ΕΜΠ – ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ – ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ – ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2021-22
ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ-Ι, 1$^{\text{ΟΥ}}$ ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΧΟΛΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΜΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΗΣ Β΄ ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Διδάσκοντες: Κ. Φαράκος, Ι. Ράπτης

1. Πλοιάριο μάζας m ξεκινάει με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0 = \upsilon_0 \hat{x}$ στην επιφάνεια λίμνης. Το πλοιάριο υφίσταται αντίσταση ανάλογη της ταχύτητας, $\vec{F}_{\alpha\nu\tau} = -c\vec{\upsilon}$, όπου ο συντελεστής c, λόγω μεταβλητής σύστασης του υγρού κατά μήκος της πορείας του πλοιαρίου, εξαρτάται από τη θέση x με τη μορφή $c(x) = \dfrac{c_0}{(1+ax)^2}$. Τα c_0 και a είναι θετικές σταθερές, ενώ το $x=0$ αντιστοιχεί στο σημείο εκκίνησης του πλοιαρίου.
(α) Γράψτε τη διαφορική εξίσωση κίνησης του πλοιαρίου και επιλύστε την προκειμένου να υπολογίσετε την εξάρτηση της ταχύτητας από τη θέση, $\upsilon = \upsilon(x)$.
(β) Με βάση το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α), διερευνήστε υπό ποια προϋπόθεση (για τα m, υ_0, c_0, a) η ταχύτητα του πλοιαρίου μηδενίζεται σε πεπερασμένη απόσταση από την αφετηρία και βρείτε πόση είναι αυτή η απόσταση.
(γ) Αν τα m, υ_0, c_0, a είναι τέτοια ώστε η ταχύτητα να μην μηδενίζεται ποτέ, να υπολογίσετε την οριακή τιμή της ταχύτητας για πολύ μεγάλες αποστάσεις από το αρχικό σημείο.
(δ) Υπολογίστε, με μορφή ολοκληρώματος, το χρόνο που χρειάζεται για να διανύσει μία απόσταση μήκους L_0.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $$m\frac{d\upsilon}{dt} = -c\upsilon = -\frac{c_0\,\upsilon}{(1+ax)^2} \;\Rightarrow\; m\frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{c_0\,\upsilon}{(1+ax)^2} \;\Rightarrow\; m\frac{d\upsilon}{dx}\upsilon = -\frac{c_0\,\upsilon}{(1+ax)^2}$$

$$m\frac{d\upsilon}{dx} = -\frac{c_0}{(1+ax)^2} \;\Rightarrow\; d\upsilon = -\frac{(c_0/m)dx}{(1+ax)^2} \;\Rightarrow\; \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon = -\frac{c_0}{am}\int_0^x \frac{d(ax)}{(1+ax)^2}$$

$$\upsilon - \upsilon_0 = -\frac{c_0}{am}\int_{x=0}^{x=x}\frac{d(1+ax)}{(1+ax)^2} \;\Rightarrow\; \upsilon = \upsilon_0 - \frac{c_0}{am}\int_{x=0}^{x=x}\frac{d(1+ax)}{(1+ax)^2} \;\Rightarrow\; \upsilon = \upsilon_0 - \frac{c_0}{am}\left.\frac{(1+ax)^{-2+1}}{-2+1}\right|_{x=0}^{x}$$

$$\upsilon = \upsilon_0 + \frac{c_0}{am}\left(\frac{1}{1+ax} - 1\right) \;\Rightarrow\; \boxed{\upsilon(x) = \upsilon_0 - \frac{c_0 x}{m(1+ax)}}$$

(β) Για να μηδενιστεί η ταχύτητα σε κάποια θέση της διαδρομής, θα πρέπει να ισχύει:

$$\upsilon(x_0) = \upsilon_0 - \frac{c_0 x_0}{m_0(1+ax_0)} = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = \frac{1/a}{c_0/(\upsilon_0 ma) - 1}$$

Άρα, η απαίτηση $x_0 > 0 \;\Rightarrow\; \boxed{c_0 > \upsilon_0 ma} \;\Rightarrow\; \boxed{x_0 = \dfrac{1/a}{c_0/(\upsilon_0 ma) - 1} = \dfrac{\upsilon_0 m}{c_0 - \upsilon_0 ma}}$

(γ) Στην περίπτωση που δεν ισχύει η παραπάνω προϋπόθεση

$$\upsilon(x) = \upsilon_0 - \frac{c_0}{m(a + (1/x))} \;\Rightarrow\; \boxed{\upsilon(x\to\infty) = \upsilon_0 - \frac{c_0}{ma}}$$

(δ) $\upsilon(x)=\upsilon_0-\dfrac{c_0 x}{m_0(1+ax)} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\upsilon_0 m_0(1+ax)-c_0 x}{m_0(1+ax)} \Rightarrow \boxed{\int_0^t dt=\int_0^{L_0}\dfrac{m_0(1+ax)dx}{\upsilon_0 m_0+(\upsilon_0 m_0 a-c_0)x}}$

2. Σωματίδιο μάζας m κινείται στο επίπεδο (x,y), με σταθερή επιτάχυνση $\ddot{\vec r}=-\hat{y}a$, και η εξίσωση της τροχιάς του είναι $y=Ax-Bx^2$, όπου a, A, B θετικές σταθερές, ανεξάρτητες του χρόνου και τις θέσης.
(α) Δείξτε ότι το πηλίκο των δύο συνιστωσών της ταχύτητας υ_y/υ_x είναι γραμμική συνάρτηση της συντεταγμένης-x και υπολογίστε τη μορφή της.
(β) Δείξτε οτι η x-συνιστώσα της ταχύτητας είναι σταθερή και υπολογίστε την τιμή της
(γ) Δείξτε ότι το σωματίδιο διέρχεται από την αρχή των συντεταγμένων (x,y), και υπολογίστε το μέτρο της ταχύτητάς του κατά την διέλευσή του από το $(0,0)$
(δ) Υπολογίστε τη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο, και σχολιάστε ποιά γνωστή κίνηση περιγράφει το πρόβλημα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $$y=Ax-Bx^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=A-2Bx$$

$$\vec{\upsilon}=\hat{x}\frac{dx}{dt}+\hat{y}\frac{dy}{dt}=\hat{x}\frac{dx}{dt}+\hat{y}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=\hat{x}\frac{dx}{dt}+\hat{y}\frac{dx}{dt}(A-2Bx). \quad \text{Επομένως: } \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}=A-2Bx$$

(β) $$\ddot{\vec r}=\dot{\vec\upsilon}=\frac{d}{dt}\left[\hat{x}\frac{dx}{dt}+\hat{y}\frac{dx}{dt}(A-2Bx)\right]=\hat{x}\frac{d^2x}{dt^2}+\hat{y}\left[\frac{d^2x}{dt^2}(A-2Bx)+\frac{dx}{dt}\left(-2B\frac{dx}{dt}\right)\right]$$

Αλλά: $$\ddot{\vec r}=-\hat{y}a=\hat{x}\frac{d^2x}{dt^2}+\hat{y}\left[\frac{d^2x}{dt^2}(A-2Bx)+\frac{dx}{dt}\left(-2B\frac{dx}{dt}\right)\right], \text{ άρα } \frac{d^2x}{dt^2}=0$$

και: $$-a=-2B\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{a}{2B}}.$$

(γ) Από τη σχέση της τροχιάς $y=Ax-Bx^2$, προκύπτει ότι για $x=0 \Rightarrow y=0$, άρα το σωματίδιο διέρχεται από την αρχή των συντεταγμένων $(0,0)$, και το μέτρο της ταχύτητάς του κατά την διέλευσή του από το $(0,0)$ προκύπτει με τη βοήθεια του ερωτήματος-α, σύμφωνα με το οποίο $\upsilon_y=\upsilon_x(A-2Bx)$, οπότε, για $x=0 \Rightarrow \upsilon_y=\upsilon_x A$.

Το μέτρο της ταχύτητας στο $(0,0)$ είναι: $\upsilon=\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}=\upsilon_x\sqrt{1+A^2} \quad \Rightarrow \quad \upsilon=\dfrac{a}{2B}\sqrt{1+A^2}$

(δ) $\vec F=m\ddot{\vec r}=-\hat{y}ma$. Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω, η κίνηση αντιστοιχεί σε πλάγια βολή, με αρχική ταχύτητα $(\upsilon_{0x},\upsilon_{0y})=\left(\dfrac{a}{2B},A\dfrac{a}{2B}\right)$ και σταθερή επιβράδυνση κατά τον άξονα-y.

3. Ένα μικρό σώμα μάζας m αρχίζει να ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία φ με το οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μ μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση x από το σημείο εκκίνησης, $\mu=\lambda x$ (όπου $\lambda>0$), κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.

(α) Γράψτε τη διαφορική εξίσωση κίνησης του σώματος κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.

(β) Χρησιμοποιείστε τη σχέση $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$ και ολοκληρώστε τη διαφορική εξίσωση, ώστε να υπολογίσετε την ταχύτητα *v=v(x)* κατά μήκος του κεκλιμένου επιπέδου.

(γ) Να υπολογίσετε την απόσταση που θα διανύσει το σώμα έως ότου σταματήσει.

(δ) Βρείτε τη θέση όπου μεγιστοποιείται η ταχύτητα καθώς και τη μέγιστη ταχύτητα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $m\frac{d^2x}{dt^2}=mg\sin\varphi-\mu(x)mg\cos\varphi \quad\Rightarrow\quad \frac{d^2x}{dt^2}=g\sin\varphi-\lambda xg\cos\varphi$

(β) $\frac{d\upsilon}{dt}=g\sin\varphi-\lambda xg\cos\varphi\Rightarrow\frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt}=g\sin\varphi-\lambda xg\cos\varphi\Rightarrow\upsilon d\upsilon=(g\sin\varphi-\lambda xg\cos\varphi)dx$

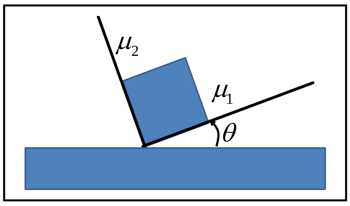
$$\int_0^{\upsilon}\upsilon d\upsilon=\int_0^{x}(g\sin\varphi-\lambda xg\cos\varphi)dx\Rightarrow\frac{\upsilon^2}{2}=-\frac{g}{\lambda\cos\varphi}\left.\frac{(\sin\varphi-\lambda x\cos\varphi)^2}{2}\right|_{x=0}^{x}$$

$$\upsilon^2=-\frac{g}{\lambda\cos\varphi}\left[(\sin\varphi-\lambda x\cos\varphi)^2-\sin^2\varphi\right]\Rightarrow\upsilon^2=gx(2\sin\varphi-\lambda x\cos\varphi)$$

(γ) $\upsilon=\sqrt{gx(2\sin\varphi-\lambda x\cos\varphi)}$, που μηδενίζεται όταν $2\sin\varphi-\lambda x\cos\varphi=0\Rightarrow x=(2\tan\varphi)/\lambda$

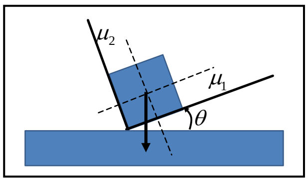
(δ) $\upsilon=\sqrt{g}\left(2x\sin\varphi-\lambda x^2\cos\varphi\right)^{1/2}\Rightarrow\frac{d\upsilon}{dx}=\frac{\sqrt{g}}{2}\left(2x\sin\varphi-\lambda x^2\cos\varphi\right)^{-1/2}(2\sin\varphi-2\lambda x\cos\varphi)$

Για το ακρότατο: $\frac{d\upsilon}{dx}=0\Rightarrow2\sin\varphi-2\lambda x\cos\varphi=0\Rightarrow x=\frac{\tan\varphi}{\lambda}$ (δείξτε ότι είναι μέγιστο)



4. Οριζόντιο ορθογώνιο κανάλι χρησιμοποιείται για μεταφορά ορθογώνιων κυβωτίων κατά μήκος της ακμής του (δηλ., κάθετα στη σελίδα). Η μία επιφάνεια του καναλιού, που έχει κλίση θ ως προς το οριζόντιο επίπεδο, έχει συντελεστή τριβής μ_1, και η άλλη επιφάνεια έχει συντελεστή τριβής μ_2. (α) Να υπολογιστεί [για δεδομένα (m,g,θ,μ_1,μ_2)] η ελάχιστη οριζόντια δύναμη η οποία πρέπει να εφαρμοστή παράλληλα στην ακμή του καναλιού, προκειμένου να αρχίσει να μετατοπίζεται ένα κιβώτιο μάζας m. (β) Δείξτε ότι υπάρχει τιμή της γωνίας θ $(0\le\theta\le\pi/2)$ για την οποία η δύναμη του ερωτήματος-α μεγιστοποιείται, και υπολογίστε τη μέγιστη τιμή της.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



(α) $F\ge F_{\tau\rho,\max}=mg(\mu_1\cos\theta+\mu_2\sin\theta)$

(β) $\frac{dF}{d\theta}=0 \quad\Rightarrow\quad mg(-\mu_1\sin\theta+\mu_2\cos\theta)=0$

$\Rightarrow\mu_1\sin\theta=\mu_2\cos\theta \quad\Rightarrow\quad \tan\theta=\frac{\mu_2}{\mu_1}$

$$\frac{d^2F}{d\theta^2}=mg(-\mu_1\cos\theta-\mu_2\sin\theta)=-mg(\mu_1\cos\theta+\mu_2\sin\theta)=-mg\cos\theta(\mu_1+\mu_2\tan\theta)$$

Αντικαθιστώντας την $\tan\theta$ από την συνθήκη ακρότατου

$$\frac{d^2F}{d\theta^2}=-mg\cos\theta\left(\mu_1+\mu_2\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)=-mg\cos\theta\frac{\mu_1^2+\mu_2^2}{\mu_1}<0,\quad \text{αφού}\quad \cos\theta>0,\quad \left(0\le\theta\le\pi/2\right)$$

Άρα, για $\tan\theta=\dfrac{\mu_2}{\mu_1}$ έχουμε μεγιστοποίηση της τριβής, $\left[\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\dfrac{\mu_1}{\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}}\right]$

$$F_{\tau\rho,\max}=mg\cos\theta\left(\mu_1+\mu_2\tan\theta\right)=mg\cos\theta\frac{\mu_1^2+\mu_2^2}{\mu_1}=mg\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2}$$

5. Σώμα μάζας M ξεκινάει τη χρονική στιγμή t=0 και κινείται ευθύγραμμα υπό την επίδραση συνολικής δύναμης τέτοιας ώστε η ταχύτητά του να εξαρτάται από το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $\upsilon(t)=AT/(T+t)$, όπου (A,T) θετικές σταθερές. **(α)** Προσδιορίστε τις διαστάσεις (μονάδες) των σταθερών (A,T). **(β)** Προσδιορίστε τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία υποδιπλασιάζεται η ταχύτητα του σώματος και το διάστημα s που διανύεται μέχρι τότε. **(γ)** Για το χρονικό διάστημα $0\le t\le t_0$, βρείτε την δύναμη F που ασκείται στο σώμα ως συνάρτηση της ταχύτητας υ του σώματος, $F=F_1(\upsilon)$, και (ανεξάρτητα) ως συνάρτηση του χρόνου, $F=F_2(t)$. **(δ)** Να υπολογίσετε τον ρυθμό απορρόφησης ισχύος από τη δύναμη, συναρτήσει του χρόνου, $P=P(t)=\dfrac{dW}{dt}$, τη συνολική ενέργεια που απορροφά μέχρι τη χρονική στιγμή t_0, και να την συγκρίνεται με την αντίστοιχη μεταβολή της κινητικής ενέργειας, (ε) Για $t>t_0$, η δύναμη υπό την οποία κινείται το σώμα γίνεται $F=F_3(\upsilon)=-m\upsilon/T$. Να υπολογίσετε την $\upsilon=\upsilon(t)$ για $t>t_0$, και τη συνολική διάρκεια της κίνησης.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) (A,T) = (Ταχύτητα, Χρόνος)

(β) $\upsilon(t)=\dfrac{AT}{T+t},\qquad \upsilon(t=0)=A,\qquad \upsilon(t_0)=\dfrac{A}{2}\ \Rightarrow\dfrac{AT}{T+t_0}=\dfrac{A}{2}\Rightarrow t_0=T$.

$$s=\int_{t=0}^{t=T}\upsilon(t)\,dt=\int_{t=0}^{t=T}\frac{AT}{T+t}d\left(T+t\right)=AT\ln\left(T+t\right)\Big|_{t=0}^{t=T}=AT\ln 2$$

(γ) $F=m\dfrac{d\upsilon}{dt}=-\dfrac{mAT}{\left(T+t\right)^2}=-\dfrac{m}{AT}\left(\dfrac{AT}{T+t}\right)^2=-\dfrac{m\upsilon^2}{AT}$

(δ) $P(t)=F(t)\upsilon(t)=\dfrac{mAT}{\left(T+t\right)^2}\dfrac{AT}{T+t}=\dfrac{mA^2T^2}{\left(T+t\right)^3}=\dfrac{m\upsilon^3}{AT}$

$$W=\int_{t=0}^{t=T}P(t)\,dt=\int_{t=0}^{t=T}\frac{mA^2T^2}{\left(T+t\right)^3}d\left(T+t\right)=\frac{mA^2T^2}{-2\left(T+t\right)^2}\Bigg|_{t=0}^{t=T}=\frac{3mA^2}{8}$$

$$\Delta E_k=\frac{1}{2}mA^2-\frac{1}{2}m\left(\frac{A}{2}\right)^2=mA^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)=\frac{3mA^2}{8}$$

(ε) $m\dfrac{d\upsilon}{dt}=-m\dfrac{\upsilon}{T} \quad\Rightarrow\quad \int\limits_{A/2}^{\upsilon}\dfrac{d\upsilon}{\upsilon}=-\int\limits_{T}^{t}\dfrac{dt}{T} \quad\Rightarrow\quad \upsilon(t)=\dfrac{A}{2}e^{\frac{T-t}{T}}$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{A}{2}e^{\frac{T-t}{T}} \Rightarrow \int\limits_{L}^{x}dx=\int\limits_{T}^{t}\frac{A}{2}e^{\frac{T-t}{T}}dt \quad\Rightarrow\quad x=L+\frac{TA}{2}\left(1-e^{\frac{T-t}{T}}\right)$$

Άρα, ενώ $\upsilon(t)\to 0$ για $t\to\infty$, εντούτοις $x_{\max}=L+(TA/2)$.

7. Ένας ποδοσφαιριστής εκτελεί κτύπημα πέναλντι και η μπάλα περνάει εφαπτομενικά πάνω από το οριζόντιο δοκάρι με την ταχύτητά της οριζόντια. Το δοκάρι βρίσκετε σε ύψος h από το έδαφος. Αν η μπάλα φεύγει με αρχική ταχύτητα V_0, να βρεθεί: **(α)** η γωνία θ που σχηματίζει η V_0 με το οριζόντιο επίπεδο. **(β)** η ταχύτητα της μπάλας ακριβώς πάνω από οριζόντιο δοκάρι. **(γ)** πόσο χρόνο θα χρειαστεί η μπάλα για να πέσει στο έδαφος. **(δ)** ποια η απόσταση του σημείου του πέναλντι από το τέρμα.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας $V_{0,y}=V_0\sin\theta$: αρχική ταχύτητα ομαλά επιβραδυνόμενης κίνησης με επιβράδυνση g, άρα, μέγιστο ύψος

$$h_{\max}=V_{0,y}^2/2g=V_0^2\sin^2\theta/2g \quad\Rightarrow\quad \sin\theta=\sqrt{2gh_{\max}/V_0^2}$$

(β) Η ταχύτητα της μπάλας ακριβώς πάνω από οριζόντιο δοκάρι, είναι ίση με την αρχική οριζόντια συνιστώσα $V_{0,x}=V_0\cos\theta=V_0\sqrt{1-\sin^2\theta}=V_0\sqrt{1-\dfrac{2gh_{\max}}{V_0^2}}\Rightarrow V_{0,x}=\sqrt{V_0^2-2gh_{\max}}$

(γ) Ο χρόνος που θα χρειαστεί η μπάλα για να πέσει στο έδαφος είναι $t_{o\lambda}=2t_{\alpha\nu o\delta o\upsilon}$, όπου ο

$$t_{\alpha\nu}:\quad V_0\sin\theta-gt_{\alpha\nu}=0\Rightarrow t_{\alpha\nu}=V_0\sin\theta/g \quad\Rightarrow\quad t_{o\lambda}=2V_0\sin\theta/g$$

(δ) Η απόσταση του σημείου του πέναλντι από το τέρμα είναι

$$D=V_{0,x}t_{\alpha\nu}=(V_0\cos\theta)(V_0\sin\theta/g)\Rightarrow D=\sqrt{\frac{2h}{g}\left(V_0^2-2gh\right)}$$

8. Ένα σωματίδιο με μάζα m κινείται στο επίπεδο (x,y) υπό την επίδραση δύναμης $\vec{F}=-k\vec{r}$ όπου k μια θετική σταθερά και $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου. **(α)** Να λυθούν οι εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου ως προς τους άξονες x, y. **(β)** Ποια είναι η συνθήκη ώστε το σωματίδιο να εκτελεί κυκλική κίνηση και ποια είναι η περίοδος της κίνησης; **(γ)** Ποια είναι η συνθήκη ώστε η κίνηση να είναι ευθύγραμμη με κλίση 30^0 ως προς τον άξονα των x.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $\vec{F}=-k\vec{r}\Rightarrow m\ddot{\vec{r}}=-k\vec{r}\Rightarrow\begin{cases} m\ddot{x}=-kx\Rightarrow x=x_0\sin(\omega t+\varphi) \\ m\ddot{y}=-ky\Rightarrow y=y_0\sin(\omega t+\theta)\end{cases} \qquad \omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

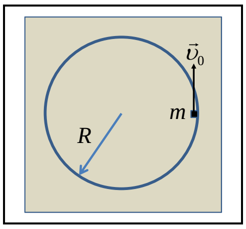
(β) Κυκλική κίνηση: $x^2+y^2=R^2\Rightarrow x_0^2\sin^2(\omega t+\varphi)+y_0^2\sin^2(\omega t+\theta)=R^2$

Η τελευταία συνθήκη ικανοποιείται αν $\theta=\varphi+\dfrac{\pi}{2}$ και $x_o=y_0=R$

Πράγματι : $x^2+y^2\Rightarrow R^2\sin^2(\omega t+\varphi)+R^2\cos^2(\omega t+\theta)=R^2$

(γ) Ευθύγραμμη κίνηση: $\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{y}{x}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{y}{x} \quad\Rightarrow\quad y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

Η τελευταία συνθήκη ικανοποιείται $\forall\, t$, αρκεί $y_0 = x_0 \big/ \sqrt{3}$ και $\theta=\varphi$.



10. Οριζόντιο μεταλλικό δακτυλίδι ακτίνας R είναι στερεωμένο ακλόνητα πάνω σε οριζόντιο λείο τραπέζι. Στο εσωτερικό του δακτυλιδιού υπάρχει σημειακή μάζα m, ο συντελεστής τριβής της οποίας με το δακτυλίδι είναι μ. Η μάζα εκτοξεύεται με οριζόντια αρχική ταχύτητα υ_0, εφαπτομενικά στην εσωτερική επιφάνεια του δακτυλιδιού. **(α)** Υπολογίστε την ταχύτητα της μάζας ως συνάρτηση του χρόνου. **(β)** Υπολογίστε τη γωνιακή απόσταση της μάζας, από το σημείο εκτόξευσης, συναρτήσει του χρόνου. **(γ)** Επαναλάβετε τα ίδια ερωτήματα αν το εσωτερικό του δακτυλιδιού είναι λείο και ο συντελεστής τριβής της μάζας με το οριζόντιο τραπέζι είναι μ.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η αντίδραση του δακτυλιδού αποτελεί την κεντρομόλο δύναμη: $A = m\dfrac{\upsilon^2}{R}$.

(α) Για την επιτρόχια επιτάχυνση ισχύει:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -T = -\mu A = -\mu m\frac{\upsilon^2}{R} \quad\Rightarrow\quad \frac{d\upsilon}{dt} = -\mu\frac{\upsilon^2}{R} \quad\Rightarrow\quad \frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = -\frac{\mu}{R}dt \quad\Rightarrow$$

Ολοκληρώνοντας, με βάση τις αρχικές συνθήκες:

$$\int_{\upsilon_o}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = -\frac{\mu}{R}\int_0^t dt \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\upsilon_0} - \frac{1}{\upsilon} = -\frac{\mu t}{R} \quad\Rightarrow\quad \upsilon = \frac{\upsilon_0}{1+(\upsilon_0\mu t/R)}:$$

άρα η κίνηση διαρκεί επ' άπειρον !

$$\int_{\upsilon_o}^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = -\frac{\mu}{R}\int_0^t dt \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\upsilon_0} - \frac{1}{\upsilon} = -\frac{\mu t}{R} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\upsilon = \frac{\upsilon_0}{1+(\upsilon_0\mu t/R)}}$$

(β) Από την τελευτάια σχέση, όσον αφορά τη γωνιακή μεταβλητή, έχουμε:

$$\frac{d(\varphi R)}{dt} = \frac{\upsilon_0}{1+(\upsilon_0\mu t/R)} \quad\Rightarrow\quad d\varphi = \frac{(\upsilon_0/R)dt}{1+(\upsilon_0\mu t/R)} \quad\Rightarrow\quad \mu d\varphi = \frac{d(\upsilon_0\mu t/R)}{1+(\upsilon_0\mu t/R)} \Rightarrow$$

$$\mu d\varphi = \frac{d\left(1+(\upsilon_0\mu t/R)\right)}{1+(\upsilon_0\mu t/R)} \Rightarrow \quad \mu\int_0^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \frac{d\left(1+(\upsilon_0\mu t/R)\right)}{1+(\upsilon_0\mu t/R)} \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{1}{\mu}\ln\left(1+(\upsilon_0\mu t/R)\right)}$$

<u>Σχόλια</u>: (1) Η ταχύτητα δεν μηδενίζεται ποτέ (φθίνοντας, για μεγάλους χρόνους, αντιστρόφως ανάλογα με το χρόνο), με την γωνία να αυξάνει λογαριθμικά με το χρόνο. (2) Αν το σώμα ξεκινούσε με την ίδια αρχική ταχύτητα για ευθύγραμμη πορεία πάνω σε δάπεδο, με τον ίδιο συντελεστή τριβής, θα εκτελούσε ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με πεπερασμένο μήκος και μηδενική τελική ταχύτητα.

11. Ηλεκτροκίνητο ρομποτικό όχημα μπορεί να κινηθεί σε ευθύγραμμη τροχιά έχοντας τη δυνατότητα να αναπτύξει μέγιστη επιτάχυνση μέτρου a_1 και μέγιστη επιβράδυνση μέτρου a_2. (α) Να υπολογίστε <u>***τον ελάχιστο χρόνο***</u> με τον οποίο μπορεί να διανύσει μία ευθύγραμμη απόσταση μήκους L, <u>***ξεκινώντας και τερματίζοντας με μηδενική ταχύτητα***</u>.

(β) Αν η μάζα του οχήματος είναι m, να υπολογίσετε το ρυθμό παροχής ενέργειας $P_{\varepsilon\pi\iota\tau}(t)$ (ισχύς) από τον κινητήρα στο όχημα, κατά τη φάση της επιτάχυνσης και τη μέγιστη κινητική ενέργειά του, αν η τριβή θεωρηθεί αμελητέα.

(γ) Να υπολογίσετε το ρυθμό απώλειας ενέργειας $P_{\varepsilon\pi\iota\beta\rho}(t)$, από τον μηχανισμό πέδησης, κατά τη φάση της επιβράδυνσης.

[Όλα τα ζητούμενα μεγέθη να υπολογιστούν συναρτήσει των a_1, a_2, L, m]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Ο ελάχιστος χρόνος αντιστοιχεί στον συνδυασμό συνεχούς ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης με τη μέγιστη επιτάχυνση a_1, για χρόνο και μήκος (t_1, L_1), και μέγιστη ταχύτητα υ_1, που ακολουθείται άμεσα από ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με μέγιστη επιβράδυνση a_2, για χρόνο και μήκος (t_2, L_2), έτσι ώστε η εκκίνηση και ο τερματισμός να γίνουν με μηδενική ταχύτητα.

Με βάση τα παραπάνω, θα έχουμε: $L = L_1 + L_2, \quad t = t_1 + t_1$ (1α,β)

$$L_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2L_1}{a_1}} \Rightarrow \upsilon_1 = a_1 t_1 = \sqrt{2a_1 L_1}$$

$$L_2 = \upsilon_1 t_1 - \frac{1}{2}a_2 t_2^2 \quad , \quad \upsilon_2 = \upsilon_1 - a_2 t_2 = 0 \Rightarrow a_1 t_1 = a_2 t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{a_1}{a_2} t_1$$

Άρα μπορούμε να εκφράσουμε όλα τα μεγέθη συναρτήσει του t_1,

Από (1α):

$$L = L_1 + L_2 = \left(\frac{1}{2}a_1 t_1^2\right) + \left(\upsilon_1 t_2 - \frac{1}{2}a_2 t_2^2\right) = t_1^2\left(\frac{a_1}{2} + \frac{2a_1^2}{2a_2} - \frac{a_1^2}{2a_2}\right) \Rightarrow t_1 = \left(\frac{2a_2 L}{a_1(a_1+a_2)}\right)^{1/2}$$

και $$t_2 = \frac{a_1}{a_2} t_1 = \frac{a_1}{a_2}\left(\frac{2a_2 L}{a_1(a_1+a_2)}\right)^{1/2} \Rightarrow t_2 = \left(\frac{2a_1 L}{a_2(a_1+a_2)}\right)^{1/2}$$

Αθροίζοντας : $$t = t_1 + t_2 \Rightarrow \boxed{t = \left(\frac{2a_2 L}{a_1(a_1+a_2)}\right)^{1/2} + \left(\frac{2a_1 L}{a_2(a_1+a_2)}\right)^{1/2} = \sqrt{2L\frac{a_1+a_2}{a_1 a_2}}}$$

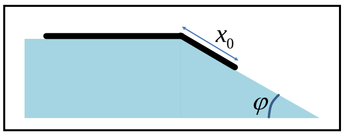
(β) Αν η μάζα του οχήματος είναι m, ο ρυθμός παροχής ενέργειας (ισχύς) από τον κινητήρα στο όχημα, κατά τη φάση της επιτάχυνσης, είναι $P_{\varepsilon\pi\iota\tau} = F\upsilon = (ma_1)(a_1 t) \Rightarrow \boxed{P_{\varepsilon\pi\iota\tau} = ma_1^2 t}$

Η συνολικά παρεχόμενη ενέργεια είναι ίση με τη μέγιστη κινητική ενέργεια

$$E_{\kappa\iota\nu,\max} = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}m a_1^2 t_1^2 = \frac{1}{2}m a_1^2\left(\frac{2a_2 L}{a_1(a_1+a_2)}\right) \Rightarrow \boxed{E_{\kappa\iota\nu,\max} = m\frac{a_1 a_2 L}{a_1+a_2}}$$

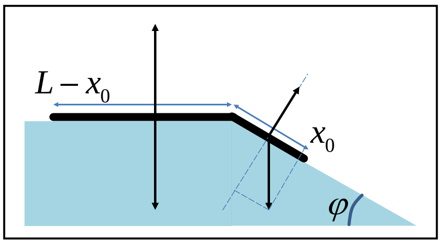
(γ) Ο ρυθμό απώλειας ενέργειας, από τον μηχανισμό πέδησης, κατά τη φάση της επιβράδυνσης, είναι:

$$P_{\varepsilon\pi\iota\beta} = F\upsilon = (ma_2)(\upsilon_1 - a_2 t) = (ma_2)(a_1 t_1 - a_2 t) = (ma_2)\left(\sqrt{\frac{2a_1 a_2 L}{(a_1+a_2)}} - a_2 t\right)$$



13. Ομογενής αλυσίδα συνολικού μήκους L και μάζας m είναι τοποθετημένη έτσι ώστε, τη χρονική στιγμή t=0, ένα τμήμα της να βρίσκεται απλωμένο σε οριζόντιο επίπεδο, και το υπόλοιπο τμήμα της, μήκους x_0, να βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας φ, όπως στο σχήμα. Και τα δύο τμήματα βρίσκονται στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο, ενώ ο συντελεστής τριβής μεταξύ της αλυσίδας και των δυο επιπέδων (οριζόντιου και κεκλιμένου) είναι $\mu < \tan\varphi$. Βρείτε **(α)** τη μέγιστη τιμή $x_{0,\max}$, πέραν της οποίας η αλυσίδα αρχίζει να ολισθαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο (παρασύροντας και το οριζόντιο τμήμα της), **(β)** τη διαφορική εξίσωση κίνησης του ενός (π.χ., του κάτω) άκρου της αλυσίδας, συναρτήσει του μήκους x που βρίσκεται στο κελιμένο επίπεδο, αν αφεθεί με αρχικό μήκος $x_0 > x_{0,\max}$ στο κεκλιμένο επίπεδο **(γ)** την ταχύτητα της αλυσίδας, συναρτήσει του x, και (δ) το συνολικό χρονικό διάστημα από την εκκίνηση, μέχρι να βρεθεί όλη η αλυσίδα στο κεκλιμένο επίπεδο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



(α) Η μέγιστη τιμή $x_{0,\max}$, πέραν της οποίας η αλυσίδα αρχίζει να ολισθαίνει στο κεκλιμένο επίπεδο (παρασύροντας και το οριζόντιο τμήμα της),

$$\frac{x_0}{L}mg\sin\varphi \le \mu\frac{x_0}{L}mg\cos\varphi + \mu\frac{L-x_0}{L}mg \Rightarrow$$

$$x_0 mg\sin\varphi - \mu x_0 mg\cos\varphi + \mu x_0 mg \le \mu Lmg \Rightarrow$$

$$x_0\ \ mg\sin\varphi - \mu mg\cos\varphi + \mu mg\ \ \le \mu Lmg \Rightarrow x \le \frac{\mu L}{\sin\varphi - \mu\cos\varphi + \mu}$$

(β) Η διαφορική εξίσωση κίνησης του κάτω άκρου της αλυσίδας, συναρτήσει του μήκους x που βρίσκεται στο κελιμένο επίπεδο

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = m\frac{x}{L}g\sin\varphi - \mu m\frac{x}{L}g\cos\varphi - \mu m\frac{L-x}{L}g \Rightarrow$$

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{x}{L}g\sin\varphi - \mu\frac{x}{L}g\cos\varphi + \mu\frac{x}{L}g - \mu g = \frac{x}{L}\ \ g\sin\varphi - \mu g\cos\varphi + \mu g\ \ - \mu g$$

(γ) $$\frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{x}{L}\ \ g\sin\varphi - \mu g\cos\varphi + \mu g\ \ - \mu g \Rightarrow \upsilon d\upsilon = \left[\frac{x}{L}\ \ g\sin\varphi - \mu g\cos\varphi + \mu g\ \ - \mu g\right]dx$$

$$\frac{\upsilon^2}{2} = \frac{x^2}{2L}\ \ g\sin\varphi - \mu g\cos\varphi + \mu g\ \ - \frac{x_0^2}{2L}\ \ g\sin\varphi - \mu g\cos\varphi + \mu g\ \ - \mu g\ \ x - x_0$$

(δ) $$\upsilon^2 = \frac{x^2}{L}\ \ g\sin\varphi - \mu g\cos\varphi + \mu g\ \ - \frac{x_0^2}{L}\ \ g\sin\varphi - \mu g\cos\varphi + \mu g\ \ - 2\mu g\ \ x - x_0$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{x^2}{L}\ \ g\sin\varphi - \mu g\cos\varphi + \mu g\ \ - \frac{x_0^2}{L}\ \ g\sin\varphi - \mu g\cos\varphi + \mu g\ \ - 2\mu g\ \ x - x_0}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{x^2}{L}\ \ g\sin\varphi - \mu g\cos\varphi + \mu g\ \ - \frac{x_0^2}{L}\ \ g\sin\varphi - \mu g\cos\varphi + \mu g\ \ - 2\mu g\ \ x - x_0}} = dt$$

$$\int_{x_0}^{L}\frac{dx}{\sqrt{\frac{x^2}{L}\ \ g\sin\varphi - \mu g\cos\varphi + \mu g\ \ - 2\mu gx - \frac{x_0^2}{L}\ \ g\sin\varphi - \mu g\cos\varphi + \mu g\ \ + 2\mu g x_0}} = \int_0^{t_{o\lambda}} dt$$

14. Σώμα μάζας M κινούμενο οριζόντια επιβραδύνεται υπό την επίδραση δύναμης τριβής $F=F(\upsilon)$ που εξαρτάται από την ταχύτητα του σώματος. Το σώμα την χρονική στιγμή $t=0$ έχει ταχύτητα V_0. Η ταχύτητα του σώματος ελαττώνεται με τον χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $\upsilon = b(T-t)^2$, όπου T ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα για να σταματήσει $(T \ge t \ge 0)$ και b μια θετική σταθερά. **(α)** Βρείτε την δύναμη F που ασκείται στο σώμα ως συνάρτηση της ταχύτητας υ του σώματος. **(β)** Να υπολογίσετε τον χρόνο T (συναρτήσει των V_0 και b) που χρειάζεται το σώμα για να σταματήσει και το διάστημα που έχει διανύσει

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $\upsilon = b(T-t)^2 \;\Rightarrow\; a \equiv \dot{\upsilon} = -2b(T-t) \;\Rightarrow\; F = ma = -2mb(T-t)$

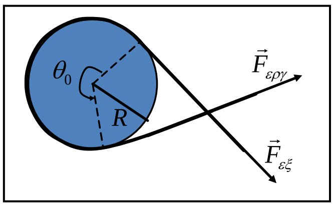
$$\Rightarrow F = -2m\sqrt{b}\sqrt{b}(T-t) = -2m\sqrt{b}\sqrt{b(T-t)^2} \;\Rightarrow F = -2m\sqrt{b}\,\upsilon^{1/2}$$

(β) $\upsilon = b(T-t)^2 \;\Rightarrow\; V_0 = bT^2 \;\Rightarrow\; T = \sqrt{V_0/b}$

$$\upsilon = b(T-t)^2 \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dt} = b(T-t)^2 \;\Rightarrow\; dx = b(T-t)^2\,dt$$

$$\int_0^x dx = b\int_0^t (T-t)^2\,dt \;\Rightarrow\; x = -b\int_{t=0}^{t}(T-t)^2\,d(T-t) \;\Rightarrow\; x = -b\left.\frac{(T-t)^3}{3}\right|_{t=0}^{t}$$

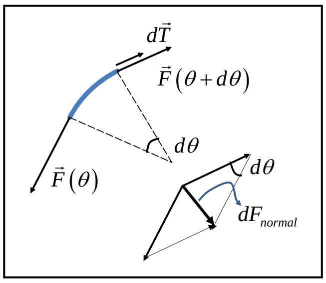
$$x(t) = -(b/3)\left[(T-t)^3 - T^3\right] \;\Rightarrow\; x(t=T) = (b/3)T^3 \Rightarrow x_{\max} = \sqrt{\frac{V_0^3}{9b}}$$



15. (α) Ο ακλόνητος κύλινδρος του σχήματος (εργατοκύλινδρος) χρησιμοποιείται για την εξισορρόπηση ισχυρής εξωτερικής δύναμης $\vec{F}_{\varepsilon\xi}$ με τη μικρότερη δύναμη ενός εργάτη $\vec{F}_{\varepsilon\rho\gamma}$, μέσω εκμετάλλευσης της τριβής μεταξύ της επιφάνειας του κυλίνδρου και σχοινιού. Αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ του σχοινιού και της επιφάνειας του κυλίνδρου είναι μ, και η συνολική γωνία τυλίγματος του σχοινιού περί τον κύλινδρο είναι θ_0, να δείξετε ότι, για στατική ισορροπία, το πηλίκο μείωσης της δύναμης είναι $\left|\vec{F}_{\varepsilon\rho\gamma}\right| / \left|\vec{F}_{\varepsilon\xi}\right| = e^{-\mu\theta_0}$. [Υπόδειξη: Υπολογίστε τη διαφορική τριβή dT που ασκείται σε διαφορικό τμήμα του σχοινιού, που αντιστοιχεί σε γωνία $d\theta$, και ολοκληρώστε].

(β) Σε έναν διαφορετικό τρόπο λειτουργίας, ο κύλινδρος μπορεί να περιστρέφεται, όταν ένα σχοινί, που είναι τυλιγμένο γύρο του, έλκεται. Σε αυτή την περίπτωση, οι αντιστάσεις του μηχανισμού περιστροφής αντιστοιχούν σε μία δύναμη αντίστασης της μορφής $F_{\tau\rho} = F_0 e^{a\omega R}$, όπου a: θετική σταθερά, ω: η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής και R: η ακτίνα του κυλίνδρου. Σωματίδιο μάζας m που είναι προσδεδεμένο στην άκρη του σχοινού εκτοξεύεται εφαπτομενικά με αρχική ταχύτητα υ_0 και εξακολουθεί να κινείται στην ίδια ευθεία. Να υπολογίσετε την ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου, και τη συνολική διάρκεια κίνησης αν $\upsilon_0 = (\ln 2)/a$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



(α) Αν η $\theta = 0$ αντιστοιχεί στην $\vec{F}_{\varepsilon\xi}$, και $\theta = \theta_0$ αντιστοιχεί στην $\vec{F}_{\varepsilon\rho\gamma}$, τότε η συνθήκη ισορροπίας ενός διαφορικού τόξου με γωνιακό εύρος $d\theta$ είναι :

$$F(\theta) = F(\theta + d\theta) + dT \;\Rightarrow$$

$$dT = F(\theta) - F(\theta + d\theta) = F(\theta) - F(\theta) - \frac{dF}{d\theta}d\theta$$

Τελικά $dT = -\dfrac{dF}{d\theta}d\theta = -dF \;\Rightarrow dF = -dT = -\mu\,dF_{normal} = -\mu F\,d\theta$

$$dF = -\mu F\, d\theta \quad \Rightarrow \frac{dF}{F} = -\mu d\theta \quad \Rightarrow \int_{F_{\max}}^{F_{\min}} \frac{dF}{F} = -\mu \int_0^{\theta_0} d\theta \quad \Rightarrow \boxed{F_{\min} = F_{\max} e^{-\mu\theta_0}}$$

(β)
$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -F_{\tau\rho} = -F_0 e^{a\omega R} = -F_0 e^{a\upsilon} \quad \Rightarrow \quad e^{-a\upsilon} d\upsilon = -\frac{F_0}{m} dt$$

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} e^{-a\upsilon} d\upsilon = -\frac{F_0}{m}\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \upsilon(t) = -\frac{1}{a}\ln\left(e^{-a\upsilon_0} + \frac{F_0 at}{m}\right) \Rightarrow \boxed{\upsilon(t) = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{m}{me^{-a\upsilon_0} + F_0 at}\right)}$$

Συνολική διάρκεια κίνησης, t_0 : $\upsilon(t_0) = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{m}{me^{-a\upsilon_0} + F_0 at_0}\right) = 0 \quad \Rightarrow \frac{m}{me^{-a\upsilon_0} + F_0 at_0} = 1$

$$F_0 at_0 = m\left(1 - e^{-a\upsilon_0}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_0 = \frac{m\left(1 - e^{-a\upsilon_0}\right)}{F_0 a} = \frac{m}{2F_0 a}}$$

γ) Να υπολογίσετε τη σχέση που συνδέει το συνολικό διανυόμενο διάστημα με τις παραμέτρους του συστήματος.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{a}\ln\left(e^{-a\upsilon_0} + \frac{F_0 at}{m}\right) \quad \Rightarrow dx = -\frac{1}{a}\ln\left(e^{-a\upsilon_0} + \frac{F_0 at}{m}\right)dt$$

$$\int_0^{x_{\max}} dx = -\frac{1}{a}\int_0^{t_0}\ln\left(e^{-a\upsilon_0} + \frac{F_0 at}{m}\right)dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{\max} = -\frac{1}{a}\int_0^{t_0}\ln\left(e^{-a\upsilon_0} + \frac{F_0 at}{m}\right)dt}$$

$$\int \ln(a + cx)\,dx = \frac{(a + cx)\ln(a + cx) - cx}{c}$$