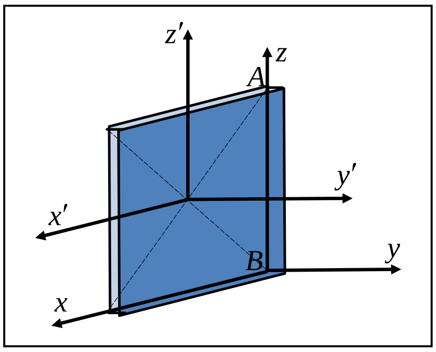
ΕΜΠ – ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ – ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ – ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2021-22
ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ-Ι, 1ΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΧΟΛΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΜΥ
Διδάσκοντες: Κ. Φαράκος, Ι. Ράπτης

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 4ης ΣΕΙΡΑΣ 36/12/2021

1. Μία λεπτή τετράγωνη πόρτα με μάζα M και πλευρά a μπορεί να περιστραφεί χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα AB που συμπίπτει με μία από τις πλευρές της. Αρχικά η πόρτα είναι ανοιχτή και σχηματίζει γωνία 90^o με τον τοίχο. Μία μπάλα μάζας m κινείται οριζόντια με ταχύτητα V και συγκρούεται κάθετα με την πόρτα σε απόσταση a/2 από τον άξονα AB. Η κρούση είναι ελαστική.
(α) Να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας της πόρτας ως προς τον άξονα AB.
(β) Ποιες ποσότητες διατηρούνται κατά την ελαστική κρούση της μπάλας με την πόρτα?
(γ) Σε πόσο χρόνο θα κλείσει η πόρτα από την στιγμή σύγκρουσης με την μπάλα?

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



(α) Η ροπή αδράνεις ορθογώνιας πλάκας (a×b) ως προς άξονα κάθετο στην πλάκα που διέρχεται από το Κέντρο Μάζας της είναι $I_{KM} = \frac{M}{12}\left(a^2+b^2\right)$.

Στο πρόβλημά μας, αυτό μεταφράζεται σε: $I_{y'} = \frac{M}{6}a^2$

Από το Θεώρημα των κάθετων αξόνων, έχουμε:
$\frac{M}{6}a^2 = I_{y'} = I_{x'} + I_{z'} = 2I_{z'} \Rightarrow I_{z'} = \frac{M}{12}a^2$

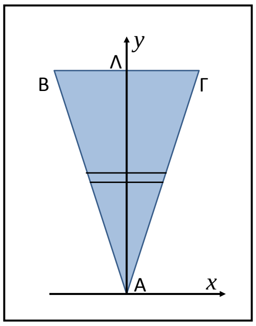
Από το Θ. παράλληλων αξόνων, έχουμε: $I_z = I_{z'} + M\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{M}{12}a^2 + \frac{M}{4}a^2 = \frac{M}{3}a^2$

(β) Κατά την ελαστική κρούση της μπάλας με την πόρτα διατηρούνται (i) η συνολικής μηχανική ενέργεια (με τη μορφή κινητικής ενέργεις), και (ii) η στροφορμή ως προς τον άξονα AB (ακλόνητος άξονας). [Δεν διατηρείται η ορμή λόγω της ύπαρξης ακλόνητου σημείο/άξονα, δηλ. λόγω σύνδεσης με άπειρη αδράνεια]

Διατήρηση Ενέργειας $\frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}I_z\omega^2 + \frac{1}{2}mV'^2$ (1)

Διατήρηση στροφορμής $mV\frac{a}{2} = I_z\omega - mV'\frac{a}{2}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow \omega = \left(\frac{V}{a}\right)\frac{4ma^2}{4I_z+ma^2}$, (γ) $\omega\Delta t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{2\omega}$



2. **(α)** Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας $I_{\mathrm{A}} = I_{\mathrm{A}}\left(M,\beta,\upsilon\right)$ λεπτού ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, ως προς άξονα κάθετο στο τρίγωνο που διέρχεται από την κορυφή Α, αν είναι γνωστή η μάζα του M, η βάση του ΒΓ=β και το ύψος του ΑΛ=υ. **(β)** Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του ίδιου τριγώνου, $I_{\mathrm{K}} = I_{\mathrm{K}}\left(M,\beta,\upsilon\right)$ ως προς άξονα κάθετο στο τρίγωνο, που διέρχεται από το κέντρο μάζας Κ. **(γ)** Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του ίδιου τριγώνου, $I_{\Lambda} = I_{\Lambda}\left(M,\beta,\upsilon\right)$ ως προς άξονα κάθετο στο τρίγωνο, που διέρχεται από το μέσο Λ της βάσης του.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Από τα όμοια τρίγωνα: $\dfrac{x}{y}=\dfrac{\beta/2}{\upsilon} \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{\beta}{2\upsilon}y$, οπότε:

$$I_{\mathrm{A}}=\int dI_{\mathrm{A}}=\int\left[\frac{1}{12}dm(2x)^2+y^2dm\right]=\frac{1}{12}\int_0^{\upsilon}(\sigma 2xdy)(2x)^2+\int_0^{\upsilon}y^2(\sigma 2xdy)$$

$$I_{\mathrm{A}}=\frac{2}{3}\sigma\int_0^{\upsilon}x^3dy+2\sigma\int_0^{\upsilon}xy^2dy=\frac{2}{3}\sigma\int_0^{\upsilon}\frac{\beta^3y^3}{8\upsilon^3}dy+2\sigma\int_0^{\upsilon}\frac{\beta y^3}{2\upsilon}dy$$

$$I_{\mathrm{A}}=\frac{2}{3}\sigma\frac{\beta^3}{8\upsilon^3}\int_0^{\upsilon}y^3dy+2\sigma\frac{\beta}{2\upsilon}\int_0^{\upsilon}y^3dy=\frac{\sigma\beta^3}{12\upsilon^3}\int_0^{\upsilon}y^3dy+\frac{\sigma\beta}{\upsilon}\int_0^{\upsilon}y^3dy$$

$$I_{\mathrm{A}}=\frac{\sigma\beta^3}{12\upsilon^3}\frac{\upsilon^4}{4}+\frac{\sigma\beta}{\upsilon}\frac{\upsilon^4}{4}=\frac{\sigma\beta^3}{12}\frac{\upsilon}{4}+\frac{\sigma\beta\upsilon^3}{4}=\sigma\frac{\beta\upsilon}{2}\left(\frac{\beta^2}{24}+\frac{\upsilon^2}{2}\right)\Rightarrow I_{\mathrm{A}}=\frac{1}{2}M\left(\frac{\beta^2}{12}+\upsilon^2\right)$$

(β) Το κέντρο μάζας απέχει από κάθε κορυφή τα 2/3 της αντίστοιχης διαμέσου. Στην περίπτωση του ισοσκελούς τριγώνου η διάμεσος προς τη βάση συμπίπτει με το αντίστοιχο ύψος, άρα η απόσταση ΚΑ του κέντρου μάζας από την κορυφή Α είναι ίση με 2υ/3.

Θεώρημα παράλληλων αξόνων: $I_{\mathrm{A}}=\dfrac{1}{2}M\left(\dfrac{\beta^2}{12}+\upsilon^2\right)=I_{\mathrm{KM}}+M(\mathrm{KA})^2=I_{\mathrm{KM}}+M\left(\dfrac{2}{3}\upsilon\right)^2$

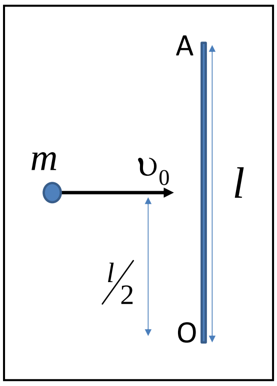
$$\Rightarrow I_{\mathrm{KM}}=\frac{1}{2}M\left(\frac{\beta^2}{12}+\upsilon^2\right)-M\left(\frac{2}{3}\upsilon\right)^2=\frac{1}{24}M\beta^2+M\frac{\upsilon^2}{2}-M\frac{4\upsilon^2}{9}=\frac{1}{24}M\beta^2+M\frac{\upsilon^2}{18}$$

Τελικά: $I_{KM}=\dfrac{1}{6}M\left(\dfrac{\beta^2}{4}+\dfrac{\upsilon^2}{3}\right)$

(γ) Όμοια: $I_{\Lambda}=I_{\mathrm{KM}}+M(\mathrm{K\Lambda})^2=\dfrac{1}{6}M\left(\dfrac{\beta^2}{4}+\dfrac{\upsilon^2}{3}\right)+M\left(\dfrac{1}{3}\upsilon\right)^2\Rightarrow I_{\Lambda}=\dfrac{1}{6}M\left(\dfrac{\beta^2}{4}+\upsilon^2\right)$

3. Ράβδος ΟΑ μήκους l είναι ακίνητη πάνω σε τραχειά οριζόντια επιφάνεια με συντελεστή τριβής μ μεταξύ της ράβδου και της οριζόντιας επιφάνειας. Η ράβδος έχει γραμμική πυκνότητα, $\lambda=\kappa(2l-r)$ όπου r η απόσταση από το άκρο Ο της ράβδου και $\kappa>0$. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα ε που διέρχεται από το άκρο της Ο. (α) Να βρείτε την μάζα m_ρ της ράβδου (συναρτήσει των (κ, l), την απόσταση του Κέντρου Μάζας της ράβδρου από το Ο, και την ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον κατακόρυφο άξονα ε που διέρχεται από το άκρο της Ο. (β) Μπάλα του γκολφ μάζας m κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ_0 και κτυπάει την ράβδο κάθετα στο μέσον της. Εάν η κρούση είναι ελαστική να βρείτε την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αμέσως μετά την κρούση. (γ) Να βρείτε την στροφορμή της ράβδου συναρτήσει του χρόνου.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



(α) $m_\rho=\int_0^l\lambda dr=\int_0^l\kappa(2l-r)dr=\dfrac{3}{2}\kappa l^2$

$$x_{KM}=\frac{1}{m_\rho}\int_0^l rdm=\frac{1}{m_\rho}\int_0^l r\kappa(2l-r)dr=\frac{2\kappa l^3/3}{3\kappa l^2/2}=\frac{4}{9}l$$

$$I_O=\int_0^l r^2dm=\int_0^l r^2\kappa(2l-r)dr=\frac{7}{12}\kappa l^4$$

(β) $L_{O,\alpha\rho\chi} = L_{O,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow m\upsilon_0 \frac{l}{2} = m\upsilon_0' \frac{l}{2} + I_O\omega$

Ελαστική κρούση: Διατήρηση ενέργειας $\frac{1}{1} m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2} m\upsilon_0'^2 + \frac{1}{2} I_O\omega^2$

Από διατήρηση στροφορμής: $m\upsilon_0 \frac{l}{2} = m\upsilon_0' \frac{l}{2} + I_O\omega \Rightarrow \upsilon_0' = \upsilon_0 - \frac{2}{l}\frac{I_O}{m}\omega \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \upsilon_0'^2 = \upsilon_0^2 + \frac{4}{l^2}\frac{I_0^2}{m^2}\omega^2 - \frac{4}{l}\frac{I_0}{m}\upsilon_0\omega$$

Αντικαθιστώντας στη διατήρηση ενέργειας και επιλύοντας ως προς ω:

$$\omega\left[\omega\left(\frac{4I_0}{ml^2} - 1\right) - \frac{4}{l}\upsilon_0\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = 4\frac{\upsilon_0}{l}\frac{ml^2}{4I_0 - ml^2} = \frac{4m\upsilon_0}{l\left(\frac{7}{3}\kappa l^2 - m\right)}$$

(γ) Στροφορμή της ράβδου συναρτήσει του χρόνου

$$\frac{dL}{dt} = N \Rightarrow \frac{dL}{dt} = \mu\left(m_\rho g\right)x_{KM} \Rightarrow L = L_{\alpha\rho\chi} - \mu\left(m_\rho g\right)x_{KM}t \Rightarrow$$

$$L = L_{\alpha\rho\chi} - \mu\left(\frac{3}{2}\kappa l^2 g\right)\frac{2}{3}\kappa l^3 t \Rightarrow L = L_{\alpha\rho\chi} - \mu\kappa^2 l^5 g t$$

4. Κυκλική οριζόντια πλατφόρμα μάζας Μ και ακτίνας R, μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές περί τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας της. Στην περιφέρεια της πλατφόρμας, που ακινητεί, στέκεται άνθρωπος μάζας m ο οποίος, τη χρονική στιγμή $t = 0$, εκτοξεύει μάζα m_0 εφαπτομενικά προς την περιφέρεια, με ταχύτητα υ_0, ως προς τον ίδιο. (α) Δείξτε ότι η πλατφόρμα θα αρχίσει να περιστρέφεται, και υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω_0. (β) Μόλις η πλατφόρμα συμπληρώσει ένα τέταρτο του κύκλου, ο άνθρωπος αρχίζει να περπατά προς το κέντρο της πλατφόρμας (κατά μήκος μίας ακτίνας) με ταχύτητα υ και σταματά σε απόσταση R/2 από το κέντρο. Γράψτε την εξίσωση κίνησης του συστήματος Πλατφόρμα-Άνθρωπος για το χρονικό διάστημα που ο άνθρωπος μετακινείται. (γ) Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής, από τη στιγμή που ο άνθρωπος σταματά και έπειτα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής του συνολικού συστήματος, $\left(M, m, m_0\right)$, πριν και μετά την εκτόξευση της πέτρας

$$L_{tot,init} = 0 \quad \Rightarrow \quad L_{tot,final} = 0$$

$$L_{tot,final} = L_{M+m} + L_{m_0} = I_{M+m}\omega + m_0 R\left(\omega R - \upsilon_0\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega + m_0 R^2\omega - m_0 R\upsilon_0 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega + m_0 R^2\omega = m_0 R\upsilon_0 \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2m_0\upsilon_0}{\left(M + 2m + 2m_0\right)R}}$$

(β) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής του συστήματος, $\left(M, m\right)$, κατά τη διάρκεια της μετακίνησης του ανθρώπου, από την περιφέρεια προς το κέντρο.

$$\frac{dL_M}{dt}+\frac{dL_m}{dt}=0\Rightarrow\frac{1}{2}MR^2\frac{d\omega}{dt}+m\frac{d}{dt}\left(\omega r^2\right)=0$$

$$MR^2\frac{d\omega}{dt}+2m\left(2\omega r\frac{dr}{dt}+r^2\frac{d\omega}{dt}\right)=0$$

Αλλά $r=R-\upsilon t\Rightarrow\dfrac{dr}{dt}=-\upsilon$

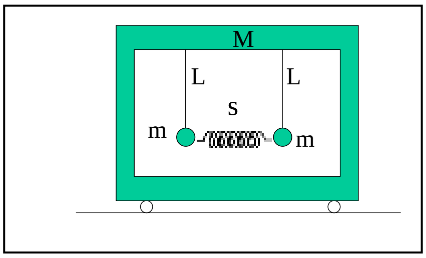
$$MR^2\frac{d\omega}{dt}+4m\omega\left(R-\upsilon t\right)\left(-\upsilon\right)+2m\left(R-\upsilon t\right)^2\frac{d\omega}{dt}=0$$

$$\left(MR^2+2m\left(R-\upsilon t\right)^2\right)\frac{d\omega}{dt}=4\upsilon m\omega\left(R-\upsilon t\right)\Rightarrow$$

$$\frac{d\omega}{\omega}=\frac{4\upsilon m\left(R-\upsilon t\right)dt}{\left(MR^2+2m\left(R-\upsilon t\right)^2\right)}=-\frac{4m\left(R-\upsilon t\right)d\left(R-\upsilon t\right)}{\left(MR^2+2m\left(R-\upsilon t\right)^2\right)}$$

$$\frac{d\omega}{\omega}=-4m\frac{rdr}{\left(MR^2+2mr^2\right)}=-\frac{d\left(MR^2+2mr^2\right)}{\left(MR^2+2mr^2\right)}\Rightarrow\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{\omega}=-\int_R^r\frac{d\left(MR^2+2mr^2\right)}{\left(MR^2+2mr^2\right)}$$

$$\Rightarrow\ln\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)=-\ln\left(MR^2+2mr^2\right)\Big|_R^r\Rightarrow\omega=\omega_0\frac{MR^2+2mR^2}{MR^2+2mr^2}\Rightarrow\boxed{\omega_{fimal}=\omega_0\frac{2M+4m}{2M+m}}$$



5. Δύο ιδανικά εκκρεμή μάζας *m* και μήκους *L*, το καθένα, κρέμονται από δύο διαφορετικά σημεία της οροφής μικρού οχήματος μάζας *M*, το οποίο μπορεί να κινείται ελεύθερα, χωρίς τριβές, πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Το σύστημα βρίσκεται μέσα σε κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας *g*, και τα δύο εκκρεμή συνδέονται με ελατήριο σταθεράς s. Τα δύο εκκρεμή εκτρέπονται κατά μικρές γωνίες από την κατακόρυφο, έτσι ώστε να κάνουν μικρές ταλαντώσεις, μένοντας στο κατακόρυφο επίπεδο που περνάει από τα σημεία ανάρτησης. (α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης για κάθε ένα από τα τρία σώματα (*m*, *m*, *M*). (β) Υποθέστε ότι το σύστημα εκτελεί κίνηση σε κανονικό τρόπο ταλάντωσης (ΚΤΤ: κοινή συχνότητα και φάση, διαφορετικά πλάτη) και διατυπώστε τη συνθήκη υπολογισμού των συχνοτήτων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης. (γ) Επιλύστε τη χαρακτηριστική εξίσωση, για την περίπτωση *m*=*M*, $\left(g/L\right)=\left(s/m\right)=\omega_0^2$, και προσδιορίστε τις συχνότητες των ΚΤΤ, συναρτήσει του ω_0.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω ότι $x_1,\ \ x_2,\ \ x_3$, οι μετατοπίσεις των $m_1,\ \ m_2,\ \ M$, από τις θέσεις ισορροπίας, και $\theta_1,\ \ \theta_2$, οι γωνίες των αντίστοιχων νημάτων με την κατακόρυφο.

$$\left\{\begin{array}{l} m_1\ddot{x}_1=-T_1\sin\theta_1-s\left(x_1-x_2\right)=-m_1g\dfrac{(x_1-x_3)}{L}-s\left(x_1-x_2\right)\\ m_2\ddot{x}_2=-T_2\sin\theta_2-s\left(x_2-x_1\right)=-m_2g\dfrac{(x_2-x_3)}{L}-s\left(x_2-x_1\right)\\ m_3\ddot{x}_3=T_1\sin\theta_1+T_2\sin\theta_2=m_1g\dfrac{(x_1-x_3)}{L}+m_2g\dfrac{(x_2-x_3)}{L}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} m_1\ddot{x}_1 + m_1 g\,\dfrac{(x_1-x_3)}{L} + s\left(x_1-x_2\right) = 0 \Rightarrow \ddot{x}_1 + \left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_1}\right)x_1 - \dfrac{s}{m_1}x_2 - \dfrac{g}{L}x_3 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + m_2 g\,\dfrac{(x_2-x_3)}{L} + s\left(x_2-x_1\right) = 0 \Rightarrow -\dfrac{s}{m_2}x_1 + \ddot{x}_2 + \left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_2}\right)x_2 - \dfrac{g}{L}x_3 = 0 \\ m_3\ddot{x}_3 - m_1 g\,\dfrac{(x_1-x_3)}{L} - m_2 g\,\dfrac{(x_2-x_3)}{L} = 0 \Rightarrow -\dfrac{m_1}{m_3}\dfrac{g}{L}x_1 - \dfrac{m_2}{m_3}\dfrac{g}{L}x_2 + \ddot{x}_3 + \dfrac{m_1+m_2}{m_3}\dfrac{g}{L}x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

Υποθέτουμε: $x_1 = A\cos(\omega t+\varphi)$, $x_2 = B\cos(\omega t+\varphi)$, $x_3 = C\cos(\omega t+\varphi)$, οπότε:

$$\left.\begin{array}{l} -\omega^2 A + \left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_1}\right)A - \dfrac{s}{m_1}B - \dfrac{g}{L}C = 0 \\ -\dfrac{s}{m_2}A + -\omega^2 B + \left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_2}\right)B - \dfrac{g}{L}C = 0 \\ -\dfrac{m_1}{m_3}\dfrac{g}{L}A - \dfrac{m_2}{m_3}\dfrac{g}{L}B + -\omega^2 C + \dfrac{m_1+m_2}{m_3}\dfrac{g}{L}C = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} \left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_1}\right)-\omega^2 & -\dfrac{s}{m_1} & -\dfrac{g}{L} \\ -\dfrac{s}{m_2} & \left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_2}\right)-\omega^2 & -\dfrac{g}{L} \\ -\dfrac{m_1}{m_3}\dfrac{g}{L} & -\dfrac{m_2}{m_3}\dfrac{g}{L} & \dfrac{m_1+m_2}{m_3}\dfrac{g}{L}-\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2\omega_0^2-\omega^2 & -\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2-\omega^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2-\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \left(\omega^2-2\omega_0^2\right) & \omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & \left(\omega^2-2\omega_0^2\right) & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & \omega_0^2 & \left(\omega^2-2\omega_0^2\right) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)\left[\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)^2-\omega_0^4\right] - \omega_0^2\left[\omega_0^2\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)-\omega_0^4\right] + \omega_0^2\left[\omega_0^4-\omega_0^2\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)\right] = 0$$

$$\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)\left[\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)^2-\omega_0^4\right] - 2\omega_0^2\left[\omega_0^2\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)-\omega_0^4\right] = 0$$

$$\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)\left[\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)-\omega_0^2\right]\left[\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)+\omega_0^2\right] - 2\omega_0^4\left[\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)-\omega_0^2\right] = 0$$

$$\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)\left(\omega^2-3\omega_0^2\right)\left(\omega^2-\omega_0^2\right) - 2\omega_0^4\left(\omega^2-3\omega_0^2\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\omega^2-3\omega_0^2\right)\left[\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)\left(\omega^2-\omega_0^2\right)-2\omega_0^4\right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(\omega^2-3\omega_0^2\right)\left[\omega^4+2\omega_0^4-3\omega_0^2\omega^2-2\omega_0^4\right] = 0 \Rightarrow \left(\omega^2-3\omega_0^2\right)\left[\omega^4-3\omega_0^2\omega^2\right] = 0,$$ άρα:

$$\Rightarrow \omega^2\left(\omega^2-3\omega_0^2\right)\left[\omega^2-3\omega_0^2\right] = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\left\{\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \omega_3 = \omega_0\sqrt{3}\right\}}$$

Ο μηδενισμός της μίας ιδιοσυχνότητας δηλώνει την ισοταχή κίνηση (ή, ακινησία) του Κέντρου Μάζας του συστήματος (επειδή το σύστημα είναι ελεύθερο, συνολικά)

Όσον αφορά την σύμπτωση των άλλων δύο ιδιοσυχνοτήτων, εδώ έχουμε την περίπτωση «εκφυλισμού» δύο Κανονικών Τρόπων Ταλάντωσης, δηλαδή την σύμπτωση των ιδιοσυχνοτήτων τους, λόγω της ύπαρξης συμμετρίας (όχι μόνο γεωμετρικής, αλλά και ενός είδους «δυναμικής» συμμετρίας)

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\omega^2-2\omega_0^2\right)A + \omega_0^2 B + \omega_0^2 C = 0 \\ \omega_0^2 A + \left(\omega^2-2\omega_0^2\right)B + \omega_0^2 C = 0 \\ \omega_0^2 A + \omega_0^2 B + 2\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)C = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{και} \qquad \left\{\begin{array}{l} \omega_1^2 = 0 \\ \omega_2^2 = 3\omega_0^2 \\ \omega_3^2 = 3\omega_0^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

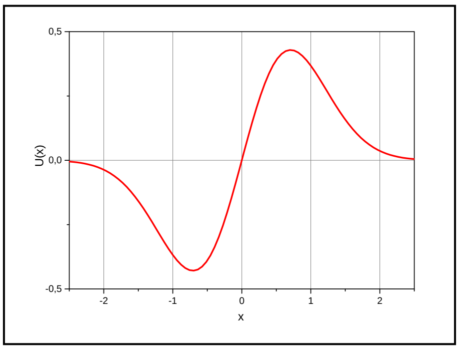
$\omega_1^2 = 0 \qquad \Rightarrow 2A = B + C \qquad ή \qquad 2B = A + C \qquad ή \qquad A + B = 2C$

$\omega_{2,3}^2 = 3\omega_0^2 \qquad \Rightarrow A + B + C = 0$

6. Σωματίδιο μάζας m κινείται κατά μήκος της κατεύθυνσης-x υπό την επίδραση διατηρητικής δύναμης με συνάρτηση δυναμικής ενέργειας: $U(x) = Axe^{-\alpha x^2}$.

(α) Να εκτιμηθούν οι διαστάσεις (μονάδες) των θετικών σταθερών A και α.
(β) Να προσδιορισθούν τα σημεία ισορροπίας και το είδος ισορροπίας (ευσταθής/ασταθής)
(γ) Να προσδιορισθεί το σημείο μηδενισμού, x_0, της δυναμικής ενέργειας και η απόλυτη τιμή και η φορά της δύναμης στο ίδιο σημείο.
(δ) Να προσδιορισθεί το τετράγωνο της συχνότητας μικρών ταλαντώσεων γύρω από το σημείο ελάχιστης δυναμικής ενέργειας και η απόλυτη τιμή της ταχύτητας πάνω από την οποία αν αφεθεί το σωματίδιο, από το ίδιο σημείο, θα κινηθεί προς το άπειρο, χωρίς επιστροφή, ανεξάρτητα από τη φορά αυτής της ταχύτητας

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



(α) A: Μονάδες δύναμης. a: Μονάδες αντιστρόφου τετραγώνου μήκους

(β) $U(x) = Axe^{-\alpha x^2} \Rightarrow F = -\dfrac{dU}{dx} = -Ae^{-\alpha x^2}\left(1 - 2ax^2\right)$

$F = 0 \Rightarrow -Ae^{-\alpha x^2}\left(1 - 2ax^2\right) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \mp 1/\sqrt{2a}$,

x_1:ευσταθής, x_2:ασταθής

$$x_{1,2} = \mp 1/\sqrt{2a} \Rightarrow U(x_1) = A\left(-\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)e^{-\frac{a}{2a}} \Rightarrow U(x_1) = -\frac{A}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{A}{\sqrt{2ae}}$$

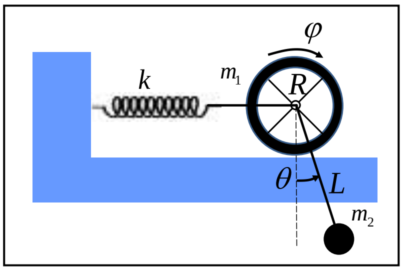
$$x_{1,2} = \mp 1/\sqrt{2a} \Rightarrow U(x_2) = A\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)e^{-\frac{a}{2a}} \Rightarrow U(x_1) = \frac{A}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{A}{\sqrt{2ae}}$$

(γ) Σημείο μηδενισμού της δυναμικής ενέργειας x_0=0.
Δύναμη στο x_0=0: $F(x_0 = 0) = -A$

(δ) Τετράγωνο συχνότητας μικρών ταλαντώσεων στην περιοχή του ελαχίστου

$$\omega^2 = \frac{s}{m} = \frac{\left(d^2U/dx^2\right)_{x_1}}{m} = \frac{4A}{m}\sqrt{\frac{a}{2e}}$$

$$U(x_1) + \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = U(x_2) \Rightarrow \upsilon_0^2 = \frac{2\left[U(x_2) - U(x_1)\right]}{m} \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{\frac{4A}{m\sqrt{2ae}}}$$



7. Λεπτότοιχος κύλινδρος μάζας m_1 και ακτίνας R είναι συνδεδεμένος, μέσω ελατηρίου σταθεράς k, με ακλόνητο σημείο. Από τον άξονα του κυλίνδρου είναι αναρτημένο εκκρεμές μάζας m_2 και μήκους αβαρούς νήματος L. Διαταράσσουμε το σύστημα ώστε οι διαγραφόμενες γωνίες του νήματος, ως προς την κατακόρυφο, να είναι μικρές, $\theta \simeq \sin\theta \simeq \tan\theta$, και ο κύλινδρος να κυλάει χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο $(x_1 = R\varphi)$.

(Ροπή αδράνειας του λεπτότοιχου κυλίνδρου, περί τον άξονα συμμετρίας του: $I = m_1R^2$).

(α) Να γραφούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης για τις απομακρύνσεις x_1 και x_2 των σωμάτων m_1 και m_2, από τις θέσεις ισορροπίας τους.
(β) Να αναζητηθούν λύσεις με τη μορφή Κανονικών Τρόπων Ταλάντωσης, $x_1(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ και $x_2(t) = B\cos(\omega t + \phi)$ και να υπολογιστούν οι συχνότητες ω_1, ω_2 των ΚΤΤ συναρτήσει του ω_0 στην περίπτωση που $m_2 = 2m_1 = m$ και $k/m = g/L = \omega_0^2$.
[Υπόδειξη: Προς αποφυγή λαθών, ονομάστε $F_{\tau\rho}$ την δύναμη της τριβής και T την τάση του νήματος]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α)
$$m_1\ddot{x}_1 = -sx_1 + F_{\tau\rho} + T\sin\theta, \qquad I\ddot{\varphi} = -F_{\tau\rho}R \quad \Rightarrow m_1R^2(\ddot{x}/R) = -F_{\tau\rho}R$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -T_x, \qquad m_2 g = T\cos\theta \quad \Rightarrow \quad T = m_2 g/\cos\theta$$

Αντικαθιστώντας στις αρχικές, με βάση και την προσέγγιση $\sin\theta \approx \tan\theta \approx (x_2 - x_1)/L$:

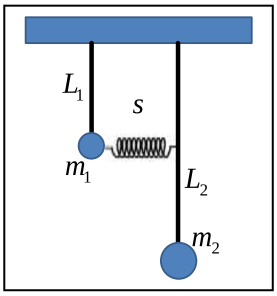
$$\ddot{x}_1 + \frac{s}{2m_1}x_1 + \frac{m_2}{2m_1}\frac{g}{L}x_1 - \frac{m_2}{2m_1}\frac{g}{L}x_2 = 0$$

$$-\frac{g}{L}x_1 + \ddot{x}_2 + \frac{g}{L}x_2 = 0$$

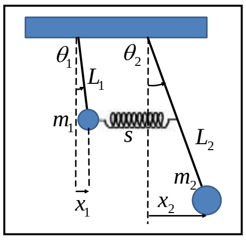
Χρησιμοποιώντας τις $m_2 = 2m_1 = m$, και $s/m = g/L = \omega_0^2$:

$$m_2 = 2m_1 = m, \begin{Bmatrix} (2\omega_0^2 - \omega^2)A - \omega_0^2 B = 0 \\ -\omega_0^2 A + (\omega_0^2 - \omega^2)B = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} (2\omega_0^2 - \omega^2) & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

$$\omega^4 - 3\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{1.2}^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\omega_0^2$$



8. Δύο ιδανικά εκκρεμή αποτελούνται από σημειακές μάζες m_1, m_2, και από αβαρείς ράβδους με μήκη L_1, L_2, αντίστοιχα. Τα δύο εκκρεμή είναι αναρτημένα από ακλόνητα σημεία μέσα σε κατακόρυφο ομοιογενές βαρυτικό πεδίο με επιτάχυνση g, και συνδέονται μεταξύ τους, όπως στο σχήμα, με ελατήριο το οποίο έχει σταθερά σκληρότητας s και φυσικό μήκος ίσο με την απόσταση των δύο σημείων ανάρτησης των εκκρεμών. Διαταράσσουμε το σύστημα έτσι ώστε τα δύο εκκρεμή να εκτελούν ταλαντώσεις μικρών γωνιών, $(\sin\theta_1 \approx \theta_1, \sin\theta_2 \approx \theta_2)$, στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.
(α) Γράψτε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης για το κάθε εκκρεμές,
(β) Υποθέστε ότι το σύστημα εκτελεί κανονικές ταλαντώσεις της μορφής $x_1 = A\sin(\omega t + \varphi)$ και $x_2 = B\sin(\omega t + \varphi)$, αντικαταστήστε στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων του ερωτήματος-α, και γράψτε τις εξισώσεις που ικανοποιούν τα πλάτη A και B.
(γ) Υπολογίστε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, ω_1^2, ω_2^2, συναρτήσει του ω_0^2, αν $L_2 = 2L_1$, $m_2 = m_1/2$ και $g/L_1 = s/m_1 = \omega_0^2$. [Υπόδειξη: Μπορείτε να ξεκινήσετε με το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης κάθε εκκρεμούς περί το σημείο ανάρτησής του]



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Γράφοντας τις διαφορικές εξισώσεις στροφικής ταλάντωσης κάθε εκκρεμούς περί το σημείο ανάρτησής του, μηδενίζονται οι ροπές των δυνάμεων στα άκρα των ράβδων, και απομένουν οι ροπές των βαρών και της δύναμης επαναφοράς από τα άκρα του ελατηρίου, οπότε:

$$I_1\ddot{\theta}_1 = -(m_1 g)(x_1) - s(x_1 - x_2')L_1, \qquad \ddot{\theta}_1 \simeq \ddot{x}_1/L_1 \qquad I_1 = m_1 L_1^2/2,$$

$$I_2\ddot{\theta}_2 = -(m_2 g)(x_2) - s(x_2' - x_1)L_1, \qquad \ddot{\theta}_2 \simeq \ddot{x}_2/L_2 \qquad I_2 = m_2 L_2^2/2,$$

όπου $\quad x_2' = x_2 L_1 / L_2$

Αντικαθιστώντας τις γωνίες και τις ροπές αδράνειας

$$\left(m_1 L_1^2/2\right)\left(\ddot{x}_1/L_1\right) = -(m_1 g)(x_1) - s(x_1 - x_2')L_1,$$

$$\left(m_2 L_2^2/2\right)\left(\ddot{x}_2/L_2\right) = -(m_2 g)(x_2) - s(x_2' - x_1)L_1,$$

(β)

$$\ddot{x}_1 = -(g/L_1)x_1 - (s/m_1)(x_1 - x_2 L_1 / L_2)$$

$$\ddot{x}_2 = -(g/L_2)x_2 - (s/m_2)(x_2 L_1 / L_2 - x_1)(L_1/L_2),$$

Αντικαθιστώντας $x_1 = A\sin(\omega t + \varphi)$ και $x_2 = B\sin(\omega t + \varphi)$

$$-\omega^2 A = -(g/L_1)A - (s/m_1)(A - BL_1/L_2) \;\Rightarrow\; \left((g/L_1 + s/m_1) - \omega^2\right)A - (s/m_1)BL_1/L_2 = 0$$

$$-\omega^2 B = -(g/L_2)B - (s/m_2)(BL_1/L_2 - A)(L_1/L_2) \Rightarrow$$

$$-(s/m_2)(L_1/L_2)\mathrm{A} + \left((g/L_2) + (s/m_2)(L_1/L_2)(L_1/L_2) - \omega^2\right)B = 0$$

(γ) Το σύστημα των εξισώσεων είναι ομογενές, για να επιλύεται πρέπει να ισχύει

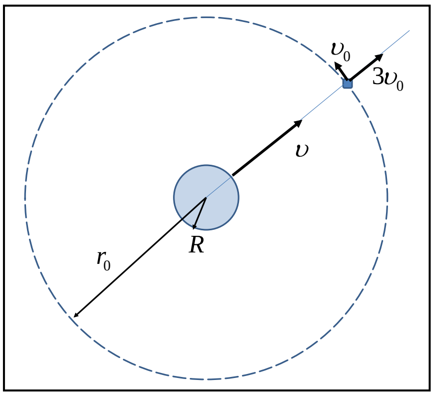
$$\begin{vmatrix} (g/L_1 + s/m_1) - \omega^2 & -(s/m_1)(L_1/L_2) \\ -(s/m_2)(L_1/L_2) & (g/L_2) + (s/m_2)(L_1/L_2)^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Αν $L_2 = 2L_1$, $m_2 = m_1/2$ και $g/L_1 = s/m_1 = \omega_0^2$, η ορίζουσα γίνεται :

$$\begin{vmatrix} 2\omega_0^2 - \omega^2 & -\omega_0^2/2 \\ -\omega_0^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega^4 - 3\omega_0^2\omega^2 + \frac{3}{2}\omega_0^4 = 0 \Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_0^2}{2}\left(3 \pm \sqrt{3}\right)$$

9. Ένας μετεωρολογικός δορυφόρος μάζας *m* κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon_0}$ σε κυκλική τροχιά ακτίνας r_0 γύρο από τη γη. Τα μετρητικά συστήματα του δορυφόρου έχουν καταστραφεί και η NASA θέλει να απαλλαγεί από τον δορυφόρο στέλνοντάς τον στο διάστημα μακριά από την γήινη ατμόσφαιρα και εκτός του πεδίου βαρύτητας της γης. Για τον σκοπό αυτό εκτοξεύεται ακτινικά ένα βλήμα μάζας m με αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$, συγκρούεται με τον δορυφόρο με ταχύτητα $3\boldsymbol{\upsilon_0}$ και ενσωματώνεται με αυτόν δημιουργώντας ένα συσσωμάτωμα μάζας $M=2m$.

α) Εξηγήστε γιατί η στροφορμή *L* του συσσωματώματος ως προς το κέντρο της γης διατηρείται και υπολογίστε την τιμή της.



β) Χρησιμοποιήστε πολικές συντεταγμένες για να αποδείξετε ότι η ολική ενέργεια του συσσωματώματος δίνεται από τη σχέση : $E = \frac{1}{2}M(dr/dt)^2 + \frac{L^2}{2Mr^2} + U(r)$
Περιγράψτε ποιοτικά τις δυνατές κινήσεις του συσσωματώματος.

γ) Είναι αρκετή η ταχύτητα $3\boldsymbol{v_0}$ του βλήματος ώστε το συσσωμάτωμα να διαφύγει από το πεδίο βαρύτητας της γης; Σε αυτή την περίπτωση τί ταχύτητα θα έχει σε άπειρη – πολύ μεγάλη απόσταση από την γη;

δ) Για να ακολουθήσει το συσσωμάτωμα παραβολική

τροχιά (E=0) πόση θα έπρεπε να είναι η αρχική ταχύτητα **v** του βλήματος;
Θεωρήστε ότι η γη είναι σφαιρική και έχει μάζα $M_Γ$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
α) Υπολογίστε την τιμή της ορμής του συσσωματώματος
και της στροφορμής του συσσωματώματος

$$\vec{P}_{μετά} = \vec{P}_{πριν} = m3\upsilon_0\hat{r} + m\upsilon_0\hat{\varphi} = m\upsilon_0\left(3\hat{r} + \hat{\varphi}\right)$$

$$\vec{P}^2_{μετά} = m^2\upsilon_0^2\left(9+1\right) \Rightarrow \vec{P}^2_{μετά} = 10m^2\upsilon_0^2$$

Στροφορμή:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}_{μετά} = \left(r_0\hat{r}\right)\times m\upsilon_0\left(3\hat{r} + \hat{\varphi}\right) = r_0 m\upsilon_0\left(\hat{r}\right)\times\left(3\hat{r} + \hat{\varphi}\right)$$

$$\vec{L} = r_0 m\upsilon_0\left(\hat{r}\right)\times\left(\hat{\varphi}\right) \Rightarrow \vec{L} = \hat{z}\; r_0 m\upsilon_0$$

β) Χρησιμοποιήστε πολικές συντεταγμένες για να αποδείξετε ότι η ολική ενέργεια του συσσωματώματος δίνεται από τη σχέση :

$$E = \frac{1}{2}M(dr/dt)^2 + \frac{L^2}{2Mr^2} + U(r)$$

Περιγράψτε ποιοτικά τις δυνατές κινήσεις του συσσωματώματος.

$$E = \frac{P^2_{μετά}}{2m_{ολ}} + \frac{L^2}{2\left(2m\right)r_0^2} - \frac{GM_Γ\left(2m\right)}{r_0}$$

$$E = \frac{10m^2\upsilon_0^2}{4m} + \frac{1}{4}m\upsilon_0^2 - 2\frac{GM_Γ m}{r_0} = \frac{11}{4}m\upsilon_0^2 - 2\frac{GM_Γ m}{r_0}$$

Ανάλογα με την τιμή της E, έχουμε απεριοδική ($E>0$, ή $E=0$), ή περιοδική ($E<0$) κίνηση.

γ) Είναι αρκετή η ταχύτητα $\boldsymbol{3\upsilon_0}$ του βλήματος ώστε το συσσωμάτωμα να διαφύγει από το πεδίο βαρύτητας της γης; Σε αυτή την περίπτωση τί ταχύτητα θα έχει σε άπειρη – πολύ μεγάλη απόσταση από την γη;
Για να υπολογίσουμε την ενέργεια χρειαζόμαστε την τιμή της ακτίνας

$$m\frac{\upsilon_0^2}{r_0} = \frac{GM_Γ m}{r_0^2} \Rightarrow r_0 = \frac{GM_Γ}{\upsilon_0^2}$$

$$E = \frac{11}{4}m\upsilon_0^2 - 2\frac{GM_Γ m}{r_0} = \frac{11}{4}m\upsilon_0^2 - 2\frac{GM_Γ m}{GM_Γ}\upsilon_0^2 = \frac{3}{4}m\upsilon_0^2 > 0$$

Σε άπειρη – πολύ μεγάλη απόσταση από την γη

$$E_{ολ} = E_{κιν} \Rightarrow \frac{3}{4}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}\left(2m\right)\upsilon_\infty^2 \Rightarrow \upsilon_\infty^2 = \frac{3}{4}\upsilon_0^2 \Rightarrow \upsilon_\infty = \frac{\sqrt{3}}{2}\upsilon_0$$

δ) Για να ακολουθήσει το συσσωμάτωμα παραβολική τροχιά (E=0) πόση θα έπρεπε να είναι η αρχική ταχύτητα **v** του βλήματος; Θεωρήστε ότι η γη είναι σφαιρική και έχει μάζα $M_Γ$.

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{GM_Γ m}{R} = \frac{1}{2}m\upsilon'^2 - \frac{GM_Γ m}{r_0} \Rightarrow$$

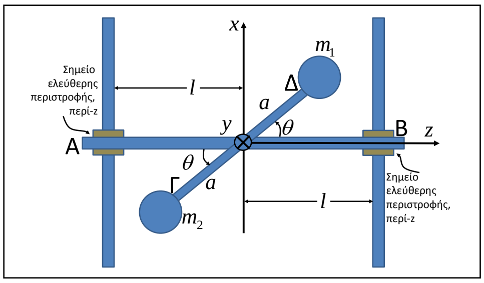
$$\Rightarrow \upsilon^2 = \upsilon'^2 - \frac{2GM_Γ}{r_0} + \frac{2GM_Γ}{R}$$

$$\vec{P}_{μετά} = \vec{P}_{πριν} = m\upsilon'\hat{r} + m\upsilon_0\hat{\varphi} = m\left(\upsilon'\hat{r} + \upsilon_0\hat{\varphi}\right) \Rightarrow P^2_{μετά} = m^2\left(\upsilon'^2 + \upsilon_0^2\right)$$

$$E = \frac{P^2_{μετά}}{2m_{ολ}} + \frac{L^2}{2\left(2m\right)r_0^2} - \frac{GM_Γ\left(2m\right)}{r_0} = \frac{m^2\left(\upsilon'^2 + \upsilon_0^2\right)}{4m} + \frac{m^2\upsilon_0^2 r_0^2}{4mr_0^2} - \frac{GM_Γ\left(2m\right)}{GM_Γ}\upsilon_0^2$$

$$E = \frac{m\left(\upsilon'^2 + \upsilon_0^2\right)}{4} + \frac{m\upsilon_0^2}{4} - 2m\upsilon_0^2 = 0 \Rightarrow \upsilon'^2 = 6\upsilon_0^2$$

$$\upsilon^2 = 6\upsilon_0^2 - \frac{2GM_\Gamma}{r_0} + \frac{2GM_\Gamma}{R} \Rightarrow \upsilon^2 = 4\upsilon_0^2 + \frac{2GM_\Gamma}{R}$$



10. Δύο ράβδοι, ΑΒ (μήκους $2l$) και ΓΔ (μήκους 2α), με αμελητέα μάζα, είναι συνδεδεμένοι ακλόνητα, υπό σταθερή γωνία θ. Η ράβδος ΑΒ διέρχεται από σημεία ελεύθερης περιστροφής περί τον άξονά της, που συμπίπτει με τον άξονα-z. Στα άκρα της ράβδου ΓΔ είναι στηριγμένες σημειακές μάζες $m_1 = m_2 = m$. Το σύστημα περιστρέφεται περί τον άξονα-z με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$.

(α) Να υπολογισθεί η στροφορμή του συστήματος, ως προς την αρχή του (x,y,z),

(β) Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της είναι $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{L}$

(γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκείται σε κάθε μάζα, αν το σύστημα βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Η συνολική στροφορμή του συστήματος είναι ίση με το άθροισμα των στροφορμών της κάθε σημειακής μάζας, με διανύσματα θέσης

$$\vec{r}_1(t) = -\vec{r}_2(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{r}}_1(t) = -\dot{\vec{r}}_2(t),$$

οπότε: $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1\times\left(m\dot{\vec{r}}_1\right) + \vec{r}_2\times\left(m\dot{\vec{r}}_2\right) = m\left[\vec{r}_1\times\dot{\vec{r}}_1 + \left(-\vec{r}_1\right)\times\left(-\dot{\vec{r}}_1\right)\right] \Rightarrow \vec{L} = 2m\left(\vec{r}_1\times\dot{\vec{r}}_1\right)$

$$\vec{r}_1 = \left(a\sin\theta\cos(\omega t), a\sin\theta\sin(\omega t), a\cos\theta\right)$$

$$\dot{\vec{r}}_1 = \left(-a\omega\sin\theta\sin(\omega t), a\omega\sin\theta\cos(\omega t), 0\right)$$

$$\vec{L} = 2m\left(\vec{r}_1\times\dot{\vec{r}}_1\right) = 2m\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a\sin\theta\cos(\omega t) & a\sin\theta\sin(\omega t) & a\cos\theta \\ -a\omega\sin\theta\sin(\omega t) & a\omega\sin\theta\cos(\omega t) & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$2ma^2\omega\sin\theta\left[-\hat{x}\cos\theta\cos(\omega t) - \hat{y}\cos\theta\sin(\omega t) + \hat{z}\sin\theta\right]$$

(β) Άρα: $$\frac{d\vec{L}}{dt} = 2ma^2\omega^2\sin\theta\left[\hat{x}\cos\theta\sin(\omega t) - \hat{y}\cos\theta\cos(\omega t)\right]$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = ma^2\omega^2\sin 2\theta\left[\hat{x}\sin(\omega t) - \hat{y}\cos(\omega t)\right] \qquad (1)$$

Επίσης, ισχύει $$\vec{\omega}\times\vec{L} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & \omega \\ L_x & L_y & L_z \end{vmatrix} = -\hat{x}\left(\omega L_y\right) + \hat{y}\left(\omega L_x\right) \qquad (2)$$

Συγκρίνοντας (1) και (2) : $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{L}$

(γ) Ασκείται κεντρομόλος δύναμη με μέτρο $F_K = m\omega^2\left(a\sin\theta\right)$

Συνολική ροπή: $\vec{N} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} = 2\vec{r}_1\times\vec{F}_K$, μέτρου : $\left|\vec{N}\right| = \left|\dfrac{d\vec{L}}{dt}\right| = 2ma^2\omega^2\sin\theta\cos\theta = ma^2\omega^2\sin 2\theta$

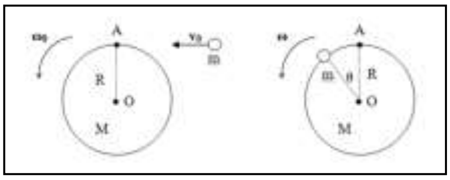
Μηδενισμός της ροπής για: $\sin 2\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{\theta = 0, \quad ή \quad \theta = \dfrac{\pi}{2}\right\}$

Μέγιστη ροπή για: $\sin 2\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = 45^0$

12. Ενας κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης R και ύψος Η. Αποτελείται από υλικό του οποίου η πυκνότητα μεταβάλλεται με την απόσταση r από τον άξονα του κυλίνδρου σύμφωνα με τη σχέση $\rho=\rho_0(1\text{-}r/R)$, όπου ρ_o είναι θετική σταθερά.

α) Να υπολογισθεί η μάζα Μ του κυλίνδρου

β) Να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα του, συναρτήσει της μάζας Μ και της ακτίνας R.



γ) Θεωρήστε ότι ο κύλινδρος περιστρέφεται χωρίς τριβές περί σταθερό οριζόντιο άξονα που ταυτίζεται με τον άξονά του, με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega_0}$. Τη χρονική στιγμή t=0, μια μικρή μάζα m με ταχύτητα $\mathbf{v_0}$ κτυπάει και κολλάει στην άκρη του κυλίνδρου, όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος αμέσως μόλις κολλήσει η μάζα στον κύλινδρο.

δ) Χρησιμοποιήστε τη σχέση d**L**/dt=**N** για να υπολογίσετε το τετράγωνο της γωνιακής ταχύτητας $\omega'^2(\theta)$ όταν το σύστημα έχει περιστραφεί κατά γωνία θ, μετά την κρούση.

ε) Πόση δύναμη F ασκείται στη μάζα m από την «κόλληση», καθώς το σύστημα περιστρέφεται, για γωνία θ στο διάστημα (0, π/2

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) (α) $M=\int dm=\int_0^R \rho(r)d^3r=\int_0^R \rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)2\pi rHdr=2\pi\rho_0\, H/R\int_0^R (R-r)rdr$

$$M=2\pi\rho_0\, H/R\int_0^R (R-r)rdr=2\pi\rho_0\, H/R\left(\frac{R^3}{2}-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{1}{3}\pi\rho_0 HR^2$$

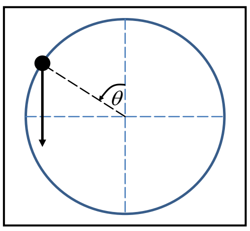
(β) $I=\int r^2dm=\int_0^R \rho(r)r^2d^3r=\int_0^R \rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)2\pi r^3Hdr=2\pi\rho_0\, H/R\int_0^R (R-r)r^3dr$

$$I=2\pi\rho_0\, H/R\int_0^R (R-r)r^3dr=\frac{1}{10}\pi\rho_0 HR^4 \quad\Rightarrow\quad I=\frac{3}{10}MR^2$$

(γ) $I_0=\frac{3}{10}MR^2, \qquad L_0=L \quad\Rightarrow\quad I_0\omega_0+m\upsilon_0R=\left(I_0+mR^2\right)\omega_0' \Rightarrow \omega_0'=\frac{I_0\omega_0+m\upsilon_0R}{I_0+mR^2}$

$$\omega_0'=\omega_0\frac{1+\left(mR^2/I_0\right)\left(\upsilon_0/R\omega_0\right)}{1+\left(mR^2/I_0\right)}$$

(δ) $\frac{dL}{dt}=N\Rightarrow I'\dot{\omega}'=mgR\sin\theta\Rightarrow\frac{d\omega'}{dt}=\frac{mgR}{I'}\sin\theta$



$$\frac{d\omega'}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{mgR}{I'}\sin\theta \quad\Rightarrow\quad \omega'd\omega'=\frac{mgR}{I'}\sin\theta\, d\theta$$

$$\omega'^2(\theta)-\omega_0'^2=\frac{mgR}{2I'}(1-\cos\theta)\Rightarrow\omega'^2(\theta)=\omega_0'^2+\frac{mgR}{2I'}(1-\cos\theta)$$

(ε) Η συνολική ακτινική δύναμη (υποθέτοντας «ελκτική» F)

$$mg\cos\theta+F=m\left(\upsilon^2/R\right)=mR\omega'^2\Rightarrow F=mR\omega'^2-mg\cos\theta\Rightarrow$$

$$F=mR\left(\omega_0'^2+\frac{mgR}{2I'}(1-\cos\theta)\right)-mg\cos\theta$$