής είναι ομοιόμορφα συνεχής (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το (β) και το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass).