ΕΜΠ – ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ – ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ – ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2021-22
ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ-Ι, 1^{ΟΥ} ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΧΟΛΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΜΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΗΣ Α΄ ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Κ. Φαράκος, Ι. Ράπτης 14/11 2021

1. Δείξτε ότι αν το άθροισμα και η διαφορά δύο διανυσμάτων $\vec{A},\vec{B}$ έχουν ίσα μέτρα $\left[\left|\vec{A}+\vec{B}\right|=\left|\vec{A}-\vec{B}\right|\right]$, τότε τα δύο διανύσματα, $\vec{A},\vec{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους (διαγώνιοι ορθογώνιου παραλληλογράμμου). Επίσης, δείξτε ότι το άθροισμα και η διαφορά δύο διανυσμάτων $\vec{A},\vec{B}$ που έχουν ίσα μέτρα, είναι διανύσματα κάθετα μεταξύ τους (διαγώνιοι ρόμβου).

$$\left[\left|\vec{A}+\vec{B}\right|=\left|\vec{A}-\vec{B}\right|\right]\Rightarrow\left(\vec{A}+\vec{B}\right)^2=\left(\vec{A}-\vec{B}\right)^2\Rightarrow 2\vec{A}\cdot\vec{B}=-2\vec{A}\cdot\vec{B}\Rightarrow\vec{A}\cdot\vec{B}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{A}\perp\vec{B}$$

Αν $\left|\vec{A}\right|=\left|\vec{B}\right|$, τότε $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{A}-\vec{B}\right)=A^2-\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{B}-B^2=A^2-B^2=0 \quad\Rightarrow\quad \left(\vec{A}+\vec{B}\right)\perp\left(\vec{A}-\vec{B}\right)$

2. (α) Σε ηλεκτρονικό παιχνίδι, μέλισσα πλησιάζει στην κυψέλη της ακολουθώντας σπειροειδή τροχιά που περιγράφεται από τις εξισώσεις $r=b-ct$ και $\dfrac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}=kt$. Υπολογίστε την ταχύτητά της ως συνάρτηση του χρόνου. (β) Όταν φεύγει από την κυψέλη ακολουθεί τροχιά που περιγράφεται από τις σχέσεις $r=be^{at},\theta=\omega t$. Δείξτε ότι η γωνία ταχύτητας και επιτάχυνσης παραμένει σταθερή με το χρόνο. [Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε πολικές συντεταγμένες]

(α) $\dot{\vec{r}}\equiv\vec{\upsilon}=\dot{\rho}\hat{\rho}+\rho\dot{\varphi}\hat{\varphi}=-c\hat{\rho}+\left(b-ct\right)kt\hat{\varphi}\Rightarrow\left|\dot{\vec{r}}\right|=\sqrt{c^2+\left(b-ct\right)^2k^2t^2}$

$$\vec{a}=\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2\right)\hat{\rho}+\left(2\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi}\right)\hat{\varphi}=-\left(b-ct\right)kt\hat{\rho}+\left(-2ckt+\left(b-ct\right)k\right)\hat{\varphi}$$

(β) $\vec{\upsilon}=\dot{\rho}\hat{\rho}+\rho\dot{\varphi}\hat{\varphi}=abe^{at}\hat{\rho}+\omega be^{at}\hat{\varphi}\Rightarrow\left|\vec{\upsilon}\right|=be^{at}\sqrt{a\omega}$

$$\vec{a}=\left(\ddot{\rho}-\rho\dot{\varphi}^2\right)\hat{\rho}+\left(2\dot{\rho}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi}\right)\hat{\varphi}=\left(a^2be^{at}-\omega^2be^{at}\right)\hat{\rho}+\left(2\omega abe^{at}+be^{at}\cdot 0\right)\hat{\varphi}$$

$$\vec{a}=\left(a^2-\omega^2\right)be^{at}\hat{\rho}+2\omega abe^{at}\hat{\varphi}\quad\Rightarrow\quad\left|\vec{a}\right|=be^{at}\sqrt{\left(a^2-\omega^2\right)^2+4\omega^2b^2}=be^{at}\left(a^2+\omega^2\right)$$

$$\vec{\upsilon}\cdot\vec{a}=\left[abe^{at}\hat{\rho}+\omega be^{at}\hat{\varphi}\right]\cdot\left[\left(a^2-\omega^2\right)be^{at}\hat{\rho}+2\omega abe^{at}\hat{\varphi}\right]$$

$$=abe^{at}\left(a^2-\omega^2\right)be^{at}+\omega be^{at}2\omega abe^{at}=a\left(be^{at}\right)^2\left(a^2+\omega^2\right)$$

$$\cos\left(\vec{\upsilon},\vec{a}\right)=\frac{\vec{\upsilon}\cdot\vec{a}}{\left|\vec{\upsilon}\right|\left|\vec{a}\right|}=\frac{a\left(be^{at}\right)^2\left(a^2+\omega^2\right)}{\left[be^{at}\sqrt{a\omega}\right]\left[be^{at}\left(a^2+\omega^2\right)\right]}=\sqrt{\frac{a}{\omega}}=\sigma\tau\alpha\theta.$$

4. Δίνεται ότι: $\ln\left(1+x\right)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+.....,\quad -1<x\le 1$. Να υπολογιστεί η τιμή του $\ln\left(1+x\right)$ με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων, για $x=\pm 0,3$. Μέχρι ποιον όρο του αναπτύγματος πρέπει να προχωρήσει κανείς, για κάθε πρόσημο του $x=\pm 0,3$ προκειμένου να έχει την ίδια ακρίβεια και για τα δύο πρόσημα ; Πόσο είναι το επί % σφάλμα, για κάθε πρόσημο, αν σταματήσει το ανάπτυγμα μέχρι και τον κυβικό όρο ; [Συγκρίνεται με την τιμή που προκύπτει, βάσει του αμέσως επόμενου όρου]

x	$x^2/2$	$x^3/3$	$x^4/4$	$x^5/5$	$x^6/6$	2nd	3rd	4th	5th	6th	ln(1+x)
0,3	0,045	0,009	0,002025	0,000486	0,000122	0,255	0,264	0,261975	0,262461	0,26234	0,262364
-0,3	0,045	-0,009	0,002025	-0,00049	0,000122	-0,345	-0,354	-0,35603	-0,35651	-0,35663	-0,35667

(α) Για την ακρίβεια 3 δεκαδικών (διατήρηση τιμής του 3ου δεκαδικού ψηφίου) απαιτείται μέχρι και ο όρος 5ης τάξης .

(β) Με αναφορά τον όρο 6ης τάξης, το ποσοστιαίο σφάλμα, αν σταματήσουμε στον όρο 5ης τάξης είναι
(0,26234 - 0,262461)/ 0,26234 = -0,04%
(-0,35663 + 0,35651)/(-0,35663) = +0,03%
Άρα, χρειάζονται περισσότεροι όροι για να επιτευχθεί η ίδια ακρίβεια και για τα δύο πρόσημα

(γ) Με αναφορά τον όρο 6ης τάξης, το ποσοστιαίο σφάλμα, αν στατήσουμε στον όρο 3ης τάξης είναι
(0,26234 - 0,264)/ 0,26234 = -0,6%

Για μία εκτίμηση, δίνεται, στην τελευταία στήλη, και το αποτέλεσμα που λαμβάνεται από έναν υπολογιστή τσέπης.

5. Χρησιμοποιείστε το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor της συνάρτησης $x = A\sin(at)$, για να υπολογίσετε, με μορφή αναπτύγματος σε σειρά, το ολοκλήρωμα $I = \int_o^{2\pi} \frac{A\sin(at)}{bt} dt$.

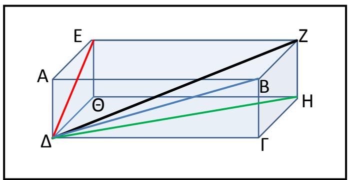
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Ανάπτυγμα σε σειρά Taylor: $x = A\sin(at) = A\left[at - \frac{a^3t^3}{3!} + \frac{a^5t^5}{5!} - \frac{a^7t^7}{7!} + \cdots\right]$

Ολοκλήρωμα $I = \int_o^{2\pi} \frac{A\sin(at)}{bt} dt = \frac{A}{b}\int_o^{2\pi} \frac{\sin(at)}{t} dt = \frac{A}{b}\int_o^{2\pi} \frac{1}{t}\left[at - \frac{a^3t^3}{3!} + \frac{a^5t^5}{5!} - \frac{a^7t^7}{7!} + \cdots\right] dt$

$$I = \frac{A}{b}\int_o^{2\pi}\left[a - \frac{a^3t^2}{3!} + \frac{a^5t^4}{5!} - \frac{a^7t^6}{7!} + \cdots\right] dt = \frac{A}{b}\left[a - \frac{a^3t^3}{3\cdot 3!} + \frac{a^5t^5}{5\cdot 5!} - \frac{a^7t^7}{7\cdot 7!} + \cdots\right]_0^{2\pi}$$

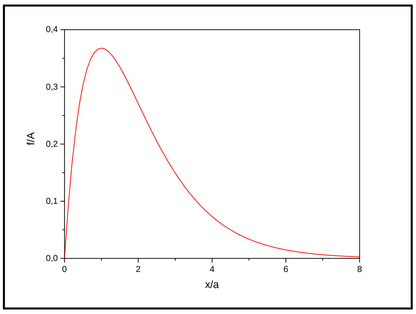
$$I = \frac{A}{b}\left(\left[a - \frac{a^3(2\pi)^3}{3\cdot 3!} + \frac{a^5(2\pi)^5}{5\cdot 5!} - \frac{a^7(2\pi)^7}{7\cdot 7!} + \cdots\right] - [\alpha]\right) = -\frac{A}{b}\left[\frac{a^3(2\pi)^3}{3\cdot 3!} - \frac{a^5(2\pi)^5}{5\cdot 5!} + \frac{a^7(2\pi)^7}{7\cdot 7!} - \cdots\right]$$



7. Βρείτε τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζουν, ανά δύο, οι διαγώνιοι εδρών που άγονται από μία κορυφή προς τις παρακείμενες έδρες ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, διαστάσεων $(2\times 3\times 5)$, καθώς και οι γωνίες που κάθε μία από αυτές τις διαγωνίους σχηματίζει με την «χωρο-διαγώνιο» που άγεται από την ίδια κορυφή προς την απέναντι κορυφή του παραλληλεπιπέδου.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$\cos(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}}{|\vec{r}_1||\vec{r}|}$ και εφαρμόζουμε, κατά περίπτωση



8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=Axe^{-x/a}$ όπου A,a θετικές σταθερές. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης, και το είδος (μέγιστο, ελάχιστο); Να σχεδιαστεί πρόχειρα η καμπύλη *f(x)*. Ομοίως για την συνάρτηση $g(x)=ax^4-bx^2+c$ όπου a,b,c θετικές σταθερές.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$f(x)=Axe^{-x/a}\Rightarrow\frac{df}{dx}=Ae^{-x/a}-\frac{A}{a}xe^{-x/a}.$$

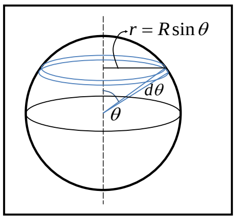
Ακρότατα: $\dfrac{df}{dx}=0\Rightarrow Ae^{-x/a}\left(1-\dfrac{x}{a}\right)=0$. Σημείο ακρότατου $x=a$ Είδο: $\left(\dfrac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=a}<0$: Μέγιστο

9. Αυτοκίνητο κινείται σε κυκλική διαδρομή ακτίνας *R* με ταχύτητα της οποίας το μέτρο μεταβάλλεται με το χρόνο ως $\upsilon=ct$, όπου *c*=σταθ.>0. Βρείτε τη χρονική στιγμή που τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης σχηματίζουν γωνία 45^{o}.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$\vec{a}=\hat{\varphi}a_{\varepsilon}+\hat{r}a_{\kappa}=\hat{\varphi}c+\hat{r}\dfrac{c^2t^2}{R}$, ενώ $\vec{\upsilon}=\hat{\varphi}ct$.

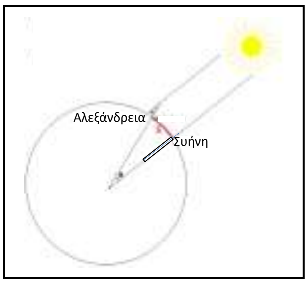
Άρα, για να σχηματίζουν γωνία 45^{o} τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης, αρκεί οι δύο συνιστώσες της επιτάχυνσης να είναι ίσες: $c=\dfrac{c^2t^2}{R}\quad\Rightarrow\quad t=\sqrt{R/c}$



10. Γνωρίζοντας ότι η ροπή αδράνειας λεπτού δακτυλίου ακτίνας *r* και μάζας *m*, περί τον άξονα συμμετρίας του είναι $I=mr^2$, να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας ενός ομογενούς λεπτού σφαιρικού φλοιού μάζας *M* και ακτίνας *R*, περί άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Υπόδειξη: αντιμετωπίστε τον λεπτό φλοιό ως κατάλληλη επαλληλία διαφορικών δακτυλίων, με μεταβλητή ακτίνα $r=R\sin\theta$, με μάζα $dm=\sigma dS$, όπου dS το εμβαδόν κάθε δακτυλίου, $dS=(2\pi r)(Rd\theta)=2\pi R^2\sin\theta d\theta$ (γιατί;), και με σταθερή κατάλληλη επιφανειακή πυκνότητα μάζας $\sigma=\dfrac{dm}{dS}=\dfrac{M}{4\pi R^2}$.

$$I=\int dI=\int r^2dm=\int_0^{\pi}(R\sin\theta)^2(\sigma2\pi R\sin\theta)(Rd\theta)=\sigma2\pi R^4\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta,$$

$$I=\sigma2\pi R^4\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta=\sigma2\pi R^4\left[\frac{\cos^3\theta}{3}-\cos\theta\right]_0^{\pi}=\ldots=\frac{2}{3}MR^2$$



11. Ο αρχαίος Έλληνας μαθηματικός Ερατοσθένης, που γεννήθηκε στη Κυρήνη (της σημερινής Λιβύης) και έζησε και εργάστηκε στην Αλεξάνδρεια (276-195 π.Χ), πληροφορήθηκε ότι κατά το μεσημέρι του θερινού ηλιοστασίου, στην πόλη Συήνη (σημερινό Ασσουάν της Αιγύπτου) ο ήλιος «ρίχνει» τις ακτίνες του κατακόρυφα (φωτίζοντας μέχρι και τον πυθμένα ενός βαθειού πηγαδιού), ενώ αντίστοιχα στην Αλεξάνδρεια οι ακτίνες του Ήλιου «έπεφταν» υπό γωνία 7.2^{o} ως προς την τοπική κατακόρυφο. Γνωρίζοντας την απόσταση «Αλεξάνδρεια – Συήνη», υπολόγισε το μήκος της περιφέρειας της Γης. Βρείτε την απόσταση «Αλεξάνδρεια – Συήνη» από το δίκτυο, και επαναλάβετε τον υπολογισμό.

$$\Delta\varphi(rad)=\frac{\Delta s}{R} \quad \Rightarrow \quad R=\frac{\Delta s}{\Delta\varphi(rad)}=\frac{\Delta s}{7.2^0\,\pi/180}$$

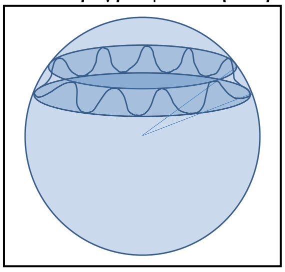
12. Δύο χάντρες *A* και *B* συνδέονται με μία συμπαγή ράβδο μήκους *L*. Τα δύο σώματα ολισθαίνουν κατά μήκος δύο κάθετων αξόνων *x* και *y* αντίστοιχα. Αν η χάντρα *A* ολισθαίνει προς τα αριστερά δηλαδή προς την αρχή *O* των δύο αξόνων με σταθερή ταχύτητα v_0, βρείτε την ταχύτητα της *B* όταν η ράβδος σχηματίζει γωνία $\theta=30^0$, 45^0 , 60^0 με τον άξονα των *x*.

$$\left.\begin{cases} x=L-\upsilon t \\ L^2=x^2+y^2 \end{cases}\right\}\Rightarrow y=\sqrt{L^2-x^2}=\sqrt{L^2-L^2-\upsilon^2t^2+2L\upsilon t}=\sqrt{2L\upsilon t-\upsilon^2t^2}$$

$$y=\left(2L\upsilon t-\upsilon^2t^2\right)^{1/2}\Rightarrow \dot{y}=\frac{1}{2}\left(2L\upsilon t-\upsilon^2t^2\right)^{-1/2}\left(2L\upsilon-2\upsilon^2t\right)\Rightarrow \dot{y}=\upsilon\frac{L-\upsilon t}{\sqrt{2L\upsilon t-\upsilon^2t^2}}$$

$$\cos\theta=\frac{L-\upsilon t}{L}=1-\frac{\upsilon t}{L}\Rightarrow \dot{y}=\upsilon\frac{1-(\upsilon t/L)}{\sqrt{2L\upsilon t-\upsilon^2t^2}}=\frac{\upsilon}{\tan\theta}$$

13. Σημειακό κινητό κινείται στην επιφάνεια σφαίρας και η θέση του, συναρτήσει του χρόνου, σε σφαιρικές συντεταγμένες δίνεται από τις σχέσεις: $r=R$, $\varphi=\omega t$, $\theta=(\pi/4)\left[1+0.25\sin(4\omega t)\right]$. Βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του κινητού συναρτήσει του χρόνου και περιγράψτε την τροχιά που διαγράφει



$$\dot{\vec{r}}\equiv\vec{\upsilon}=\dot{r}\hat{\rho}+r\dot{\theta}\hat{\theta}+r\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\varphi}\Rightarrow|\vec{\upsilon}|=\sqrt{\dot{r}^2+\left(r\dot{\theta}\right)^2+\left(r\dot{\varphi}\sin\theta\right)^2}$$

$$\dot{r}=0,\qquad \dot{\varphi}=\omega,\qquad \dot{\theta}=\frac{\omega\pi}{4}\cos(4\omega t)$$

$$\Rightarrow|\vec{\upsilon}|=R\omega\frac{\pi}{4}\sqrt{\left(\cos(4\omega t)\right)^2+\left[1+0.25\sin(4\omega t)\right]^2}$$

15. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών: $F=\mu\upsilon+(m_0+\mu t)\dfrac{d\upsilon}{dt}$. Όπου *F*, *μ* και m_0 σταθεροί αριθμοί.

$$F=\mu\upsilon+(m_0+\mu t)\frac{d\upsilon}{dt}\Rightarrow(m_0+\mu t)d\upsilon=\left(F-\mu\upsilon\right)dt$$

$$\Rightarrow\frac{d\upsilon}{(F-\mu\upsilon)}=\frac{dt}{(m_0+\mu t)}\Rightarrow\frac{-\mu d\upsilon}{(F-\mu\upsilon)}=-\frac{\mu dt}{(m_0+\mu t)}$$

$$\Rightarrow\frac{d(F-\mu\upsilon)}{(F-\mu\upsilon)}=-\frac{d(m_0+\mu t)}{(m_0+\mu t)}\Rightarrow\ln\left(F-\mu\upsilon\right)\Big|_{\upsilon_0}^{\upsilon}=-\ln(m_0+\mu t)\Big|_{t_0}^{t}$$

$$\ln\left(F-\mu\upsilon\right)\Big|_{\upsilon_0}^{\upsilon}=-\ln(m_0+\mu t)\Big|_{t_0}^{t}\Rightarrow\ln\frac{(F-\mu\upsilon)}{(F-\mu\upsilon_0)}=-\ln\frac{(m_0+\mu t)}{(m_0+\mu t_0)}=\ln\frac{(m_0+\mu t_0)}{(m_0+\mu t)}$$

$$\frac{(F-\mu\upsilon)}{(F-\mu\upsilon_0)}=\frac{(m_0+\mu t_0)}{(m_0+\mu t)}\Rightarrow(F-\mu\upsilon)=(F-\mu\upsilon_0)\frac{(m_0+\mu t_0)}{(m_0+\mu t)}$$

$$\upsilon=\frac{F}{\mu}-\left(\frac{F}{\mu}-\upsilon_0\right)\frac{(m_0+\mu t_0)}{(m_0+\mu t)}$$